Základy matematické analýzy

Spojitost funkce

Pavel Hrabák[1], Tomáš Kalvoda[2], Ivo Petr[3]

[1]pavel.hrabak@fit.cvut.cz [2]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [3]ivo.petr@fit.cvut.cz,

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

4. března 2021
ZS 2020/2021

Hlavní body

Hlavní body

Spojitost funkce v bodě

Na základě vztahu funkční hodnoty a limity funkce v jistém bodě zavádíme následující pojmy.

Definice (Spojitost funkce v bodě):

Nechť f je reálná funkce reálné proměnné a nechť bod $a \in D_f$. Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** a jestliže nastává alespoň jedna z následujících možností

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$,

Spojitost funkce v bodě

Na základě vztahu funkční hodnoty a limity funkce v jistém bodě zavádíme následující pojmy.

Definice (Spojitost funkce v bodě):

Nechť f je reálná funkce reálné proměnné a nechť bod $a \in D_f$. Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** a jestliže nastává alespoň jedna z následujících možností

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$,
- funkce f je definována pouze na pravém okolí bodu a, přesněji $(\exists H_a)(H_a \cap D_f = H_a^+)$, a $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = f(a)$,

Spojitost funkce v bodě

Na základě vztahu funkční hodnoty a limity funkce v jistém bodě zavádíme následující pojmy.

Definice (Spojitost funkce v bodě):

Nechť f je reálná funkce reálné proměnné a nechť bod $a \in D_f$. Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** a jestliže nastává alespoň jedna z následujících možností

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$,
- funkce f je definována pouze na pravém okolí bodu a, přesněji $(\exists H_a)(H_a \cap D_f = H_a^+)$, a $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = f(a)$,
- funkce f je definována pouze na levém okolí bodu a, přesněji $(\exists H_a)(H_a \cap D_f = H_a^-)$, a $\lim\limits_{x \to a_-} f(x) = f(a)$.

Spojitost funkce v bodě

Na základě vztahu funkční hodnoty a limity funkce v jistém bodě zavádíme následující pojmy.

Definice (Spojitost funkce v bodě):

Nechť f je reálná funkce reálné proměnné a nechť bod $a \in D_f$. Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** a jestliže nastává alespoň jedna z následujících možností

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$,
- funkce f je definována pouze na pravém okolí bodu a, přesněji $(\exists H_a)(H_a \cap D_f = H_a^+)$, a $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = f(a)$,
- funkce f je definována pouze na levém okolí bodu a, přesněji $(\exists H_a)(H_a \cap D_f = H_a^-)$, a $\lim\limits_{x \to a_-} f(x) = f(a)$.

Funkce f je **spojitá v bodě** a **zprava**, pokud $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = f(a)$.

Spojitost funkce v bodě

Na základě vztahu funkční hodnoty a limity funkce v jistém bodě zavádíme následující pojmy.

Definice (Spojitost funkce v bodě):

Nechť f je reálná funkce reálné proměnné a nechť bod $a \in D_f$. Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** a jestliže nastává alespoň jedna z následujících možností

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$,
- funkce f je definována pouze na pravém okolí bodu a, přesněji $(\exists H_a)(H_a \cap D_f = H_a^+)$, a $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = f(a)$,
- funkce f je definována pouze na levém okolí bodu a, přesněji $(\exists H_a)(H_a \cap D_f = H_a^-)$, a $\lim\limits_{x \to a_-} f(x) = f(a)$.

Funkce f je **spojitá v bodě** a **zprava**, pokud $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = f(a)$.

Funkce f je **spojitá v bodě** a **zleva**, pokud $\lim\limits_{x \to a_-} f(x) = f(a)$.

ε-δ formulace spojitosti v bodě

- Vágně řečeno, drobná změna vstupu u spojité funkce má za následek drobnou změnu výstupu, funkční hodnoty.

ε-δ formulace spojitosti v bodě

- Vágně řečeno, drobná změna vstupu u spojité funkce má za následek drobnou změnu výstupu, funkční hodnoty.
- Je-li f funkce a $a \in D_f$, pak a i $f(a) \in \mathbb{R}$. Dostáváme proto alternativní formulaci definice, kterou lze využít při ověřování spojitosti:

ε-δ formulace spojitosti v bodě

- Vágně řečeno, drobná změna vstupu u spojité funkce má za následek drobnou změnu výstupu, funkční hodnoty.

- Je-li f funkce a $a \in D_f$, pak a i $f(a) \in \mathbb{R}$. Dostáváme proto alternativní formulaci definice, kterou lze využít při ověřování spojitosti:

Funkce f definovaná na okolí bodu $a \in D_f$ je spojitá v bodě $a \in D_f$, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - a| < \delta$ platí $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Vlastnosti funkcí spojitých v bodě

Následující tvrzení jsou bezprostředními důsledky vlastností limity funkce:

Vlastnosti funkcí spojitých v bodě

Následující tvrzení jsou bezprostředními důsledky vlastností limity funkce:

Věta:

Funkce f definovaná na okolí bodu $a \in D_f$ je spojitá v bodě a, právě když je spojitá v bodě a zleva i zprava.

Vlastnosti funkcí spojitých v bodě

Následující tvrzení jsou bezprostředními důsledky vlastností limity funkce:

Věta:

Funkce f definovaná na okolí bodu $a \in D_f$ je spojitá v bodě a, právě když je spojitá v bodě a zleva i zprava.

Věta:

Součet a součin dvou funkcí f a g definovaných na okolí bodu a a spojitých v bodě a je funkce spojitá v bodě a. Pokud navíc $g(a) \neq 0$, pak podíl $\frac{f}{g}$ je funkce spojitá v bodě a.

Vlastnosti funkcí spojitých v bodě

Následující tvrzení jsou bezprostředními důsledky vlastností limity funkce:

Věta:

Funkce f definovaná na okolí bodu $a \in D_f$ je spojitá v bodě a, právě když je spojitá v bodě a zleva i zprava.

Věta:

Součet a součin dvou funkcí f a g definovaných na okolí bodu a a spojitých v bodě a je funkce spojitá v bodě a. Pokud navíc $g(a) \neq 0$, pak podíl $\frac{f}{g}$ je funkce spojitá v bodě a.

Věta:

Buďte g funkce definovaná na okolí bodu a a spojitá v bodě a a f funkce definovananá na okolí bodu $g(a)$ a spojitá v bodě $g(a)$. Potom složená funkce $f \circ g$ je spojitá v bodě a.

Příklad: Spojitost polynomů

Příklad.

V předchozí přednášce jsme ukázali, že pro libovolné reálné a a libovolný polynom $P(x)$ platí

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a).$$

Každý polynom je proto spojitou funkcí v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.

Příklad

Příklad.

Zkoumejte spojitost funkce $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

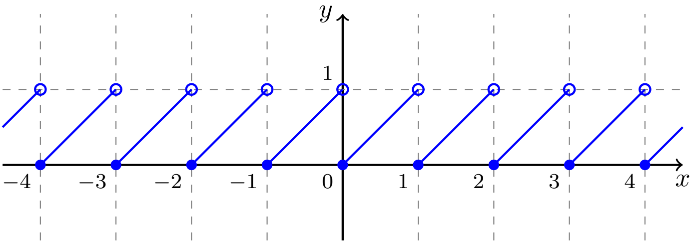
Příklad

Příklad.

Zkoumejte spojitost funkce $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

Přirozeným definičním oborem funkce f je $D_f = \mathbb{R}$. Funkce f je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. V bodech $a \in \mathbb{Z}$ je spojitá zprava, ale ne zleva.

$$\lim_{x \to a_+} f(x) = f(a) \quad \text{a} \quad \lim_{x \to a_-} f(x) = f(a) + 1.$$



Spojitost na intervalu

Doposud jsme pojem spojitosti měli zaveden pouze v jednom jediném bodě. Nyní ho rozšíříme na celý interval.

Spojitost na intervalu

Doposud jsme pojem spojitosti měli zaveden pouze v jednom jediném bodě. Nyní ho rozšíříme na celý interval.

Definice (Funkce spojitá na intervalu):

Funkce f je **spojitá na intervalu** J, právě když $f\big|_J$ (f zúženo na J) je spojitá v každém bodě intervalu J.

Spojitost na intervalu

Doposud jsme pojem spojitosti měli zaveden pouze v jednom jediném bodě. Nyní ho rozšíříme na celý interval.

Definice (Funkce spojitá na intervalu):

Funkce f je **spojitá na intervalu** J, právě když $f\big|_J$ (f zúženo na J) je spojitá v každém bodě intervalu J.

Poznámka:

Speciálně tedy platí

- **spojitá na intervalu** (a, b), právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$.

Spojitost na intervalu

Doposud jsme pojem spojitosti měli zaveden pouze v jednom jediném bodě. Nyní ho rozšíříme na celý interval.

Definice (Funkce spojitá na intervalu):

Funkce f je **spojitá na intervalu** J, právě když $f\big|_J$ (f zúženo na J) je spojitá v každém bodě intervalu J.

Poznámka:

Speciálně tedy platí

- **spojitá na intervalu** (a, b), právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$.
- **spojitá na intervalu** $\langle a, b)$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$ a v bodě a je spojitá zprava.

Spojitost na intervalu

Doposud jsme pojem spojitosti měli zaveden pouze v jednom jediném bodě. Nyní ho rozšíříme na celý interval.

Definice (Funkce spojitá na intervalu):

Funkce f je **spojitá na intervalu** J, právě když $f\big|_J$ (f zúženo na J) je spojitá v každém bodě intervalu J.

Poznámka:

Speciálně tedy platí

- **spojitá na intervalu** (a,b), právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a,b)$.
- **spojitá na intervalu** $\langle a,b)$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a,b)$ a v bodě a je spojitá zprava.
- **spojitá na intervalu** $(a,b\rangle$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a,b)$ a v bodě b je spojitá zleva.

Spojitost na intervalu

Doposud jsme pojem spojitosti měli zaveden pouze v jednom jediném bodě. Nyní ho rozšíříme na celý interval.

Definice (Funkce spojitá na intervalu):

Funkce f je **spojitá na intervalu** J, právě když $f\big|_J$ (f zúženo na J) je spojitá v každém bodě intervalu J.

Poznámka:

Speciálně tedy platí

- **spojitá na intervalu** (a, b), právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$.
- **spojitá na intervalu** $\langle a, b)$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$ a v bodě a je spojitá zprava.
- **spojitá na intervalu** $(a, b\rangle$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$ a v bodě b je spojitá zleva.
- **spojitá na intervalu** $\langle a, b\rangle$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$, v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.

Hlavní body

1. Definice a kritéria spojitosti
2. Důsledky spojitosti
3. Spojitost elementárních funkcí
4. Důsledky

Řešení rovnic

Řadu problémů lze formulovat jako hledání řešení rovnice

$$f(x) = 0.$$

V této části ukážeme jednoduchou postačující podmínku pro existenci řešení takovéto rovnice a algoritmus hledající alespoň jedno z možných řešení.

Příklad.

Vypočítat numerickou hodnotu $\sqrt{2}$ znamená řešit rovnici

$$f(x) = x^2 - 2 = 0$$

pro neznámou x.

Řešení rovnic: metoda půlení intervalu

Věta (Metoda půlení intervalu / *bisection method*):

Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potom existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že $f(c) = 0$.

Řešení rovnic: metoda půlení intervalu

Věta (Metoda půlení intervalu / *bisection method*):

Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potom existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že $f(c) = 0$.

Položme $a_1 := a$ a $b_1 := b$. Protože znaménka $f(a_1)$ a $f(b_1)$ jsou **různá**, nastane právě jedna ze tří možností

1. $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$,
2. znaménka $f(a_1)$ a $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ jsou různá,
3. znaménka $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ a $f(b_1)$ jsou různá.

Řešení rovnic: metoda půlení intervalu

Věta (Metoda půlení intervalu / *bisection method*):

Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potom existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že $f(c) = 0$.

Položme $a_1 := a$ a $b_1 := b$. Protože znaménka $f(a_1)$ a $f(b_1)$ jsou **různá**, nastane právě jedna ze tří možností

1. $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$,
2. znaménka $f(a_1)$ a $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ jsou různá,
3. znaménka $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ a $f(b_1)$ jsou různá.

Dále postupujeme podle toho, která z těchto možností nastala:

1. Hledaným bodem c je $\frac{a_1+b_1}{2}$ a věta je dokázána.
2. Položme $a_2 := a_1$ a $b_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$.
3. Položme $a_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$ a $b_2 = b_1$.

Pokud nenastala první možnost, proveďme stejnou úvahu s a_2 a b_2 místo a_1 a b_1.

Tímto způsobem postupně konstruujeme další a_3, b_3, atd. Pokud v některém z kroků nastane první možnost (tj. existuje n tak, že $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)=0$), pak je věta dokázána.

Tímto způsobem postupně konstruujeme další a_3, b_3, atd. Pokud v některém z kroků nastane první možnost (tj. existuje n tak, že $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)=0$), pak je věta dokázána.
V opačném případě jsme zkonstruovali posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ splňující

$$a_n, b_n \in \langle a, b\rangle, \quad a \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \leq b, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}},$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Tímto způsobem postupně konstruujeme další a_3, b_3, atd. Pokud v některém z kroků nastane první možnost (tj. existuje n tak, že $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$), pak je věta dokázána.
V opačném případě jsme zkonstruovali posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ splňující

$$a_n, b_n \in \langle a, b\rangle, \quad a \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \leq b, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}},$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$.
Obě posloupnosti jsou monotónní a omezené, tudíž existují jejich konečné limity, $a_n \to \alpha$ a $b_n \to \beta$ při $n \to \infty$. Navíc

$$\beta - \alpha = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0.$$

Obě posloupnosti tedy mají stejnou limitu, označme ji $c := \alpha = \beta \in \langle a, b\rangle$.

Tímto způsobem postupně konstruujeme další a_3, b_3, atd. Pokud v některém z kroků nastane první možnost (tj. existuje n tak, že $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)=0$), pak je věta dokázána.
V opačném případě jsme zkonstruovali posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ splňující

$$a_n, b_n \in \langle a, b\rangle, \quad a \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \leq b, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}},$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$.
Obě posloupnosti jsou monotónní a omezené, tudíž existují jejich konečné limity, $a_n \to \alpha$ a $b_n \to \beta$ při $n \to \infty$. Navíc

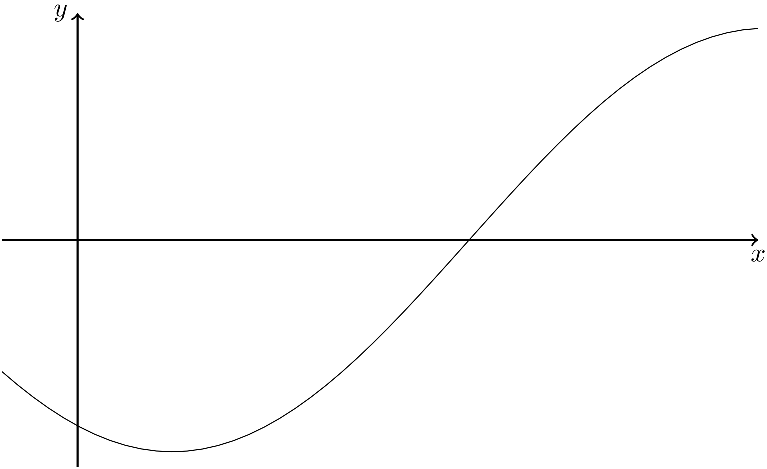
$$\beta - \alpha = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0.$$

Obě posloupnosti tedy mají stejnou limitu, označme ji $c := \alpha = \beta \in \langle a, b\rangle$.
Ze spojitosti funkce f v bodě c a Heineho věty nyní plyne

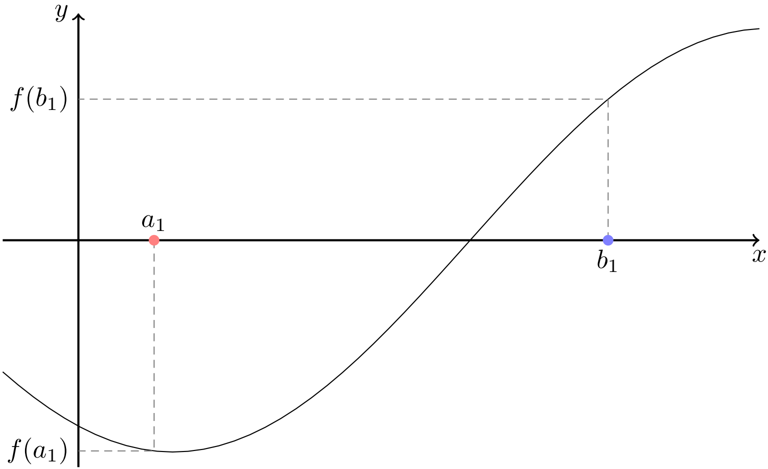
$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c).$$

Ale protože všechny $f(a_n)$ mají různé znaménko od $f(b_n)$ mohou poslední rovnosti nastat pouze v případě že $f(c) = 0$.

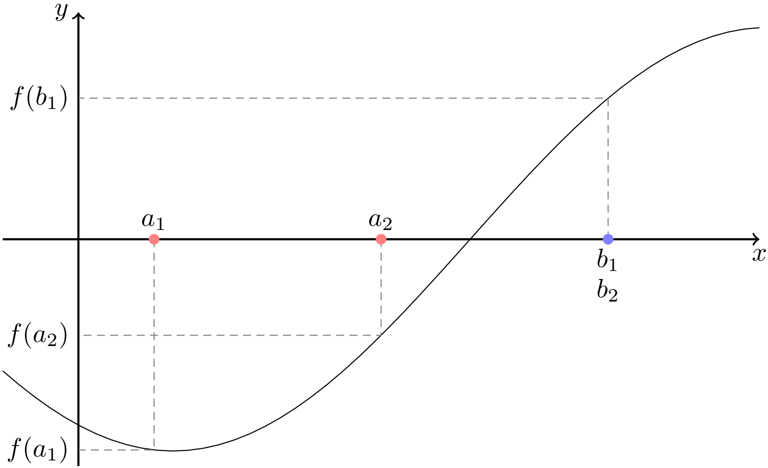
Ilustrace metody půlení intervalu



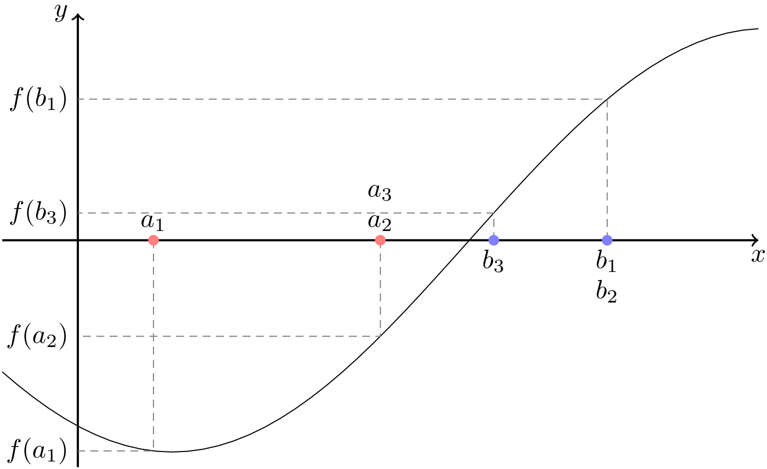
Ilustrace metody půlení intervalu



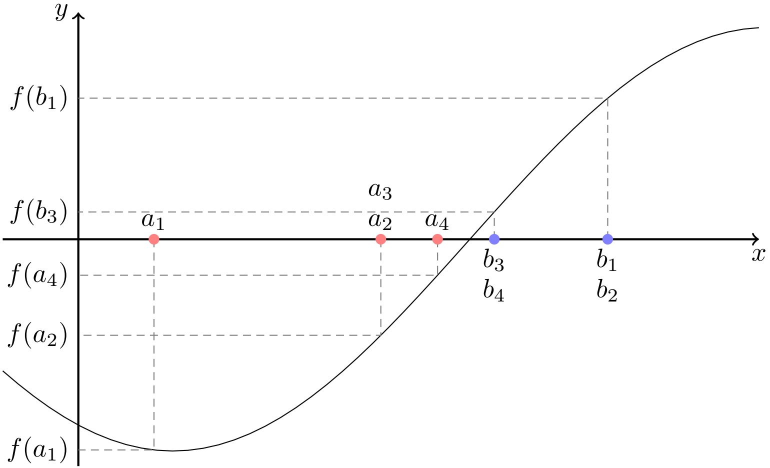
Ilustrace metody půlení intervalu



Ilustrace metody půlení intervalu



Ilustrace metody půlení intervalu



Řešení rovnic: metoda půlení intervalu

Poznámka (Komentář k důkazu):

- V důkazu jsme **využili** celou řadu výsledků z předchozích přednášek (věta o limitě monotónní posloupnosti, Heineho věta, spojitost, aj.)
- Důkaz předcházející věty se nazývá **konstruktivní**. Tvrzení věty, existenci čísla c, jsme dokázali jeho konstrukcí.
- Algoritmus použitý v důkazu se nazývá **metoda půlení intervalu** (*bisection method*) a lze ho prakticky použít k hledání řešení rovnice $f(x) = 0$.
- Algoritmus kontroluje i přesnost výpočtu, v každém kroku iterace platí nerovnosti $a_n \leq c \leq b_n$, $n = 1, 2, 3 \dots$ Víme proto kdy výpočetní smyčku ukončit.

Řešení rovnic: metoda půlení intervalu

Poznámka (Komentář k důkazu):

- V důkazu jsme **využili** celou řadu výsledků z předchozích přednášek (věta o limitě monotónní posloupnosti, Heineho věta, spojitost, aj.)
- Důkaz předcházející věty se nazývá **konstruktivní**. Tvrzení věty, existenci čísla c, jsme dokázali jeho konstrukcí.
- Algoritmus použitý v důkazu se nazývá **metoda půlení intervalu** (*bisection method*) a lze ho prakticky použít k hledání řešení rovnice $f(x) = 0$.
- Algoritmus kontroluje i přesnost výpočtu, v každém kroku iterace platí nerovnosti $a_n \leq c \leq b_n$, $n = 1, 2, 3 \ldots$ Víme proto kdy výpočetní smyčku ukončit.

Důsledek:

Buď f spojitá funkce na intervalu J a nechť platí $f(x) \neq 0$ pro všechna $x \in J$. Potom pro všechna $x \in J$ platí buď $f(x) > 0$ nebo $f(x) < 0$.

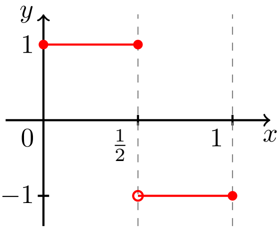
Řešení rovnic: metoda půlení intervalu

Poznámka:

Předpoklad spojitosti v předešlé větě je podstatný. Jako příklad uvažme funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle, \\ -1, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right\rangle \end{cases}$$

na intervalu $\langle a, b \rangle = \langle 0, 1 \rangle$. Sice $f(0) \cdot f(1) = -1 < 0$, ale neexistuje bod $x \in (0, 1)$ splňující $f(x) = 0$.



Další důsledek

Následující tvrzení využijeme později v semestru při studiu extrémů funkcí.

Věta:

Buď f funkce spojitá na intervalu J. Potom obraz $f(J)$ intervalu J je buď interval, nebo jednoprvková množina.

Další důsledek

Následující tvrzení využijeme později v semestru při studiu extrémů funkcí.

Věta:

Buď f funkce spojitá na intervalu J. Potom obraz $f(J)$ intervalu J je buď interval, nebo jednoprvková množina.

Důkaz.

$f(J)$ je jednoprvková množina právě tehdy, když funkce f je konstantní. Ve zbytku důkazu předpokládejme, že f není konstantní.

Další důsledek

Následující tvrzení využijeme později v semestru při studiu extrémů funkcí.

Věta:

Buď f funkce spojitá na intervalu J. Potom obraz $f(J)$ intervalu J je buď interval, nebo jednoprvková množina.

Důkaz.

$f(J)$ je jednoprvková množina právě tehdy, když funkce f je konstantní. Ve zbytku důkazu předpokládejme, že f není konstantní.

Ukažme, že $f(J)$ je interval. K tomu je třeba ukázat, že pro libovolné dva prvky $\alpha, \beta \in f(J)$, $\alpha \neq \beta$, leží všechna γ mezi α a β také v $f(J)$.

Další důsledek

Následující tvrzení využijeme později v semestru při studiu extrémů funkcí.

Věta:

Buď f funkce spojitá na intervalu J. Potom obraz $f(J)$ intervalu J je buď interval, nebo jednoprvková množina.

Důkaz.

$f(J)$ je jednoprvková množina právě tehdy, když funkce f je konstantní. Ve zbytku důkazu předpokládejme, že f není konstantní.

Ukažme, že $f(J)$ je interval. K tomu je třeba ukázat, že pro libovolné dva prvky $\alpha, \beta \in f(J)$, $\alpha \neq \beta$, leží všechna γ mezi α a β také v $f(J)$.

Jistě existují $a, b \in J$, $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$ a BÚNO $a < b$. Položme $g(x) := f(x) - \gamma$. Funkce g je spojitá na $\langle a, b\rangle$, $g(a) = \alpha - \gamma$ a $g(b) = \beta - \gamma$ jsou nenulová s rozdílným znaménkem. Podle věty existuje $c \in (a, b)$ takové, že $g(c) = 0$, tj. $f(c) = \gamma$. □

Spojitost inverzní funkce

Věta (O inverzní funkci):

Buď f **ryze monotónní** a spojitá funkce na intervalu I. Potom její inverzní funkce f^{-1} je také ryze monotónní a spojitá na intervalu $J := f(I)$.

Spojitost inverzní funkce

Věta (O inverzní funkci):

Buď f **ryze monotónní** a spojitá funkce na intervalu I. Potom její inverzní funkce f^{-1} je také ryze monotónní a spojitá na intervalu $J := f(I)$.

Důkaz.

f^{-1} existuje a je ryze monotónní. J je skutečně interval, jak tvrdí předchozí věta. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že funkce f je ostře rostoucí. Ukažme, že f^{-1} je spojitá zprava v každém bodě $b \in J$, který není pravým koncovým bodem. Ozn. $a := f^{-1}(b)$, tj. $f(a) = b$.

Spojitost inverzní funkce

Věta (O inverzní funkci):

Buď f **ryze monotónní** a spojitá funkce na intervalu I. Potom její inverzní funkce f^{-1} je také ryze monotónní a spojitá na intervalu $J := f(I)$.

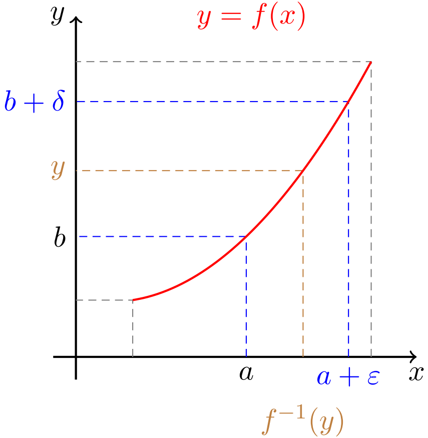
Důkaz.

f^{-1} existuje a je ryze monotónní. J je skutečně interval, jak tvrdí předchozí věta. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že funkce f je ostře rostoucí. Ukažme, že f^{-1} je spojitá zprava v každém bodě $b \in J$, který není pravým koncovým bodem.
Ozn. $a := f^{-1}(b)$, tj. $f(a) = b$.
Buď $\varepsilon > 0$. Potom pro $\delta := f(a+\varepsilon) - b$ a $y \in (b, b+\delta)$ platí

$$\begin{aligned} b <& y < b + \delta = f(a+\varepsilon) \\ a = f^{-1}(b) <& f^{-1}(y) < a + \varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy $f^{-1}(y) \in H_a(\varepsilon)$, $a = f^{-1}(b)$. Podobně pro spojitost zleva. $\square$

Spojitost inverzní funkce



Hlavní body

Příklad.

Funkce $\sin$ a $\cos$ jsou spojité v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.

Příklad.

Funkce $\sin$ a $\cos$ jsou spojité v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.

Připomeňme známé, v minulé přednášce vypočtené, limity

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

Příklad.

Funkce $\sin$ a $\cos$ jsou spojité v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.

Připomeňme známé, v minulé přednášce vypočtené, limity

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

Podle součtového vzorce pro funkci $\sin$ platí

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin\big((x-a)+a\big) \\ &= \sin(x-a)\cos(a) + \cos(x-a)\sin(a) \end{aligned}$$

Příklad.

Funkce $\sin$ a $\cos$ jsou spojité v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.

Připomeňme známé, v minulé přednášce vypočtené, limity

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

Podle součtového vzorce pro funkci $\sin$ platí

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin\big((x-a)+a\big) \\ &= \sin(x-a)\cos(a) + \cos(x-a)\sin(a) \end{aligned}$$

Tudíž podle věty o limitě složené funkce a součinu/součtu limit platí

$$\lim_{x \to a} \sin x = 0 \cdot \cos(a) + 1 \cdot \sin a = \sin a.$$

Což ukazuje spojitost funkce $\sin$. Spojitost funkce $\cos$ se ukáže analogicky.

Příklad.

Funkce $\sin$ a $\cos$ jsou spojité v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.

Připomeňme známé, v minulé přednášce vypočtené, limity

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

Podle součtového vzorce pro funkci $\sin$ platí

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin\big((x-a)+a\big) \\ &= \sin(x-a)\cos(a) + \cos(x-a)\sin(a) \end{aligned}$$

Tudíž podle věty o limitě složené funkce a součinu/součtu limit platí

$$\lim_{x \to a} \sin x = 0 \cdot \cos(a) + 1 \cdot \sin a = \sin a.$$

Což ukazuje spojitost funkce $\sin$. Spojitost funkce $\cos$ se ukáže analogicky.

Důsledek:

Z tohoto příkladu a z věty o spojitosti podílu dvou funkcí ihned plyne, že funkce tg a cotg jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.

Příklad.

Funkce e^x je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}$

Příklad.

Funkce e^x je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}$

Nejprve dokažme, že exponenciála je spojitá v bodě 0.

Příklad.

Funkce e^x je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}$

Nejprve dokažme, že exponenciála je spojitá v bodě 0. Pro každé přirozené n a $x \in (-1, 1)$ platí nerovnost

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - 1 \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{|x|^k}{k!} \leq |x| \sum_{k=1}^{n} \frac{|x|^{k-1}}{2^{k-1}} \leq \frac{|x|}{1 - |x|/2} \leq 2|x|.$$

Při odhadech jsme využili nerovnost $k! \geq 2^{k-1}$ platnou pro každé $k \in \mathbb{N}$ a nerovnost

$$\frac{1}{1 - |x|/2} \leq \frac{1}{1 - 1/2} = 2$$

platnou pro každé $x \in (-1, 1)$.

Příklad.

Funkce e^x je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}$

Nejprve dokažme, že exponenciála je spojitá v bodě 0. Pro každé přirozené n a $x \in (-1, 1)$ platí nerovnost

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - 1\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{|x|^k}{k!} \leq |x| \sum_{k=1}^{n} \frac{|x|^{k-1}}{2^{k-1}} \leq \frac{|x|}{1 - |x|/2} \leq 2|x|.$$

Při odhadech jsme využili nerovnost $k! \geq 2^{k-1}$ platnou pro každé $k \in \mathbb{N}$ a nerovnost

$$\frac{1}{1 - |x|/2} \leq \frac{1}{1 - 1/2} = 2$$

platnou pro každé $x \in (-1, 1)$. Dle věty o nerovnosti mezi limitami posloupností dostáváme nyní nerovnost

$$0 \leq |e^x - 1| \leq 2|x|$$

platnou pro každé $x \in (-1, 1)$.

Příklad.

Funkce e^x je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}$

Nejprve dokažme, že exponenciála je spojitá v bodě 0. Pro každé přirozené n a $x \in (-1, 1)$ platí nerovnost

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - 1 \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{|x|^k}{k!} \leq |x| \sum_{k=1}^{n} \frac{|x|^{k-1}}{2^{k-1}} \leq \frac{|x|}{1 - |x|/2} \leq 2|x|.$$

Při odhadech jsme využili nerovnost $k! \geq 2^{k-1}$ platnou pro každé $k \in \mathbb{N}$ a nerovnost

$$\frac{1}{1 - |x|/2} \leq \frac{1}{1 - 1/2} = 2$$

platnou pro každé $x \in (-1, 1)$. Dle věty o nerovnosti mezi limitami posloupností dostáváme nyní nerovnost

$$0 \leq |e^x - 1| \leq 2|x|$$

platnou pro každé $x \in (-1, 1)$. Věta o limitě sevřené funkce nyní implikuje

$$\lim_{x \to 0} |e^x - 1| = 0$$

a tedy i $\lim\limits_{x \to 0} e^x = 1$.

Pokračování příkladu...

Z předchozích úvah, z bodu ii) věty o základních vlastnostech exponenciály a z věty o limitě složené funkce nyní plyne spojitost exponenciální funkce v libovolném bodě $a \in \mathbb{R}$. Skutečně, platí

$$\lim_{x\to a} e^x = \lim_{x\to a} e^{a+x-a} = e^a \lim_{x\to a} e^{x-a} = e^a \cdot 1 = e^a.$$

Příklad

Příklad.

Funkce $\ln$ je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}^+$.

Příklad

Příklad.

Funkce $\ln$ je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}^+$.

Již víme, že exponenciála je spojitá funkce v každém bodě svého definičního oboru. Navíc víme, že je ostře rostoucí (tedy i ryze monotonní).

Příklad

Příklad.

Funkce $\ln$ je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}^+$.

Již víme, že exponenciála je spojitá funkce v každém bodě svého definičního oboru. Navíc víme, že je ostře rostoucí (tedy i ryze monotonní).

Z věty O inverzní funkci ihned plyne spojitost logaritmu $\ln$ v libovolném bodě jejího definičního oboru.

Příklad

Příklad.

Funkce $\ln$ je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R}^+$.

Již víme, že exponenciála je spojitá funkce v každém bodě svého definičního oboru. Navíc víme, že je ostře rostoucí (tedy i ryze monotonní).

Z věty O inverzní funkci ihned plyne spojitost logaritmu $\ln$ v libovolném bodě jejího definičního oboru.

Platí tedy

$$\lim_{x \to a} \ln x = \ln a,$$

pro každé $a \in (0, +\infty)$. Navíc

$$\lim_{x \to 0_+} \ln x = -\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$$

Příklad

Příklad.

Protože už víme, že funkce $\sin$, $\cos$, tg a cotg jsou spojité na svých definičních oborech, a vhodně zúžené jsou i ryze monotónní, ihned odtud dostáváme spojitost inverzních funkcí

$$\arcsin = \left(\sin\Big|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle}\right)^{-1},$$

$$\arccos = \left(\cos\Big|_{\langle 0, \pi\rangle}\right)^{-1},$$

$$\mathrm{arctg} = \left(\mathrm{tg}\Big|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}\right)^{-1},$$

$$\mathrm{arccotg} = \left(\mathrm{cotg}\Big|_{(0, \pi)}\right)^{-1}.$$

Spojitost $\sqrt[k]{x}$ a $|x|$

- Ze známých limit posloupností a Heineho věty okamžitě plyne spojitost odmocnin a absolutní hodnoty. Víme, že platí

$$\lim_{x \to a} \sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{a} \quad \text{a} \lim_{x \to 0_+} \sqrt[k]{x} = 0$$

pro $a > 0$ a $k = 2, 3, \ldots$, a tedy $\sqrt[k]{x}$ je spojitá na intervalu $\langle 0, +\infty)$.

Spojitost $\sqrt[k]{x}$ a $|x|$

- Ze známých limit posloupností a Heineho věty okamžitě plyne spojitost odmocnin a absolutní hodnoty. Víme, že platí

$$\lim_{x\to a} \sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{a} \quad \text{a} \lim_{x\to 0_+} \sqrt[k]{x} = 0$$

pro $a > 0$ a $k = 2, 3, \ldots$, a tedy $\sqrt[k]{x}$ je spojitá na intervalu $\langle 0, +\infty)$.

- Obdobně, protože

$$\lim_{x\to a} |x| = |a|$$

pro $a \in \mathbb{R}$, platí, že $|x|$ je spojitá na $\mathbb{R}$.

Hlavní body

Nyní odvodíme několik tvrzení, která využijeme hned v následující přednášce.

Lemma:

Platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Nyní odvodíme několik tvrzení, která využijeme hned v následující přednášce.

Lemma:

Platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Uvažme $x \in (-1,1)$, $x \neq 0$, a $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Potom

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - 1}{x} - 1 = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}}{x} - 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{k!} - 1 = x \sum_{k=2}^{n} \frac{x^{k-2}}{k!}.$$

Nyní odvodíme několik tvrzení, která využijeme hned v následující přednášce.

Lemma:

Platí
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Uvažme $x \in (-1,1)$, $x \neq 0$, a $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Potom

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - 1}{x} - 1 = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}}{x} - 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{k!} - 1 = x \sum_{k=2}^{n} \frac{x^{k-2}}{k!}.$$

Za stejných předpokladů z těchto rovností plyne odhad

$$0 \leq \left| \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - 1}{x} - 1 \right| \leq |x| \sum_{k=2}^{n} \frac{|x|^{k-2}}{k!} \leq |x| \sum_{k=2}^{n} \frac{|x|^{k-2}}{2^{k-1}} =$$
$$= \frac{|x|}{2} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{|x|}{2} \right)^{k-2} \leq \frac{|x|}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{|x|}{2} \right)^{k-2} = \frac{|x|}{2} \frac{1}{1 - |x|/2} \leq \frac{|x|}{2} \frac{1}{1 - 1/2} = |x|.$$

Odtud ihned plyne nerovnost

$$0 \leq \left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| \leq |x|$$

pro každé $x \in (-1, 1)$, $x \neq 0$.

Odtud ihned plyne nerovnost

$$0 \leq \left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| \leq |x|$$

pro každé $x \in (-1, 1)$, $x \neq 0$. Konečně věta o limitě sevřené funkce implikuje

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| = 0.$$

Odtud ihned plyne nerovnost

$$0 \leq \left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| \leq |x|$$

pro každé $x \in (-1, 1)$, $x \neq 0$. Konečně věta o limitě sevřené funkce implikuje

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| = 0.$$

Celkem tedy

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Lemma:

Platí
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Lemma:

Platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Důkaz.

Nejprve zkoumaný výraz vhodně upravme,

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln(x+1)}{x+1-1} = \frac{1}{\frac{e^{\ln(x+1)}-1}{\ln(x+1)}}.$$

Ze spojitosti logaritmu víme, že $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x+1) = 0$. Věta o limitě složené funkce a předcházející lemma dávají kýžený výsledek. $\square$

Lemma:

Platí

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \quad \text{a} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

Lemma:

Platí
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{a} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Důkaz.

Opět zkoumaný výraz nejprve upravme (v podstatě podle definice obecné mocniny), $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

Lemma:

Platí

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{a} \quad \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Důkaz.

Opět zkoumaný výraz nejprve upravme (v podstatě podle definice obecné mocniny), $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.
Díky spojitosti exponenciály stačí zkoumat limitu jejího argumentu. Pro ten však platí $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$.

Lemma:

Platí
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{a} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Důkaz.

Opět zkoumaný výraz nejprve upravme (v podstatě podle definice obecné mocniny), $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

Díky spojitosti exponenciály stačí zkoumat limitu jejího argumentu. Pro ten však platí $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$.

O funkci $\frac{1}{x}$ víme, že má limitu v $+\infty$ i v $-\infty$ rovnou 0. Z předchozího lemmatu a věty o limitě složené funkce pak ihned dostáváme
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1.$$

Tudíž
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e \quad \text{a} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e.$$
□

Důsledek:

Pro libovolnou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňující $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Speciálně platí $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e.$

Důsledek:

Pro libovolnou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňující $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Speciálně platí $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e.$

Důkaz: V důsledku předchozího lemmatu a Heineho věty dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{|a_n|}\right)^{|a_n|} = e \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{-|a_n|}\right)^{-|a_n|} = e.$$

Důsledek:

Pro libovolnou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňující $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Speciálně platí $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e.$

Důkaz: V důsledku předchozího lemmatu a Heineho věty dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{|a_n|}\right)^{|a_n|} = e \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{-|a_n|}\right)^{-|a_n|} = e.$$

Vezměme nyní libovolné $\varepsilon > 0$. Z platnosti předchozích limit plyne existence $m_0 \in \mathbb{N}$ a $k_0 \in \mathbb{N}$ takových, že pro každé $n > m_0$ platí

$$\left| \left(1 + \frac{1}{|a_n|}\right)^{|a_n|} - e \right| < \varepsilon$$

a pro každé $n > k_0$ platí

$$\left|\left(1+\frac{1}{-|a_n|}\right)^{-|a_n|} - e\right| < \varepsilon.$$

a pro každé $n > k_0$ platí

$$\left|\left(1 + \frac{1}{-|a_n|}\right)^{-|a_n|} - e\right| < \varepsilon.$$

Položme $n_0 = \max(m_0, k_0)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n = |a_n|$ nebo $a_n = -|a_n|$.

a pro každé $n > k_0$ platí

$$\left|\left(1 + \frac{1}{-|a_n|}\right)^{-|a_n|} - e\right| < \varepsilon.$$

Položme $n_0 = \max(m_0, k_0)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n = |a_n|$ nebo $a_n = -|a_n|$.

Tudíž pro každé $n > n_0$ dostáváme

$$\left|\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} - e\right| < \varepsilon,$$

čímž je platnost limity dokázána z definice. □

Důsledek pro limity funkcí tvaru $f(x)^{g(x)}$

Věta:

Uvažme funkce f a g definované na okolí bodu $a \in \overline{\mathbb{R}}$ s možnou výjimkou bodu a samotného a nechť funkce f je kladná na nějakém okolí bodu a. Předpokládejme dále, že existují limity

$$\alpha := \lim_{x \to a} f(x) \quad \text{a} \quad \beta := \lim_{x \to a} g(x).$$

Potom platí následující tři tvrzení:

1. Pokud $0 < \alpha < +\infty$ a $|\beta| < +\infty$ potom $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \alpha^{\beta}$.
2. Pokud $\alpha = 0$ a $\beta > 0$ (připouštíme i $\beta = +\infty$) potom $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = 0$.
3. Pokud $\alpha = +\infty$ a $\beta \neq 0$ potom $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)}$ existuje a je rovna 0 pokud $\beta < 0$ a $+\infty$ pokud $\beta > 0$.

Důkaz.

Viz studijní text. Zdůrazněme, že tvrzení věty lze snadno odvodit pomocí úpravy $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$ a využití spojitosti exponenciály. $\square$

Důsledek pro limity funkcí tvaru $f(x)^{g(x)}$: příklady limit 1^∞

Například platí

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2} &= \lim_{x\to+\infty} e^{x\cdot\frac{\ln(1+1/x)}{1/x}} = +\infty,\\
\lim_{x\to 0}\left(1+x^3\right)^{1/x^2} &= \lim_{x\to 0} e^{x\cdot\frac{\ln(1+x^3)}{x^3}} = e^{0\cdot 1} = 1,\\
\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{x} &= e^{\alpha},\\
\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x^2} &= \lim_{x\to+\infty} e^{-x\cdot\frac{\ln(1+1/x)}{1/x}} = 0.
\end{aligned}
$$

Všechny tyto limity jsou typu 1^∞. Jako výsledek můžeme dostat libovolný prvek množiny $\langle 0,+\infty)\cup\{+\infty\}$, zdaleka ne pouze 1.