Základy matematické analýzy

Číselné řady a Eulerovo číslo

Pavel Hrabák[1], Tomáš Kalvoda[2], Ivo Petr[3]

[1]pavel.hrabak@fit.cvut.cz [2]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [3]ivo.petr@fit.cvut.cz,

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

4. března 2021
ZS 2020/2021

Hlavní body

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

1. Číselné řady

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

2. Exponenciální funkce a Eulerovo číslo

3. Logaritmus a obecná mocnina

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

$$\ln x$$

Hlavní body

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

1. Číselné řady

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

2. Exponenciální funkce a Eulerovo číslo

3. Logaritmus a obecná mocnina

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

$$\ln x$$

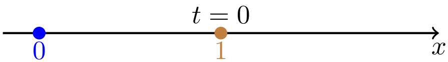
Zenonův paradox: Achilles a želva

historje.tumblr.com

Zenonův paradox: Achilles a želva

historje.tumblr.com

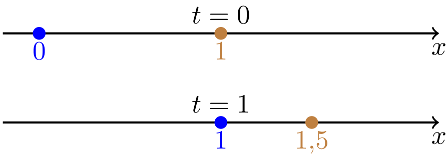
Achilles je dvakrát rychlejší než (závodní) želva s rychlostí $0{,}5\,m/s$, želva má náskok $1\,m$.



Zenonův paradox: Achilles a želva

historje.tumblr.com

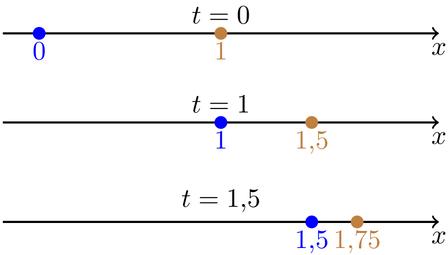
Achilles je dvakrát rychlejší než (závodní) želva s rychlostí $0{,}5\,m/s$, želva má náskok $1\,m$.



Zenonův paradox: Achilles a želva

historje.tumblr.com

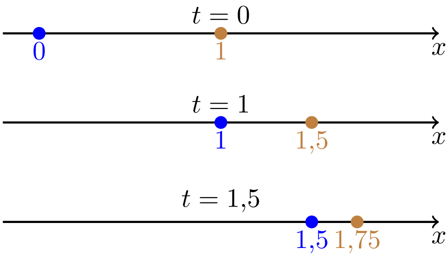
Achilles je dvakrát rychlejší než (závodní) želva s rychlostí $0{,}5\,m/s$, želva má náskok $1\,m$.



Zenonův paradox: Achilles a želva

historje.tumblr.com

Achilles je dvakrát rychlejší než (závodní) želva s rychlostí $0{,}5\,m/s$, želva má náskok $1\,m$.



Ergo, Achilles želvu nikdy nedohoní.

Časové okamžiky a polohy Achilla a želvy:

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k+1}, \quad a_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k+1}, \quad z_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k}.$$

Číselná řada

Definice (Číselná řada / *number series*):

Formální výraz tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

nazýváme **číselnou řadou**.

Číselná řada

Definice (Číselná řada / *number series*):

Formální výraz tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

nazýváme **číselnou řadou**. Pokud je posloupnost **částečných součtů**

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

konvergentní, nazýváme příslušnou řadu také **konvergentní**. V opačném případě mluvíme o **divergentní** číselné řadě.

Číselná řada

Definice (Číselná řada / *number series*):

Formální výraz tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

nazýváme **číselnou řadou**. Pokud je posloupnost **částečných součtů**

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

konvergentní, nazýváme příslušnou řadu také **konvergentní**. V opačném případě mluvíme o **divergentní** číselné řadě. **Součtem** konvergentní řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nazýváme hodnotu limity $\lim_{n\to\infty} s_n$.

Příklad

Příklad.

Pro $|q| < 1$ řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots$$

konverguje a jejím součtem je $\frac{1}{1-q}$.

Příklad

Příklad.

Pro $|q| < 1$ řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots$$

konverguje a jejím součtem je $\frac{1}{1-q}$.

Členy posloupnosti částečných součtů lze přímo sečíst,

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \qquad \text{(platí pro lib. } q \neq 1\text{)}$$

Takže pro $|q| < 1$ dostáváme $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-q}$. Píšeme také

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}\,, \quad |q| < 1\,.$$

Příklad: zpět k Achillovi a želvě

V čase t_n je Achilles a_n metrů od startu a želva z_n metrů od startu,

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k+1}, \quad a_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k+1}, \quad z_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k}.$$

Příklad: zpět k Achillovi a želvě

V čase t_n je Achilles a_n metrů od startu a želva z_n metrů od startu,

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k+1}, \quad a_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k+1}, \quad z_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k}.$$

Dle předchozího příkladu víme

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} = \frac{1}{1-1/2} = 2,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} = 2,$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2.$$

Příklad: zpět k Achillovi a želvě

V čase t_n je Achilles a_n metrů od startu a želva z_n metrů od startu,

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k+1}, \quad a_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k+1}, \quad z_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k}.$$

Dle předchozího příkladu víme

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} = \frac{1}{1-1/2} = 2,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} = 2,$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2.$$

Achilles proto želvu **doběhne** za 2 sekundy 2 metry od startu!

Nutná podmínka konvergence řady

Následující větu lze použít k **vyvrácení** konvergence řady.

Věta (Nutná podmínka konvergence řady):

Pokud řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konverguje, **potom** pro limitu sčítanců platí $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$.

Nutná podmínka konvergence řady

Následující větu lze použít k **vyvrácení** konvergence řady.

Věta (Nutná podmínka konvergence řady):

Pokud řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konverguje, **potom** pro limitu sčítanců platí $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Důkaz.

Označme $S \in \mathbb{R}$ součet naší konvergentní řady. Pro libovolné kladné celé n platí

$$0 \leq |a_n| = |s_n - s_{n-1}| = |s_n - S + S - s_{n-1}| \leq |s_n - S| + |S - s_{n-1}|.$$

Protože $S = \lim_{n\to\infty} s_n$ dostáváme z věty o sevřené posloupnosti $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. □

Nutná podmínka konvergence

Předchozí podmínka je **pouze** nutná, jak demonstruje následující příklad.

Příklad.

Uvažme řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}},$$

tedy $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$, pro $k = 1, 2, \ldots$. Víme již, že platí

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

Ale pro částečné součty je

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Proto $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$. Zkoumaná řada diverguje.

Bolzanovo–Cauchyovo kritérium

Věta (Bolzano–Cauchy):

Řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konverguje právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{R}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ a $p \in \mathbb{N}$ platí

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Bolzanovo–Cauchyovo kritérium

Věta (Bolzano–Cauchy):

Řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konverguje právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{R}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ a $p \in \mathbb{N}$ platí

$$\left| a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} \right| < \varepsilon.$$

Důkaz.

Jedná se pouze o použití Bolzanova–Cauchyova kritéria konvergence na posloupnost částečných součtů příslušné řady a přeznačení některých symbolů. $\square$

Absolutní konvergence

Definice:

Řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nazýváme **absolutně konvergentní**, pokud řada $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konverguje.

Absolutní konvergence

Definice:

Řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nazýváme **absolutně konvergentní**, pokud řada $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konverguje.

Věta:

Pokud řada absolutně konverguje, potom konverguje.

Absolutní konvergence

Definice:

Řadu $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nazýváme **absolutně konvergentní**, pokud řada $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konverguje.

Věta:

Pokud řada absolutně konverguje, potom konverguje.

Důkaz.

Použijeme Bolzanova-Cauchyova kritéria pro konvergenci řady. Buď $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolutně konvergentní řada. Potom pro $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ a $p \in \mathbb{N}$ je podle trojúhelníkové nerovnosti

$$\left|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}\right| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ tedy konverguje. $\square$

Postačující podmínky konvergence

Věta (Leibnizovo kritérium):

Buď $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ monotónní posloupnost konvergující k nule. Potom řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

konverguje.

Postačující podmínky konvergence

Věta (Leibnizovo kritérium):

Buď $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ monotónní posloupnost konvergující k nule. Potom řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

konverguje.

Důkaz.

Důkaz tohoto kritéria vynecháváme (jedná se o speciální případ Dirichletova kritéria; samostatný důkaz je uveden ve studijním textu). □

Postačující podmínky konvergence

Věta (Leibnizovo kritérium):

Buď $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ monotónní posloupnost konvergující k nule. Potom řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

konverguje.

Důkaz.

Důkaz tohoto kritéria vynecháváme (jedná se o speciální případ Dirichletova kritéria; samostatný důkaz je uveden ve studijním textu). $\square$

Příklad.

Podle Leibnizova kritéria je řada $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ konvergentní. Ale není absolutně konvergentní. Z dřívější přednášky již víme, že $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverguje.

Postačující podmínky konvergence

Věta (Srovnávací kritérium):

Buďte $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ číselné řady. Potom platí následující dvě tvrzení.

1. Nechť existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ větší než k_0 platí odhad $0 \leq |a_k| \leq b_k$ a nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolutně konverguje.
2. Nechť existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ větší než k_0 platí odhad $0 \leq a_k \leq b_k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje. Potom i řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverguje.

Postačující podmínky konvergence

Věta (Srovnávací kritérium):

Buďte $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ číselné řady. Potom platí následující dvě tvrzení.

1. Nechť existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ větší než k_0 platí odhad $0 \leq |a_k| \leq b_k$ a nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguje. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolutně konverguje.
2. Nechť existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ větší než k_0 platí odhad $0 \leq a_k \leq b_k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje. Potom i řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverguje.

Důkaz.

První bod: opět použijeme Bolzanova–Cauchyova kritéria. Lze postupovat shodně jako v důkazu předchozí věty. Tvrzení plyne z následujícího odhadu.

$$\big||a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}|\big| = |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| \leq b_n + b_{n+1} + \cdots b_{n+p}.$$

Druhý bod plyne z nerovnosti $0 \leq \sum_{k=k_0}^{n} a_k \leq \sum_{k=k_0}^{n} b_k$. □

Příklad

Příklad (Desetinný rozvoj).

Buď $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ posloupnost jejíž členy nabývají hodnot z množiny $\{0, 1, \ldots, 8, 9\}$. Potom klademe

$$0.a_1 a_2 a_3 \cdots := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}.$$

Příklad

Příklad (Desetinný rozvoj).

Buď $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ posloupnost jejíž členy nabývají hodnot z množiny $\{0, 1, \ldots, 8, 9\}$. Potom klademe

$$0.a_1a_2a_3\cdots := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}.$$

Řada konverguje a její součet jednoznačně definuje jisté reálné číslo.

Příklad

Příklad (Desetinný rozvoj).

Buď $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ posloupnost jejíž členy nabývají hodnot z množiny $\{0, 1, \ldots, 8, 9\}$. Potom klademe

$$0.a_1 a_2 a_3 \cdots := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}.$$

Řada konverguje a její součet jednoznačně definuje jisté reálné číslo.

Konvergence plyne ze srovnávacího kritéria, zřejmě

$$a_k \cdot 10^{-k} \leq 9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^k.$$

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$ konverguje, její součet je $\frac{1}{9}$.

Příklad

Příklad (Desetinný rozvoj).

Buď $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ posloupnost jejíž členy nabývají hodnot z množiny $\{0, 1, \ldots, 8, 9\}$. Potom klademe

$$0.a_1 a_2 a_3 \cdots := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}.$$

Řada konverguje a její součet jednoznačně definuje jisté reálné číslo.

Konvergence plyne ze srovnávacího kritéria, zřejmě

$$a_k \cdot 10^{-k} \leq 9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^k.$$

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$ konverguje, její součet je $\frac{1}{9}$.
Speciálně například

$$0.999\overline{9} = \sum_{k=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 1.$$

Postačující podmínky konvergence

Věta (d'Alembertovo kritérium / *ratio test for series*):

Nechť $a_k > 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Potom platí dvě následující tvrzení:

1. Pokud
$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1,$$
pak řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverguje.
2. Pokud
$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1,$$
pak řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ (absolutně) konverguje.

Postačující podmínky konvergence

Důkaz.

První bod: Z podílového kritéria aplikovaného na posloupnost $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ plyne

$$\lim_{k\to\infty} a_k = +\infty.$$

Není proto splněna nutná podmínka konvergence a řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ proto diverguje.

Postačující podmínky konvergence

Důkaz.

První bod: Z podílového kritéria aplikovaného na posloupnost $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ plyne

$$\lim_{k\to\infty} a_k = +\infty.$$

Není proto splněna nutná podmínka konvergence a řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ proto diverguje.
Druhý bod: Dle předpokladu existuje $r < 1$ a $k_0 \in \mathbb{N}$ pro něž platí

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq r < 1, \quad k \geq k_0.$$

Postačující podmínky konvergence

Důkaz.

První bod: Z podílového kritéria aplikovaného na posloupnost $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ plyne

$$\lim_{k\to\infty} a_k = +\infty.$$

Není proto splněna nutná podmínka konvergence a řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ proto diverguje.
Druhý bod: Dle předpokladu existuje $r < 1$ a $k_0 \in \mathbb{N}$ pro něž platí

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq r < 1, \quad k \geq k_0.$$

Odtud nahlédneme, že pro každé $k \geq k_0$ platí

$$a_k \leq r^{k-k_0} a_{k_0}.$$

Postačující podmínky konvergence

Důkaz.

První bod: Z podílového kritéria aplikovaného na posloupnost $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ plyne

$$\lim_{k\to\infty} a_k = +\infty.$$

Není proto splněna nutná podmínka konvergence a řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ proto diverguje.
Druhý bod: Dle předpokladu existuje $r < 1$ a $k_0 \in \mathbb{N}$ pro něž platí

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq r < 1, \quad k \geq k_0.$$

Odtud nahlédneme, že pro každé $k \geq k_0$ platí

$$a_k \leq r^{k-k_0} a_{k_0}.$$

Už ale víme, že řada $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ konverguje pro $|r| < 1$. Podle srovnávacího kritéria tedy konverguje i řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. □

Hlavní body

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

1 Číselné řady

2 Exponenciální funkce a Eulerovo číslo

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

3 Logaritmus a obecná mocnina

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

$$\ln x$$

Exponenciální funkce

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ uvažme řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

Exponenciální funkce

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ uvažme řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

Tato řada jistě (absolutně) konverguje pro $x = 0$. Pro ostatní x platí

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right|}{\left|\frac{x^k}{k!}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|}{k+1} = 0 < 1.$$

Podle d'Alembertova kritéria proto řada (absolutně) konverguje.

Exponenciální funkce

Díky předchozímu slidu má následující definice dobrý smysl.

Exponenciální funkce

Díky předchozímu slidu má následující definice dobrý smysl.

Definice (Exponenciální funkce):

Zobrazení, které každému $x \in \mathbb{R}$ přiřadí součet řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

nazýváme **Exponenciální funkcí**. Její funkční hodnotu pro zadaná $x \in \mathbb{R}$ značíme symbolem e^x.

Exponenciální funkce

Díky předchozímu slidu má následující definice dobrý smysl.

Definice (Exponenciální funkce):

Zobrazení, které každému $x \in \mathbb{R}$ přiřadí součet řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

nazýváme **Exponenciální funkcí**. Její funkční hodnotu pro zadaná $x \in \mathbb{R}$ značíme symbolem e^x.

O „exponenciální funkci“ budeme také často zkráceně mluvit jako o „exponenciále“.

Exponenciální funkce

Věta (Základní vlastnosti exponenciální funkce):

Exponenciální funkce má následující vlastnosti:

1. $e^0 = 1$,
2. pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí $e^{x+y} = e^x e^y$,
3. pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $e^x \neq 0$ a dále $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$,
4. exponenciála je ostře rostoucí funkce, pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ splňující nerovnost $x < y$ platí nerovnost $e^x < e^y$.

Exponenciální funkce

Věta (Základní vlastnosti exponenciální funkce):

Exponenciální funkce má následující vlastnosti:

1. $e^0 = 1$,
2. pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí $e^{x+y} = e^x e^y$,
3. pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $e^x \neq 0$ a dále $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$,
4. exponenciála je ostře rostoucí funkce, pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ splňující nerovnost $x < y$ platí nerovnost $e^x < e^y$.

Důkaz bodu *1*.

Plyne přímo z dosazení $x = 0$ do definičního vztahu,

$$e^0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1.$$

$\square$

Exponenciální funkce

Důkaz bodu 2.

Uvažme $x, y \in \mathbb{R}$. Potom

$$e^x \cdot e^y = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{y^\ell}{\ell!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{k} \frac{x^\ell}{\ell!} \frac{y^{k-\ell}}{(k-\ell)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} x^\ell y^{k-\ell} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = e^{x+y}. \qquad \square$$

Exponenciální funkce

Důkaz bodu *2*.

Uvažme $x, y \in \mathbb{R}$. Potom

$$e^x \cdot e^y = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{y^\ell}{\ell!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{k} \frac{x^\ell}{\ell!} \frac{y^{k-\ell}}{(k-\ell)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} x^\ell y^{k-\ell} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = e^{x+y}.$$

□

Důkaz bodu *3*.

Z předchozích, již dokázaných, bodů *i)* a *ii)* plyne rovnost

$$e^x e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1, \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Tato rovnost implikuje nenulovost e^x pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ (rozmyslete např. sporem). Z rovnosti (1) pak ihned dostáváme $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

□

Exponenciální funkce

Důkaz bodu *4*.

Buď $z > 0$. Potom přímo z definice exponenciály dostáváme

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} > 1.$$

Protože $z > 0$, lze ostře rostoucí posloupnost částečných součtů konvergentní řady $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ zdola ostře odhadnout jejím prvním členem, což je číslo 1.

Exponenciální funkce

Důkaz bodu *4*.

Buď $z > 0$. Potom přímo z definice exponenciály dostáváme

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} > 1.$$

Protože $z > 0$, lze ostře rostoucí posloupnost částečných součtů konvergentní řady $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ zdola ostře odhadnout jejím prvním členem, což je číslo 1.
Předchozí nerovnost dále implikuje, že pro *záporné* z platí

$$e^z = \frac{1}{e^{-z}} < 1.$$

Exponenciální funkce

Důkaz bodu *4*.

Buď $z > 0$. Potom přímo z definice exponenciály dostáváme

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} > 1.$$

Protože $z > 0$, lze ostře rostoucí posloupnost částečných součtů konvergentní řady $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ zdola ostře odhadnout jejím prvním členem, což je číslo 1.
Předchozí nerovnost dále implikuje, že pro *záporné* z platí

$$e^z = \frac{1}{e^{-z}} < 1.$$

Je-li nyní $x < y$, pak $e^y = e^{y-x} e^x > 1 \cdot e^x = e^x$, protože $y - x > 0$ a $e^x > 0$. $\square$

Eulerovo číslo

Následující definice by neměla být překvapivá.

Eulerovo číslo

Následující definice by neměla být překvapivá.

Definice (Eulerovo číslo):

Eulerovo číslo definujeme pomocí exponenciální funkce předpisem

$$e := e^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}. \tag{2}$$

Hlavní body

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

1. Číselné řady

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

2. Exponenciální funkce a Eulerovo číslo

3. Logaritmus a obecná mocnina

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

$$\ln x$$

Přirozený logaritmus

Poznámka:

- Exponenciální funkce $x \mapsto e^x$ je ostře rostoucí (a tedy i prostá). Dále víme (rozmyslete!), že e^x je kladné pro každé x.

Přirozený logaritmus

Poznámka:

- Exponenciální funkce $x \mapsto e^x$ je ostře rostoucí (a tedy i prostá). Dále víme (rozmyslete!), že e^x je kladné pro každé x.
- Navíc platí, že oborem hodnot exponenciální funkce je $(0, +\infty)$. Tento fakt dokážeme v kapitole o spojitosti.

Přirozený logaritmus

Poznámka:

- Exponenciální funkce $x \mapsto e^x$ je ostře rostoucí (a tedy i prostá). Dále víme (rozmyslete!), že e^x je kladné pro každé x.
- Navíc platí, že oborem hodnot exponenciální funkce je $(0, +\infty)$. Tento fakt dokážeme v kapitole o spojitosti.

Definice (Přirozený logaritmus):

Existuje tedy inverzní funkce k exponenciále, která je také ostře rostoucí a zobrazuje $(0, +\infty)$ na $\mathbb{R}$. Tuto funkci nazýváme **přirozeným logaritmem** a značíme symbolem $\ln$.

Přirozený logaritmus

Věta (Vlastnosti přirozeného logaritmu):

Přirozený logaritmus $\ln$ má následující vlastnosti:

i) pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\ln e^x = x$ a pro každé $x \in (0, +\infty)$ platí $e^{\ln x} = x$,

ii) $\ln e = 1$, $\ln 1 = 0$,

iii) pro $x, y \in (0, +\infty)$ platí $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

Přirozený logaritmus

Věta (Vlastnosti přirozeného logaritmu):

Přirozený logaritmus $\ln$ má následující vlastnosti:

- (i) pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\ln e^x = x$ a pro každé $x \in (0, +\infty)$ platí $e^{\ln x} = x$,
- (ii) $\ln e = 1$, $\ln 1 = 0$,
- (iii) pro $x, y \in (0, +\infty)$ platí $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

Důkaz.

- (i) Plyne přímo z definice inverzní funkce.

Přirozený logaritmus

Věta (Vlastnosti přirozeného logaritmu):

Přirozený logaritmus $\ln$ má následující vlastnosti:

- *i)* pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\ln e^x = x$ a pro každé $x \in (0, +\infty)$ platí $e^{\ln x} = x$,
- *ii)* $\ln e = 1$, $\ln 1 = 0$,
- *iii)* pro $x, y \in (0, +\infty)$ platí $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

Důkaz.

- *i)* Plyne přímo z definice inverzní funkce.
- *ii)* Plyne přímo z definice inverzní funkce a vztahů $e^1 = e$, $e^0 = 1$.

Přirozený logaritmus

Věta (Vlastnosti přirozeného logaritmu):

Přirozený logaritmus $\ln$ má následující vlastnosti:

- *i)* pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\ln e^x = x$ a pro každé $x \in (0, +\infty)$ platí $e^{\ln x} = x$,
- *ii)* $\ln e = 1$, $\ln 1 = 0$,
- *iii)* pro $x, y \in (0, +\infty)$ platí $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

Důkaz.

- *i)* Plyne přímo z definice inverzní funkce.
- *ii)* Plyne přímo z definice inverzní funkce a vztahů $e^1 = e$, $e^0 = 1$.
- *iii)* Uvažme $x, y \in (0, +\infty)$ a označme $x' := \ln x$ a $y' := \ln y$, čili $e^{x'} = x$ a $e^{y'} = y$. Dle bodu *ii)* věty o základních vlastnostech exponenciály platí $xy = e^{x'+y'}$, neboli $\ln(xy) = x' + y' = \ln x + \ln y$. $\square$

Obecná mocnina

Připomeňme, že pro $a \in \mathbb{R}$ a kladné $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-krát}}.$$

[1] I pro $a = 0$!

Obecná mocnina

Připomeňme, že pro $a \in \mathbb{R}$ a kladné $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-krát}}.$$

Pro záporné celé n a $a \neq 0$ pak klademe

$$a^n := \frac{1}{a^{-n}}.$$

Tato definice má smysl neboť ve jmenovateli je $-n$ kladné a můžeme proto použít definici výše.

[1] I pro $a = 0$!

Obecná mocnina

Připomeňme, že pro $a \in \mathbb{R}$ a kladné $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-krát}}.$$

Pro záporné celé n a $a \neq 0$ pak klademe

$$a^n := \frac{1}{a^{-n}}.$$

Tato definice má smysl neboť ve jmenovateli je $-n$ kladné a můžeme proto použít definici výše.

Konečně položíme[1] $a^0 := 1$.

[1] I pro $a = 0$!

Obecná mocnina

Připomeňme, že pro $a \in \mathbb{R}$ a kladné $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-krát}}.$$

Pro záporné celé n a $a \neq 0$ pak klademe

$$a^n := \frac{1}{a^{-n}}.$$

Tato definice má smysl neboť ve jmenovateli je $-n$ kladné a můžeme proto použít definici výše.

Konečně položíme[1] $a^0 := 1$.

Symbol a^n má tedy dobrý smysl pro libovolné $n \in \mathbb{Z}$ a $a \in \mathbb{R}$ (pokud $n < 0$ pak pouze pro $a \neq 0$).

[1] I pro $a = 0$!

Obecná mocnina

Připomeňme, že pro $a \in \mathbb{R}$ a kladné $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-krát}}.$$

Pro záporné celé n a $a \neq 0$ pak klademe

$$a^n := \frac{1}{a^{-n}}.$$

Tato definice má smysl neboť ve jmenovateli je $-n$ kladné a můžeme proto použít definici výše.

Konečně položíme[1] $a^0 := 1$.

Symbol a^n má tedy dobrý smysl pro libovolné $n \in \mathbb{Z}$ a $a \in \mathbb{R}$ (pokud $n < 0$ pak pouze pro $a \neq 0$). Dále platí známé rovnosti

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad \text{a} \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}.$$

[1] I pro $a = 0$!

Obecná mocnina

Definice (Obecná mocnina):

Pro $a \in (0, +\infty)$ a $x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$a^x := e^{x \ln a}.$$

Obecná mocnina

Definice (Obecná mocnina):

Pro $a \in (0, +\infty)$ a $x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$a^x := e^{x \ln a}.$$

Poznámka:

Poznamenejme, že tato definice není v kolizi s dříve zavedenou exponenciální funkcí. Pro $a = e$ totiž máme

$$e^x = e^{x \ln e} = e^x.$$

Na levé straně symbol e^x chápeme jako obecnou mocninu a na pravé straně jako exponenciální funkci.

Obecná mocnina

Z vlastností exponenciální funkce a přirozeného logaritmu ihned plynou následující známé vlastnosti obecné mocniny.

Věta (Vlastnosti obecné mocniny):

Pro $a, b > 0$ a pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

i) $a^{x+y} = a^x a^y$,
ii) $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$,
iii) $(ab)^x = a^x b^x$.

Obecná mocnina

Z vlastností exponenciální funkce a přirozeného logaritmu ihned plynou následující známé vlastnosti obecné mocniny.

Věta (Vlastnosti obecné mocniny):

Pro $a, b > 0$ a pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

i) $a^{x+y} = a^x a^y$,

ii) $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$,

iii) $(ab)^x = a^x b^x$.

Důkaz.

Mějme $a > 0$ a $x, y \in \mathbb{R}$. Podle definice obecné mocniny platí
$a^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x\ln a + y\ln a} = e^{x\ln a} e^{y\ln a} = a^x a^y$.

Obecná mocnina

Z vlastností exponenciální funkce a přirozeného logaritmu ihned plynou následující známé vlastnosti obecné mocniny.

Věta (Vlastnosti obecné mocniny):

Pro $a, b > 0$ a pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

- i) $a^{x+y} = a^x a^y$,
- ii) $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$,
- iii) $(ab)^x = a^x b^x$.

Důkaz.

Mějme $a > 0$ a $x, y \in \mathbb{R}$. Podle definice obecné mocniny platí
$a^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x \ln a + y \ln a} = e^{x \ln a} e^{y \ln a} = a^x a^y$.
Obdobně platí $\left(a^x\right)^y = e^{y \cdot \ln a^x} = e^{y \cdot \ln e^{x \ln a}} = e^{y \cdot x \ln a} = a^{yx} = a^{xy}$.

Obecná mocnina

Z vlastností exponenciální funkce a přirozeného logaritmu ihned plynou následující známé vlastnosti obecné mocniny.

Věta (Vlastnosti obecné mocniny):

Pro $a, b > 0$ a pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

i) $a^{x+y} = a^x a^y$,

ii) $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$,

iii) $(ab)^x = a^x b^x$.

Důkaz.

Mějme $a > 0$ a $x, y \in \mathbb{R}$. Podle definice obecné mocniny platí
$a^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x \ln a + y \ln a} = e^{x \ln a} e^{y \ln a} = a^x a^y$.
Obdobně platí $\left(a^x\right)^y = e^{y \cdot \ln a^x} = e^{y \cdot \ln e^{x \ln a}} = e^{y \cdot x \ln a} = a^{yx} = a^{xy}$.
Nakonec $(ab)^x = e^{x \ln(ab)} = e^{x(\ln a + \ln b)} = e^{x \ln a} e^{x \ln b} = a^x b^x$. □

Logaritmus o základu a

Vlastnosti funkce $x \mapsto a^x$ závisí na konkrétní hodnotě a.

Věta:

Funkce definovaná předpisem a^x je:

- ostře rostoucí pokud $a > 1$,
- konstantní pokud $a = 1$,
- ostře klesající pokud $0 < a < 1$.

Obor hodnot funkce a^x je interval $(0, +\infty)$ pro $a \neq 1$ a $\{1\}$ pro $a = 1$.

Logaritmus o základu a

Vlastnosti funkce $x \mapsto a^x$ závisí na konkrétní hodnotě a.

Věta:

Funkce definovaná předpisem a^x je:

- ostře rostoucí pokud $a > 1$,
- konstantní pokud $a = 1$,
- ostře klesající pokud $0 < a < 1$.

Obor hodnot funkce a^x je interval $(0, +\infty)$ pro $a \neq 1$ a $\{1\}$ pro $a = 1$.

Definice:

Funkce a^x je tedy pro $a \neq 1$ ryze monotonní a tudíž prostá. Její inverzní funkci nazýváme **logaritmem o základu** a a značíme $\log_a$.

Logaritmus o základu a

Vlastnosti funkce $x \mapsto a^x$ závisí na konkrétní hodnotě a.

Věta:

Funkce definovaná předpisem a^x je:

- ostře rostoucí pokud $a > 1$,
- konstantní pokud $a = 1$,
- ostře klesající pokud $0 < a < 1$.

Obor hodnot funkce a^x je interval $(0, +\infty)$ pro $a \neq 1$ a $\{1\}$ pro $a = 1$.

Definice:

Funkce a^x je tedy pro $a \neq 1$ ryze monotonní a tudíž prostá. Její inverzní funkci nazýváme **logaritmem o základu** a a značíme $\log_a$.

Pro každé $a, x > 0$, $a \neq 1$ dostáváme

$$e^{\log_a x} = e^{\log_a x \cdot \frac{\ln a}{\ln a}} = \left(a^{\log_a x}\right)^{\frac{1}{\ln a}} = x^{\frac{1}{\ln a}} = e^{\frac{\ln x}{\ln a}}.$$

Logaritmus o základu a

Vlastnosti funkce $x \mapsto a^x$ závisí na konkrétní hodnotě a.

Věta:

Funkce definovaná předpisem a^x je:

- ostře rostoucí pokud $a > 1$,
- konstantní pokud $a = 1$,
- ostře klesající pokud $0 < a < 1$.

Obor hodnot funkce a^x je interval $(0, +\infty)$ pro $a \neq 1$ a $\{1\}$ pro $a = 1$.

Definice:

Funkce a^x je tedy pro $a \neq 1$ ryze monotonní a tudíž prostá. Její inverzní funkci nazýváme **logaritmem o základu** a a značíme $\log_a$.

Pro každé $a, x > 0$, $a \neq 1$ dostáváme

$$e^{\log_a x} = e^{\log_a x \cdot \frac{\ln a}{\ln a}} = \left(a^{\log_a x}\right)^{\frac{1}{\ln a}} = x^{\frac{1}{\ln a}} = e^{\frac{\ln x}{\ln a}}.$$

Tudíž $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Hlavní body

4 Dodatek

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

$$\ln x$$

Komentář

- Látka obsažená v této prezentaci je dále podrobně vysvětlena ve studijním textu.
- Příklady k procvičování látky o řadách lze nalézt ve čtvrté BI-ZMA lekci na MARASTu a v cvičebnici tamtéž.
- Námi zavedená „konvergence číselné řady" je intuitivní a přirozená. Existují i další způsoby jak číselné řady sčítat (i když v našem smyslu součet nemají). Viz například tento podrobný článek na Wolfram Blogu.
- Zde probíraná kritéria konvergence tvoří jakýsi pomyslný minimální základ. Existuje celá řada dalších kritérií (Raabeovo, Dirichletovo, Abelovo, Gaussovo,. . .).
- V této kapitole jsme **definovali** exponenciální funkci jako součet jisté číselné řady. Později během semestru si ukážeme, že řada známých elementárních funkcí je vyjádřitelná stejným způsobem, nejde tedy o výjimečnou situaci.