# Základy matematické analýzy

## Úvodní přednáška

Pavel Hrabák[1], Tomáš Kalvoda[2], Ivo Petr[3]

[1]pavel.hrabak@fit.cvut.cz [2]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [3]ivo.petr@fit.cvut.cz,

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

4. března 2021
ZS 2020/2021

# Hlavní body

$\mathbb{R}$

1. Množina reálných čísel

$\mathbb{N}$

2. Zobrazení

3. Reálná funkce reálné proměnné

$f : A \to B$

# Hlavní body

$\mathbb{R}$

1 Množina reálných čísel

$\mathbb{N}$

2 Zobrazení

3 Reálná funkce reálné proměnné

$$f : A \to B$$

# Číselné množiny

Známé číselné množiny označujeme v BI-ZMA následovně:

- **přirozená** čísla $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$,
- **přirozená** čísla s nulou $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$,
- **celá** čísla $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$,
- **racionální** čísla $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z} \text{ a } q \in \mathbb{N} \text{ jsou nesoudělná} \right\}$,
- **reálná** čísla $\mathbb{R}$,
- **komplexní** čísla $\mathbb{C}$.

Platí inkluze $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Nejvíce se budeme pohybovat v množině reálných čísel. Připomeňme proto její základní vlasnosti. . .

# Reálná čísla

Na množině reálných čísel existují dvě významné binární operace (jistá zobrazení, viz dále) nazývané **sčítání** a **násobení**,

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

splňující známé komutativní, asociativní a distributivní zákony:

$$a + b = b + a, \qquad a \cdot b = b \cdot a,$$

$$(a + b) + c = a + (b + c), \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$$

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c),$$

pro každé $a, b, c \in \mathbb{R}$.

# Reálná čísla

Na množině reálných čísel existují dvě významné binární operace (jistá zobrazení, viz dále) nazývané **sčítání** a **násobení**,

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

splňující známé komutativní, asociativní a distributivní zákony:

$$a + b = b + a, \qquad a \cdot b = b \cdot a,$$
$$(a + b) + c = a + (b + c), \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$$
$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c), \qquad \text{pro každé } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

V reálných číslech máme k dispozici čísla $0$ a $1$ splňující

$$0 + a = a + 0 = a, \text{ pro lib. } a \in \mathbb{R}, \quad 1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \text{ pro lib. nenulové } a \in \mathbb{R}.$$

# Reálná čísla

Na množině reálných čísel existují dvě významné binární operace (jistá zobrazení, viz dále) nazývané **sčítání** a **násobení**,

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

splňující známé komutativní, asociativní a distributivní zákony:

$$a + b = b + a, \qquad a \cdot b = b \cdot a,$$
$$(a + b) + c = a + (b + c), \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$$
$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c), \qquad \text{pro každé } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

V reálných číslech máme k dispozici čísla $0$ a $1$ splňující

$$0 + a = a + 0 = a, \text{ pro lib. } a \in \mathbb{R}, \quad 1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \text{ pro lib. nenulové } a \in \mathbb{R}.$$

Pro každé $a \in \mathbb{R}$ existuje $-a \in \mathbb{R}$ splňující $a + (-a) = -a + a = 0$.

# Reálná čísla

Na množině reálných čísel existují dvě významné binární operace (jistá zobrazení, viz dále) nazývané **sčítání** a **násobení**,

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

splňující známé komutativní, asociativní a distributivní zákony:

$$a + b = b + a, \qquad a \cdot b = b \cdot a,$$
$$(a + b) + c = a + (b + c), \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$$
$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c), \qquad \text{pro každé } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

V reálných číslech máme k dispozici čísla $0$ a $1$ splňující

$$0 + a = a + 0 = a, \text{ pro lib. } a \in \mathbb{R}, \quad 1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \text{ pro lib. nenulové } a \in \mathbb{R}.$$

Pro každé $a \in \mathbb{R}$ existuje $-a \in \mathbb{R}$ splňující $a + (-a) = -a + a = 0$.
Pro každé nenulové $a \in \mathbb{R}$ existuje $a^{-1} = \frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ splňující $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

# Reálná čísla

Na množině reálných čísel existují dvě významné binární operace (jistá zobrazení, viz dále) nazývané **sčítání** a **násobení**,

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{a} \quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

splňující známé komutativní, asociativní a distributivní zákony:

$$a + b = b + a, \qquad a \cdot b = b \cdot a,$$

$$(a + b) + c = a + (b + c), \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c),$$

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c), \qquad \text{pro každé } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

V reálných číslech máme k dispozici čísla $0$ a $1$ splňující

$$0 + a = a + 0 = a, \text{ pro lib. } a \in \mathbb{R}, \quad 1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \text{ pro lib. nenulové } a \in \mathbb{R}.$$

Pro každé $a \in \mathbb{R}$ existuje $-a \in \mathbb{R}$ splňující $a + (-a) = -a + a = 0$.
Pro každé nenulové $a \in \mathbb{R}$ existuje $a^{-1} = \frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ splňující $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.
Říkáme, že množina reálných čísel s operacemi $+$ a $\cdot$ tvoří tzv. **těleso** (*field*; viz dále BI-LIN).

# Reálná čísla: uspořádání

Reálná čísla lze srovnávat podle velikosti, tj. existuje mezi nimi vztah (relace) **uspořádaní**:

$$a < b \quad (\text{číslo } a \text{ je menší než číslo } b),$$

resp.

$$a \leq b \quad (\text{číslo } a \text{ je menší nebo rovno číslu } b).$$

# Reálná čísla: uspořádání

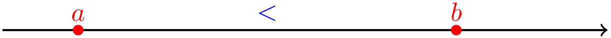
Reálná čísla lze srovnávat podle velikosti, tj. existuje mezi nimi vztah (relace) **uspořádaní**:

$$a < b \quad \text{(číslo } a \text{ je menší než číslo } b\text{)},$$

resp.

$$a \leq b \quad \text{(číslo } a \text{ je menší nebo rovno číslu } b\text{)}.$$

Díky tomuto uspořádání si reálná čísla geometricky představujeme jako body na přímce (tzv. reálná osa).



# Reálná čísla: uspořádání

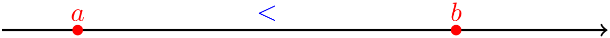
Reálná čísla lze srovnávat podle velikosti, tj. existuje mezi nimi vztah (relace) **uspořádaní**:

$$a < b \quad (\text{číslo } a \text{ je menší než číslo } b),$$

resp.

$$a \leq b \quad (\text{číslo } a \text{ je menší nebo rovno číslu } b).$$

Díky tomuto uspořádání si reálná čísla geometricky představujeme jako body na přímce (tzv. reálná osa).




Relace uspořádání je svázána s operací sčítání a násobení známými pravidly pro **počítání s nerovnicemi**. Připomeňme je zde explicitně:

$$\begin{aligned} a < b,\ c > 0 \quad &\Rightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c, \\ a < b,\ c < 0 \quad &\Rightarrow \quad a \cdot c > b \cdot c. \end{aligned}$$

# Reálná čísla: intervaly

Pomocí uspořádání definujeme speciální podmnožiny množiny $\mathbb{R}$, a to **intervaly**. Pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, klademe:

| | |
|---|---|
| otevřený interval | $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, |
| uzavřený interval | $\langle a, b\rangle := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, |
| polootevřený (polouzavřený) interval | $\langle a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, |
| analogicky | $(a, b\rangle := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$. |

# Reálná čísla: intervaly

Pomocí uspořádání definujeme speciální podmnožiny množiny $\mathbb{R}$, a to **intervaly**. Pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, klademe:

| | |
|---|---|
| otevřený interval | $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, |
| uzavřený interval | $\langle a,b\rangle := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, |
| polootevřený (polouzavřený) interval | $\langle a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, |
| analogicky | $(a,b\rangle := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$. |

A **neomezené intervaly**

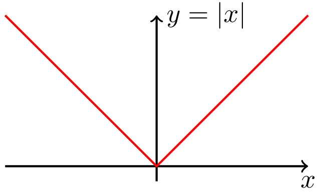
$$(c,+\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid c < x\},$$
$$(-\infty,c\rangle := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq c\}, \quad \text{atd.}$$

Ve všech těchto intervalech je $a$ tzv. **počáteční** bod a $b$ tzv. **koncový** bod příslušného intervalu.

# Reálná čísla: absolutní hodnota

Zavádíme **absolutní hodnotu** reálného čísla $a$ předpisem

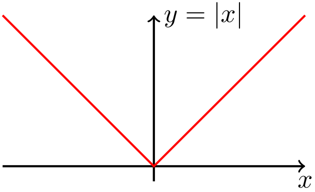
$$|a| := \begin{cases} a, & \text{pro } a \geq 0, \\ -a, & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$



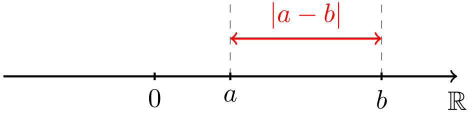
# Reálná čísla: absolutní hodnota

Zavádíme **absolutní hodnotu** reálného čísla $a$ předpisem

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{pro } a \geq 0, \\ -a, & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$




**Vzdálenost** dvou čísel $a, b \in \mathbb{R}$ je poté rovna $\big|a - b\big| = \big|b - a\big|$.



# Reálná čísla: vlastnosti absolutní hodnoty

Pro libovolná reálná čísla $a, b$ platí

$$|a+b| \leq |a| + |b|, \quad |ab| = |a| \cdot |b|, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \, b \neq 0\,.$$

S uvedenou nerovností se ještě mnohokrát setkáme, nazývá se **trojúhelníková**.

# Reálná čísla: vlastnosti absolutní hodnoty

Pro libovolná reálná čísla $a, b$ platí

$$|a+b| \leq |a| + |b|, \quad |ab| = |a| \cdot |b|, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\, b \neq 0\,.$$

S uvedenou nerovností se ještě mnohokrát setkáme, nazývá se **trojúhelníková**.

**Důkaz trojúhelníkové nerovnosti.**

Mají-li obě čísla $a$ a $b$ stejné znaménko, dostáváme z definice absolutní hodnoty rovnost. Předpokládejme, že $a > 0$ a $b < 0$.

- Je-li $a + b \geq 0$, pak $|a+b| = a + b \leq a - b = |a| + |b|$.
- Je-li $a + b < 0$, pak $|a+b| = -a - b \leq a - b = |a| + |b|$.

Zde jsme využili nerovností $z \leq |z|$ a $-z \leq |z|$ platných pro každé $z \in \mathbb{R}$. $\square$

# Iracionální čísla

- Množina iracionálních čísel je poněkud „magická." Nelze ji popsat nijak jednoduše.

  Z dosavadního studia jistě víte, že racionální čísla $\mathbb{Q}$ i reálná čísla $\mathbb{R}$ splňují vlastnosti **tělesa** uvedená dříve. Čím se tedy liší?

# Iracionální čísla

- Množina iracionálních čísel je poněkud „magická.“ Nelze ji popsat nijak jednoduše.

  Z dosavadního studia jistě víte, že racionální čísla $\mathbb{Q}$ i reálná čísla $\mathbb{R}$ splňují vlastnosti **tělesa** uvedená dříve. Čím se tedy liší?

- **Definovat** iracionální čísla jakožto reálná čísla, která nejsou racionální, převádí problém charakterizace iracionálního čísla na definici reálného čísla.

# Iracionální čísla

- Množina iracionálních čísel je poněkud „magická.“ Nelze ji popsat nijak jednoduše.

  Z dosavadního studia jistě víte, že racionální čísla $\mathbb{Q}$ i reálná čísla $\mathbb{R}$ splňují vlastnosti **tělesa** uvedená dříve. Čím se tedy liší?

- **Definovat** iracionální čísla jakožto reálná čísla, která nejsou racionální, převádí problém charakterizace iracionálního čísla na definici reálného čísla.

- Použijeme-li geometrického znázornění $\mathbb{R}$ jako přímky, pak lze požadovat, aby přímka nebyla nikde přetržená, jinými slovy množina reálných čísel „neobsahuje díry.“

# Iracionální čísla

- Množina iracionálních čísel je poněkud „magická." Nelze ji popsat nijak jednoduše.

  Z dosavadního studia jistě víte, že racionální čísla $\mathbb{Q}$ i reálná čísla $\mathbb{R}$ splňují vlastnosti **tělesa** uvedená dříve. Čím se tedy liší?

- **Definovat** iracionální čísla jakožto reálná čísla, která nejsou racionální, převádí problém charakterizace iracionálního čísla na definici reálného čísla.

- Použijeme-li geometrického znázornění $\mathbb{R}$ jako přímky, pak lze požadovat, aby přímka nebyla nikde přetržená, jinými slovy množina reálných čísel „neobsahuje díry."

- Objasněme tento požadavek na následujícím příkladu.

# Iracionalita $\sqrt{2}$

**Příklad.**

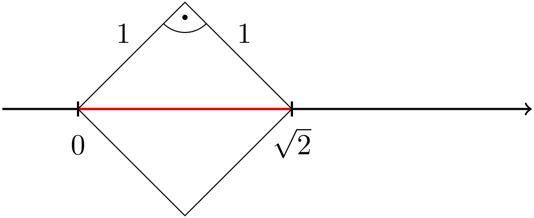
Existuje kladné řešení rovnice $x^2 = 2$, které označujeme symbolem $\sqrt{2}$.

# Iracionalita $\sqrt{2}$

**Příklad.**

Existuje kladné řešení rovnice $x^2 = 2$, které označujeme symbolem $\sqrt{2}$.

- Motivací, či geometrickou interpretací, této úlohy může být problém nalezení délky úhlopříčky ve čtverci o straně délky $1$.

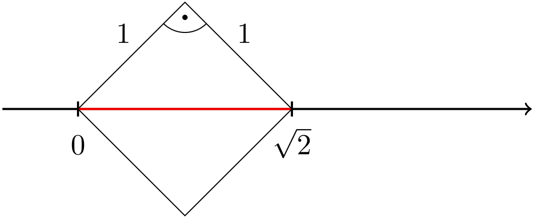


# Iracionalita $\sqrt{2}$

**Příklad.**

Existuje kladné řešení rovnice $x^2 = 2$, které označujeme symbolem $\sqrt{2}$.

- Motivací, či geometrickou interpretací, této úlohy může být problém nalezení délky úhlopříčky ve čtverci o straně délky $1$.



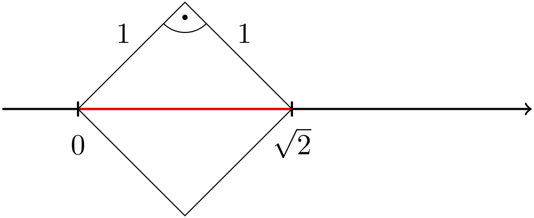

- Dokažme (pomocí sporu na tabuli), že takovéto $x$ nemůže být racionální číslo.

# Iracionalita $\sqrt{2}$

**Příklad.**

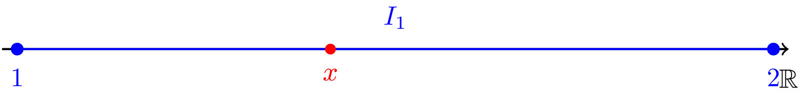
Existuje kladné řešení rovnice $x^2 = 2$, které označujeme symbolem $\sqrt{2}$.

- Motivací, či geometrickou interpretací, této úlohy může být problém nalezení délky úhlopříčky ve čtverci o straně délky $1$.



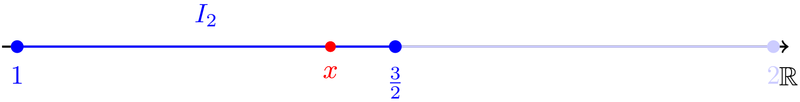

- Dokažme (pomocí sporu na tabuli), že takovéto $x$ nemůže být racionální číslo.
- Pravý koncový bod výše zkonstruované červené úsečky odpovídá číslu $x$, které není racionální. Jak zformulovat obecný požadavek „bezděrovosti“ reálné osy?

# Iracionalita $\sqrt{2}$



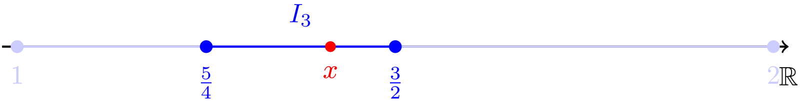

- Určitě musí být $x \in I_1 := \langle 1, 2 \rangle$.

# Iracionalita $\sqrt{2}$




- Určitě musí být $x \in I_1 := \langle 1, 2 \rangle$.
- Rozpůlením intervalu $I_1$ zjistíme, že $x \in I_2 := \langle 1, \frac{3}{2} \rangle$.

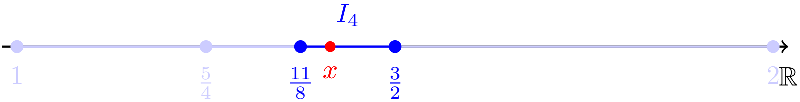
# Iracionalita $\sqrt{2}$




- Určitě musí být $x \in I_1 := \langle 1, 2 \rangle$.
- Rozpůlením intervalu $I_1$ zjistíme, že $x \in I_2 := \langle 1, \frac{3}{2} \rangle$.
- Pokračujeme nadále půlením intervalů. Protože konce intervalů jsou racionální čísla lze postup libovolně opakovat a dostáváme tak intervaly $I_n$, $n \in \mathbb{N}$, uvnitř kterých musí ležet $x$. Pro tyto intervaly je $I_{n+1} \subset I_n$ a délka $n$-tého intervalu je $\frac{1}{2^{n-1}}$. Náš požadavek, aby reálná osa neměla díru v bodě $x = \sqrt{2}$ v tomto případě znamená, že

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = \left\{ \sqrt{2} \right\}.$$

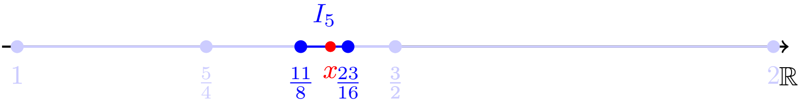
# Iracionalita $\sqrt{2}$




- Určitě musí být $x \in I_1 := \langle 1, 2 \rangle$.
- Rozpůlením intervalu $I_1$ zjistíme, že $x \in I_2 := \langle 1, \frac{3}{2} \rangle$.
- Pokračujeme nadále půlením intervalů. Protože konce intervalů jsou racionální čísla lze postup libovolně opakovat a dostáváme tak intervaly $I_n$, $n \in \mathbb{N}$, uvnitř kterých musí ležet $x$. Pro tyto intervaly je $I_{n+1} \subset I_n$ a délka $n$-tého intervalu je $\frac{1}{2^{n-1}}$. Náš požadavek, aby reálná osa neměla díru v bodě $x = \sqrt{2}$ v tomto případě znamená, že

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = \left\{ \sqrt{2} \right\}.$$

# Iracionalita $\sqrt{2}$




- Určitě musí být $x \in I_1 := \langle 1, 2 \rangle$.
- Rozpůlením intervalu $I_1$ zjistíme, že $x \in I_2 := \langle 1, \frac{3}{2} \rangle$.
- Pokračujeme nadále půlením intervalů. Protože konce intervalů jsou racionální čísla lze postup libovolně opakovat a dostáváme tak intervaly $I_n$, $n \in \mathbb{N}$, uvnitř kterých musí ležet $x$. Pro tyto intervaly je $I_{n+1} \subset I_n$ a délka $n$-tého intervalu je $\frac{1}{2^{n-1}}$. Náš požadavek, aby reálná osa neměla díru v bodě $x = \sqrt{2}$ v tomto případě znamená, že

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = \left\{ \sqrt{2} \right\}.$$

# Axiom úplnosti

Požadavek aby množina reálných čísel „neměla díry“ můžeme přesně formulovat jako tzv. **axiom úplnosti**.

# Axiom úplnosti

Požadavek aby množina reálných čísel „neměla díry“ můžeme přesně formulovat jako tzv. **axiom úplnosti**.

> *Každý smršťující se systém uzavřených intervalů, jejichž délky jsou libovolně malé, má neprázdný průnik.*

# Axiom úplnosti

Požadavek aby množina reálných čísel „neměla díry“ můžeme přesně formulovat jako tzv. **axiom úplnosti**.

> *Každý smršťující se systém uzavřených intervalů, jejichž délky jsou libovolně malé, má neprázdný průnik.*

Přesněji, pokud jsou $I_n$, $n = 1, 2, \ldots$, uzavřené intervaly splňující

- $I_n \supset I_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$,
- pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n$ tak, že délka $I_n$ je menší než $\varepsilon$,

pak

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset.$$

# Axiom úplnosti

Požadavek aby množina reálných čísel „neměla díry“ můžeme přesně formulovat jako tzv. **axiom úplnosti**.

> *Každý smršťující se systém uzavřených intervalů, jejichž délky jsou libovolně malé, má neprázdný průnik.*

Přesněji, pokud jsou $I_n$, $n = 1, 2, \ldots$, uzavřené intervaly splňující

- $I_n \supset I_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$,
- pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n$ tak, že délka $I_n$ je menší než $\varepsilon$,

pak

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset.$$

**$\mathbb{R}$ vs. $\mathbb{Q}$**

Množina $\mathbb{R}$ reálných čísel axiom úplnosti splňuje. Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ ho nesplňuje.
V jistém smyslu je čísel v $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ podstatně více než v $\mathbb{Q}$!

# Hlavní body

$\mathbb{R}$

1. Množina reálných čísel

$\mathbb{N}$

2. Zobrazení
3. Reálná funkce reálné proměnné

$f : A \to B$

# Zobrazení

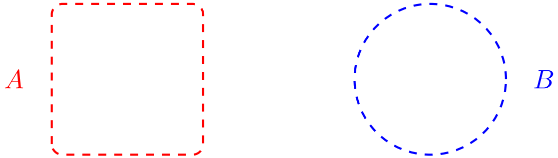
**Zobrazení** patří mezi ústřední matematické objekty. Funkce, posloupnosti, pole (v programátorském smyslu), matice, permutace, binární operace, to vše jsou *příklady* zobrazení.

# Zobrazení

**Zobrazení** patří mezi ústřední matematické objekty. Funkce, posloupnosti, pole (v programátorském smyslu), matice, permutace, binární operace, to vše jsou *příklady* zobrazení.

**Definice (Zobrazení / *mapping*, *map*):**

Nechť jsou dány dvě množiny $A$, $B$ a předpokládejme, že ke každému prvku $x$ z množiny $A$ je *jednoznačným způsobem* přiřazen právě jeden prvek z množiny $B$, který označíme $f(x)$. Potom říkáme, že $f$ je **zobrazení množiny** $A$ **do množiny** $B$, a tento fakt značíme zápisem $f : A \to B$. Množinu $A$ nazýváme **definičním oborem** zobrazení $f$.

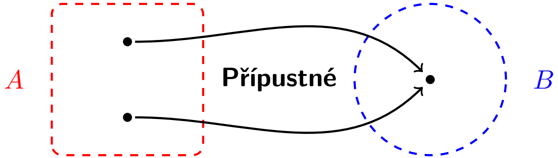


# Zobrazení

**Zobrazení** patří mezi ústřední matematické objekty. Funkce, posloupnosti, pole (v programátorském smyslu), matice, permutace, binární operace, to vše jsou *příklady* zobrazení.

**Definice (Zobrazení / *mapping*, *map*):**

Nechť jsou dány dvě množiny $A$, $B$ a předpokládejme, že ke každému prvku $x$ z množiny $A$ je *jednoznačným způsobem* přiřazen právě jeden prvek z množiny $B$, který označíme $f(x)$. Potom říkáme, že $f$ je **zobrazení množiny** $A$ **do množiny** $B$, a tento fakt značíme zápisem $f : A \to B$. Množinu $A$ nazýváme **definičním oborem** zobrazení $f$.

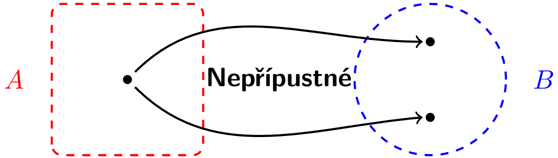


# Zobrazení

**Zobrazení** patří mezi ústřední matematické objekty. Funkce, posloupnosti, pole (v programátorském smyslu), matice, permutace, binární operace, to vše jsou *příklady* zobrazení.

**Definice (Zobrazení / *mapping*, *map*):**

Nechť jsou dány dvě množiny $A$, $B$ a předpokládejme, že ke každému prvku $x$ z množiny $A$ je *jednoznačným způsobem* přiřazen právě jeden prvek z množiny $B$, který označíme $f(x)$. Potom říkáme, že $f$ je **zobrazení množiny** $A$ **do množiny** $B$, a tento fakt značíme zápisem $f : A \to B$. Množinu $A$ nazýváme **definičním oborem** zobrazení $f$.



# Terminologie spojená se zobrazeními

Buď $f : A \to B$ zobrazení a nechť $y = f(x)$ pro $x \in A$, $y \in B$.

# Terminologie spojená se zobrazeními

Buď $f : A \to B$ zobrazení a nechť $y = f(x)$ pro $x \in A$, $y \in B$.

- Prvek $y$ nazýváme **hodnota** $f$ v **bodě** $x$, nebo **obraz** $x$ při zobrazení $f$.

# Terminologie spojená se zobrazeními

Buď $f : A \to B$ zobrazení a nechť $y = f(x)$ pro $x \in A$, $y \in B$.

- Prvek $y$ nazýváme **hodnota** $f$ v **bodě** $x$, nebo **obraz** $x$ při zobrazení $f$.
- Prvku $x$ říkáme **vzor** prvku $y$ při zobrazení $f$.

# Terminologie spojená se zobrazeními

Buď $f : A \to B$ zobrazení a nechť $y = f(x)$ pro $x \in A$, $y \in B$.

- Prvek $y$ nazýváme **hodnota** $f$ v **bodě** $x$, nebo **obraz** $x$ při zobrazení $f$.
- Prvku $x$ říkáme **vzor** prvku $y$ při zobrazení $f$.
- **Definiční obor** zobrazení $f$, tedy množinu $A$ značíme též symbolem $D_f$ nebo $D(f)$.

# Terminologie spojená se zobrazeními

Buď $f : A \to B$ zobrazení a nechť $y = f(x)$ pro $x \in A$, $y \in B$.

- Prvek $y$ nazýváme **hodnota** $f$ v **bodě** $x$, nebo **obraz** $x$ při zobrazení $f$.
- Prvku $x$ říkáme **vzor** prvku $y$ při zobrazení $f$.
- **Definiční obor** zobrazení $f$, tedy množinu $A$ značíme též symbolem $D_f$ nebo $D(f)$.
- Množina všech obrazů při zobrazení $f$ se nazývá **obor hodnot** zobrazení $f$ a značí se $H_f$. Tedy

$$H_f = \big\{ y \in B \,\big|\, \text{existuje } x \in A \text{ splňující } y = f(x) \big\}.$$

# Terminologie spojená se zobrazeními

Buď $f : A \to B$ zobrazení a nechť $y = f(x)$ pro $x \in A$, $y \in B$.

- Prvek $y$ nazýváme **hodnota** $f$ v **bodě** $x$, nebo **obraz** $x$ při zobrazení $f$.
- Prvku $x$ říkáme **vzor** prvku $y$ při zobrazení $f$.
- **Definiční obor** zobrazení $f$, tedy množinu $A$ značíme též symbolem $D_f$ nebo $D(f)$.
- Množina všech obrazů při zobrazení $f$ se nazývá **obor hodnot** zobrazení $f$ a značí se $H_f$. Tedy

$$H_f = \left\{ y \in B \,\middle|\, \text{existuje } x \in A \text{ splňující } y = f(x) \right\}.$$

**Častý omyl**

Mějme $f : A \to B$. Množina $B$ nutně není oborem hodnot!

# Terminologie spojená se zobrazeními

Buď $f : A \to B$ zobrazení a nechť $y = f(x)$ pro $x \in A$, $y \in B$.

- Prvek $y$ nazýváme **hodnota** $f$ v **bodě** $x$, nebo **obraz** $x$ při zobrazení $f$.
- Prvku $x$ říkáme **vzor** prvku $y$ při zobrazení $f$.
- **Definiční obor** zobrazení $f$, tedy množinu $A$ značíme též symbolem $D_f$ nebo $D(f)$.
- Množina všech obrazů při zobrazení $f$ se nazývá **obor hodnot** zobrazení $f$ a značí se $H_f$. Tedy

$$H_f = \{y \in B \,\big|\, \text{existuje } x \in A \text{ splňující } y = f(x)\}.$$

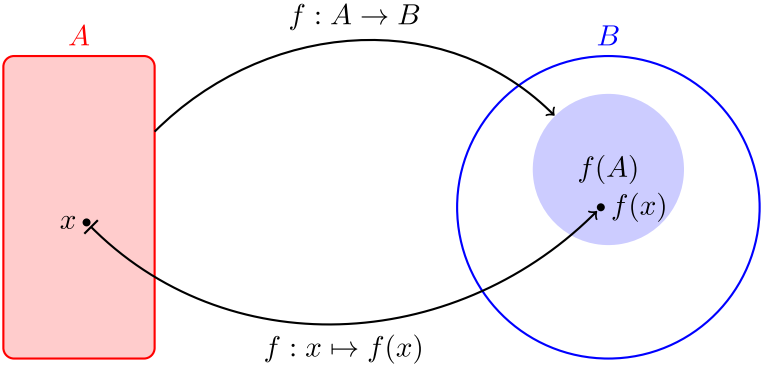
**Častý omyl**

Mějme $f : A \to B$. Množina $B$ nutně není oborem hodnot!

**Definice (Rovnost zobrazení):**

Dvě zobrazení $f : A \to B$ a $g : A \to B$ jsou si rovny, píšeme $f = g$, právě když $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in A = D_f = D_g$.

# Zobrazení: ilustrace



# Zúžení, vzor a obraz množiny

Buď $f : A \to B$.

- Zobrazení $g : E \to B$, $E \subset D_f = A$, definované předpisem $g(x) := f(x)$ pro libovolné $x \in E$ nazýváme **zúžením zobrazení $f$ na množinu $E$**. Zapisujeme $g = f\big|_E$.

# Zúžení, vzor a obraz množiny

Buď $f : A \to B$.

- Zobrazení $g : E \to B$, $E \subset D_f = A$, definované předpisem $g(x) := f(x)$ pro libovolné $x \in E$ nazýváme **zúžením zobrazení $f$ na množinu $E$.** Zapisujeme $g = f\big|_E$.
- Množinu

$$f(S) := \big\{ y \in B \,\big|\, \text{existuje } x \in S \text{ splňující } f(x) = y \big\},$$

kde $S \subset A$, nazveme **obrazem množiny $S$ při zobrazení $f$**.

# Zúžení, vzor a obraz množiny

Buď $f : A \to B$.

- Zobrazení $g : E \to B$, $E \subset D_f = A$, definované předpisem $g(x) := f(x)$ pro libovolné $x \in E$ nazýváme **zúžením zobrazení** $f$ **na množinu** $E$. Zapisujeme $g = f\big|_E$.
- Množinu

$$f(S) := \big\{ y \in B \,\big|\, \text{existuje } x \in S \text{ splňující } f(x) = y \big\},$$

  kde $S \subset A$, nazveme **obrazem množiny** $S$ **při zobrazení** $f$.
- Je-li $N \subset B$, potom množinu

$$f^{-1}(N) := \big\{ x \in A \,\big|\, \text{existuje } y \in N \text{ splňující } f(x) = y \big\}$$

  nazveme **vzorem množiny** $N$ při zobrazení $f$.

# Zúžení, vzor a obraz množiny

Buď $f : A \to B$.

- Zobrazení $g : E \to B$, $E \subset D_f = A$, definované předpisem $g(x) := f(x)$ pro libovolné $x \in E$ nazýváme **zúžením zobrazení $f$ na množinu $E$**. Zapisujeme $g = f\big|_E$.
- Množinu

$$f(S) := \big\{ y \in B \,\big|\, \text{existuje } x \in S \text{ splňující } f(x) = y \big\},$$

  kde $S \subset A$, nazveme **obrazem množiny $S$ při zobrazení $f$**.
- Je-li $N \subset B$, potom množinu

$$f^{-1}(N) := \big\{ x \in A \,\big|\, \text{existuje } y \in N \text{ splňující } f(x) = y \big\}$$

  nazveme **vzorem množiny $N$** při zobrazení $f$.

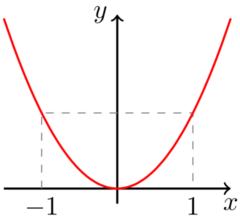
**Poznámka:**

Symbol pro vzor množiny, $f^{-1}(N)$, je nutno chápat jako nedělitelný. Netvrdíme nic o existenci inverzního zobrazení (viz dále).

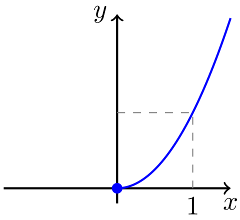
# Zúžení: příklad

Ukažme si příklad zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a jednoho jeho zúžení $g$.

$f(x) := x^2, \;\; D_f := \mathbb{R}$



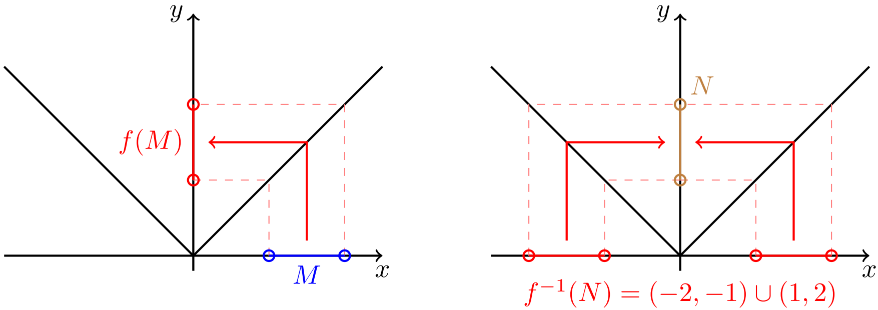

$g(x) := x^2, \;\; D_g := \langle 0, +\infty)$




Zobrazení $f$ a $g$ jsou různá, tj. $f \neq g$. Vzpomeňte si na definici rovnosti zobrazení.

# Vzor a obraz množiny: příklad

Uvažme zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované předpisem $f(x) = |x|$. Nalezněme obraz množiny $M = (1, 2)$ a vzor množiny $N = (1, 2)$ vzhledem k $f$.



# Složené zobrazení

Zobrazení lze skládat a vytvářet tak nová zobrazení.

**Definice (Složené zobrazení):**

Jsou-li $f : A \to B$ a $g : E \to C$ zobrazení, kde $E \subset B$, pak definujeme **složené zobrazení** $g \circ f : D_{g \circ f} \to C$ předpisem

$$(g \circ f)(x) := g\big(f(x)\big)$$

pro všechna

$$x \in D_{g \circ f} := \big\{x \in D_f \,\big|\, f(x) \in D_g\big\} = f^{-1}(E) \subset A.$$

# Složené zobrazení

Zobrazení lze skládat a vytvářet tak nová zobrazení.

## Definice (Složené zobrazení):

Jsou-li $f : A \to B$ a $g : E \to C$ zobrazení, kde $E \subset B$, pak definujeme **složené zobrazení** $g \circ f : D_{g \circ f} \to C$ předpisem

$$(g \circ f)(x) := g\big(f(x)\big)$$

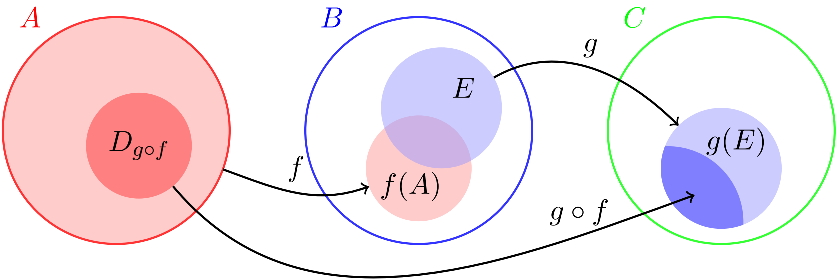
pro všechna

$$x \in D_{g \circ f} := \left\{x \in D_f \,\middle|\, f(x) \in D_g\right\} = f^{-1}(E) \subset A.$$

## Poznámka:

- O $f$ často mluvíme jako o **vnitřním** a o $g$ jako o **vnějším** zobrazení.
- Tedy $D_{g \circ f} \subset D_f$. I v případě, že $D_f \neq \emptyset$ a $D_g \neq \emptyset$ může nastat situace $D_{g \circ f} = \emptyset$ (stačí aby obor hodnot vnitřního zobrazení měl s definičním oborem vnějšího zobrazení prázdný průnik).

# Složené zobrazení: ilustrace



# Důležité druhy zobrazení

Zobrazení $f : A \to B$ je

**Definice:**

- **prosté** (injektivní), jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in D_f$, $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.

# Důležité druhy zobrazení

Zobrazení $f : A \to B$ je

**Definice:**

- **prosté** (injektivní), jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in D_f$, $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- **na** (surjektivní), jestliže pro každé $y \in B$ existuje $x \in D_f$ splňující $f(x) = y$.

# Důležité druhy zobrazení

Zobrazení $f : A \to B$ je

**Definice:**

- **prosté** (injektivní), jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in D_f$, $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- **na** (surjektivní), jestliže pro každé $y \in B$ existuje $x \in D_f$ splňující $f(x) = y$.
- **vzájemně jednoznačné** (bijektivní), jestliže $f$ je prosté a na.

# Důležité druhy zobrazení

Zobrazení $f : A \to B$ je

**Definice:**

- **prosté** (injektivní), jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in D_f$, $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- **na** (surjektivní), jestliže pro každé $y \in B$ existuje $x \in D_f$ splňující $f(x) = y$.
- **vzájemně jednoznačné** (bijektivní), jestliže $f$ je prosté a na.

- Prostotu zobrazení $f : A \to B$ lze ekvivalentně vyjádřit požadavkem

$$(\forall x_1, x_2 \in D_f)\Big(\big(f(x_1) = f(x_2)\big) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2\Big).$$

Slovně řečeno, každý prvek $H_f$ má právě jeden svůj vzor v $D_f$ vzhledem k $f$.

# Důležité druhy zobrazení

Zobrazení $f : A \to B$ je

**Definice:**

- **prosté** (injektivní), jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in D_f$, $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- **na** (surjektivní), jestliže pro každé $y \in B$ existuje $x \in D_f$ splňující $f(x) = y$.
- **vzájemně jednoznačné** (bijektivní), jestliže $f$ je prosté a na.

- Prostotu zobrazení $f : A \to B$ lze ekvivalentně vyjádřit požadavkem

$$(\forall x_1, x_2 \in D_f)\Big(\big(f(x_1) = f(x_2)\big) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2\Big).$$

  Slovně řečeno, každý prvek $H_f$ má právě jeden svůj vzor v $D_f$ vzhledem k $f$.
- $f : A \to B$ je surjektivní, právě když $H_f = B$. Použití slůvka „na“ by tedy mělo být zřejmé (*sur* je „na“ francouzsky).

# Důležité druhy zobrazení

Zobrazení $f : A \to B$ je

**Definice:**

- **prosté** (injektivní), jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in D_f$, $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- **na** (surjektivní), jestliže pro každé $y \in B$ existuje $x \in D_f$ splňující $f(x) = y$.
- **vzájemně jednoznačné** (bijektivní), jestliže $f$ je prosté a na.

- Prostotu zobrazení $f : A \to B$ lze ekvivalentně vyjádřit požadavkem
$$(\forall x_1, x_2 \in D_f)\Big(\big(f(x_1) = f(x_2)\big) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2\Big).$$
Slovně řečeno, každý prvek $H_f$ má právě jeden svůj vzor v $D_f$ vzhledem k $f$.
- $f : A \to B$ je surjektivní, právě když $H_f = B$. Použití slůvka „na“ by tedy mělo být zřejmé (*sur* je „na“ francouzsky).
- Je-li $f : A \to B$ bijekce, pak každému prvku $x \in A$ odpovídá právě jeden prvek množiny $y \in B$ splňující $f(x) = y$, a naopak.

# Příklad

Následující, na první pohled velmi jednoduché, zobrazení se nám bude hodit hned na následujícím slidu.

**Příklad (Identické zobrazení).**

Buď $A$ množina. Zobrazení $\mathrm{id}_A : A \to A$ definované předpisem

$$\mathrm{id}_A(x) := x, \quad x \in D_{\mathrm{id}_A},$$

nazýváme **identické zobrazení** (na množině $A$).

Zobrazení $\mathrm{id}_A$ je injektivní, surjektivní a tedy i bijektivní.

# Inverzní zobrazení

**Definice (Inverzní zobrazení / *inverse mapping*):**

Je-li $f : A \to B$ prosté zobrazení, pak každému prvku $x$ z oboru hodnot $H_f$ *lze přiřadit právě jedno* $y$ z množiny $D_f = A$ tak, že $x = f(y)$. Takto získané zobrazení nazýváme **inverzní** zobrazení k zobrazení $f$ a značíme ho $f^{-1}$.

# Inverzní zobrazení

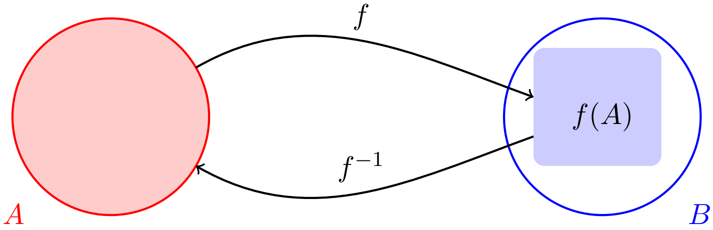
**Definice (Inverzní zobrazení / *inverse mapping*):**

Je-li $f : A \to B$ prosté zobrazení, pak každému prvku $x$ z oboru hodnot $H_f$ *lze přiřadit právě jedno* $y$ z množiny $D_f = A$ tak, že $x = f(y)$. Takto získané zobrazení nazýváme **inverzní** zobrazení k zobrazení $f$ a značíme ho $f^{-1}$.

**Poznámka:**

Z definice ihned plyne, že $f^{-1} : H_f \to A$ a dále

$$D_{f^{-1}} = H_f, \qquad H_{f^{-1}} = D_f, \qquad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{D_f}, \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{H_f}.$$



# Hlavní body

$\mathbb{R}$

1 Množina reálných čísel

$\mathbb{N}$

2 Zobrazení

3 Reálná funkce reálné proměnné

$$f : A \to B$$

# Reálná funkce reálné proměnné

**Definice:**

Zobrazení $f : A \to \mathbb{R}$, kde $A \subset \mathbb{R}$, nazýváme **reálnou funkcí reálné proměnné**.

# Reálná funkce reálné proměnné

**Definice:**

Zobrazení $f : A \to \mathbb{R}$, kde $A \subset \mathbb{R}$, nazýváme **reálnou funkcí reálné proměnné**.

**Poznámka:**

Reálná funkce reálné proměnné je často zadána tzv. **explicitně**. Tedy pomocí předpisu typu $y := f(x)$. **Přirozeným definičním oborem** pak nazýváme množinu všech reálných $x$ pro které má výraz $f(x)$ smysl jakožto reálné číslo.

# Reálná funkce reálné proměnné

**Definice:**

Zobrazení $f : A \to \mathbb{R}$, kde $A \subset \mathbb{R}$, nazýváme **reálnou funkcí reálné proměnné**.

**Poznámka:**

Reálná funkce reálné proměnné je často zadána tzv. **explicitně**. Tedy pomocí předpisu typu $y := f(x)$. **Přirozeným definičním oborem** pak nazýváme množinu všech reálných $x$ pro které má výraz $f(x)$ smysl jakožto reálné číslo.

**Příklad.**

Uvažme výraz $f(x) := \frac{\sqrt{x}}{x-1}$. Přirozeným definičním oborem je množina

$$D_f = \langle 0, 1) \cup (1, +\infty).$$

# Graf funkce

**Grafem** funkce $f$ nazýváme množinu

$$\operatorname{graf} f := \left\{ (x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,\middle|\, x \in D_f \right\}.$$

# Graf funkce

**Grafem** funkce $f$ nazýváme množinu

$$\operatorname{graf} f := \left\{ (x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,\middle|\, x \in D_f \right\}.$$

- O $x$ se také mluví jako o **nezávisle** proměnné. Znázorňujeme ji zpravidla na vodorovné ose a $y = f(x)$ je hodnota funkce $f$ v bodě $x$ (o $y$ mluvíme jako o **závisle** proměnné), která se znázorňuje na svislé ose.

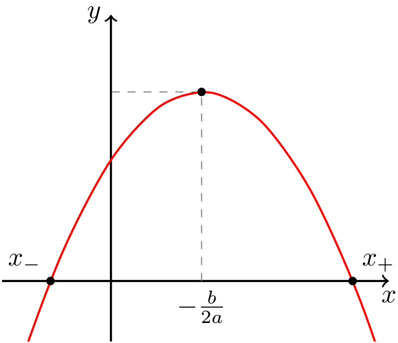
# Graf funkce

**Grafem** funkce $f$ nazýváme množinu

$$\operatorname{graf} f := \left\{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,\middle|\, x \in D_f\right\}.$$

- O $x$ se také mluví jako o **nezávisle** proměnné. Znázorňujeme ji zpravidla na vodorovné ose a $y = f(x)$ je hodnota funkce $f$ v bodě $x$ (o $y$ mluvíme jako o **závisle** proměnné), která se znázorňuje na svislé ose.
- Graf funkce $f$ je podmnožinou kartézského součinu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, který teď chápeme jako rovinu s vyznačeným počátkem (bodem $(0,0)$) a s vodorovnou souřadnou osou
$$\left\{(x, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\right\},$$
a svislou souřadnou osou
$$\left\{(0, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,\middle|\, y \in \mathbb{R}\right\}.$$

# Graf funkce: příklad paraboly




Připomeňme graf paraboly

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Reálné kořeny

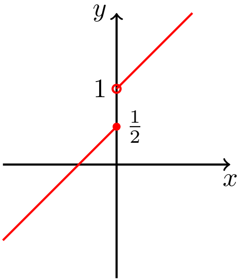
$$x_{\pm} = \frac{1}{2a}\Big( -b \pm \sqrt{D}\Big),$$

pokud $D = b^2 - 4ac \geq 0$.

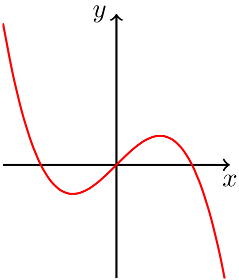
# Příklady funkcí a jejich grafů

**Příklad.**

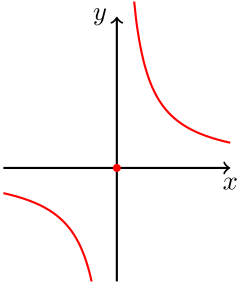
Která z následujících funkcí ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) je prostá, na, či bijekce?




$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \le 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$$




$$f(x) = x\left(1 - x^2\right)$$




$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

## Definice:

Funkci $f$ definovanou na množině $M$ nazýváme

- **rostoucí na množině** $M$, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- **klesající na množině** $M$, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- **ostře rostoucí na množině** $M$, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$.
- **ostře klesající na množině** $M$, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkci, která je rostoucí nebo klesající nazýváme **monotonní**. Funkci, která je ostře rostoucí nebo ostře klesající nazýváme **ryze monotonní**.

## Definice:

Funkci $f$ definovanou na množině $M$ nazýváme

- **rostoucí na množině** $M$, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- **klesající na množině** $M$, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- **ostře rostoucí na množině** $M$, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$.
- **ostře klesající na množině** $M$, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkci, která je rostoucí nebo klesající nazýváme **monotonní**. Funkci, která je ostře rostoucí nebo ostře klesající nazýváme **ryze monotonní**.

Každá ryze monotónní funkce je prostá.

## Definice:

Funkci $f$ definovanou na množině $M$ nazýváme

- **rostoucí na množině** $M$, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- **klesající na množině** $M$, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- **ostře rostoucí na množině** $M$, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$.
- **ostře klesající na množině** $M$, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkci, která je rostoucí nebo klesající nazýváme **monotonní**. Funkci, která je ostře rostoucí nebo ostře klesající nazýváme **ryze monotonní**.

Každá ryze monotónní funkce je prostá.

## Příklad.

Příkladem rostoucí funkce na $\mathbb{R}$ je $x^3$ (a také $\sqrt[3]{x}$). Funkce $f(x) = x^2$ není na $\mathbb{R}$ ani rostoucí ani klesající, ale je klesající na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ a rostoucí na intervalu $\langle 0, +\infty)$.

# Hlavní body

$\mathbb{R}$

4 Dodatek

$\mathbb{N}$

$f : A \to B$

# Komentář

- Předpokládáme, že studenti a studentky se orientují mezi **elementárními funkcemi** a jejich vlastnostmi (polynomy, racionální lomené, trigonometrické, exponenciální). Tuto látku si můžete případně osvěžit v BI-PKM.

- Látka obsažená v této prezentaci je dále podrobně vysvětlena ve studijním textu.

- Příklady k procvičování této látky lze nalézt v první BI-ZMA lekci na MARASTu a v cvičebnici tamtéž.