

# Základy matematické analýzy

## Derivace funkce

Pavel Hrabák<sup>1</sup>, Tomáš Kalvoda<sup>2</sup>, Ivo Petr<sup>3</sup>

<sup>1</sup>pavel.hrabak@fit.cvut.cz <sup>2</sup>tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, <sup>3</sup>ivo.petr@fit.cvut.cz,

Katedra aplikované matematiky  
Fakulta informačních technologií  
České vysoké učení technické v Praze

4. března 2021  
ZS 2020/2021



# Hlavní body

- 1 Rychlost a hledání tečny
- 2 Derivace funkce
- 3 Vlastnosti derivace
- 4 Derivace elementárních funkcí: přehled a příklady
- 5 Další poznámky

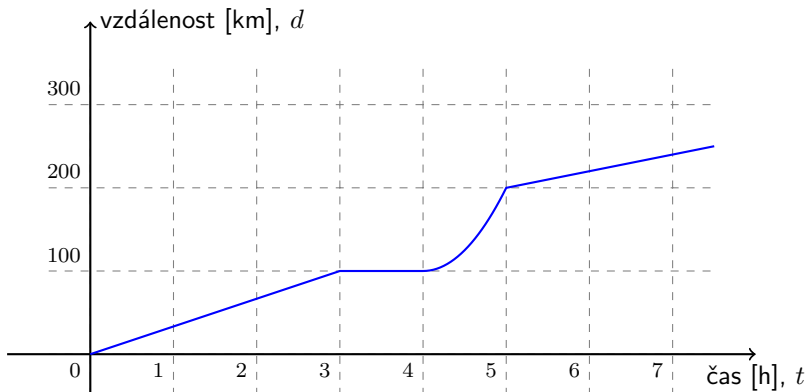


# Hlavní body

- 1 Rychlost a hledání tečny
- 2 Derivace funkce
- 3 Vlastnosti derivace
- 4 Derivace elementárních funkcí: přehled a příklady
- 5 Další poznámky



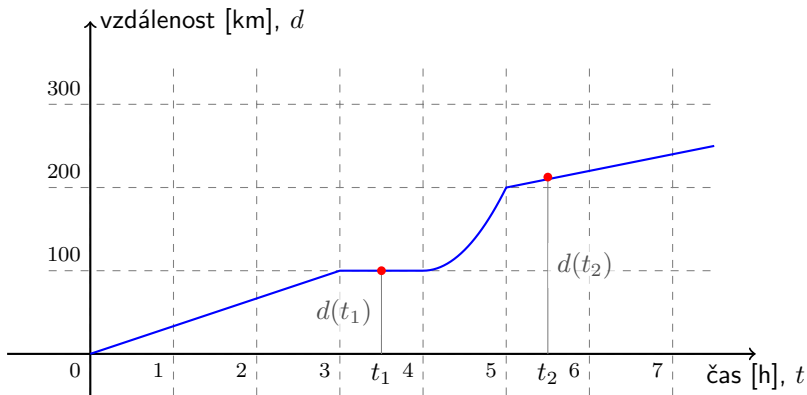
# Rychlost



- Tento graf zachycuje vzdálenost uraženou tělesem (např. vozidlem) v závislosti na čase. Uražená vzdálenost tělesa  $d$  je tedy **funkcí** času  $t$ .



# Rychlost

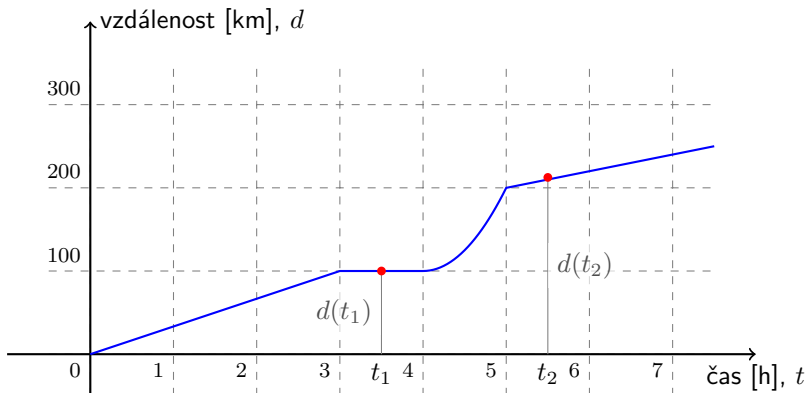


- Průměrná rychlost tělesa mezi okamžiky  $t_1 < t_2$  je dána podílem

$$\frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1}.$$



# Rychlost

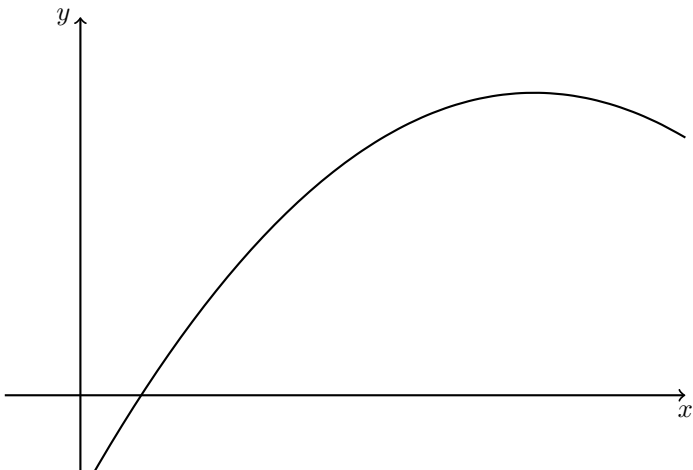


- Čím jsou  $t_1$  a  $t_2$  navzájem blíže, tím lépe průměrná rychlost odpovídá okamžité rychlosti vozidla. V čase  $t_1$  se tedy těleso pohybuje okamžitou rychlostí

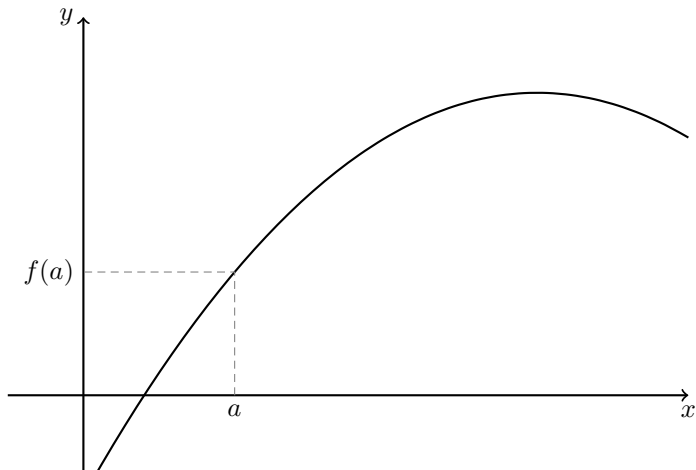
$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1}.$$



# Tečna ke grafu funkce

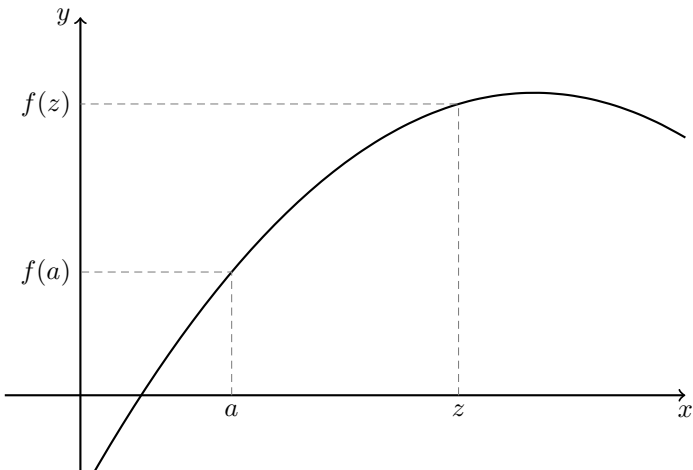


# Tečna ke grafu funkce

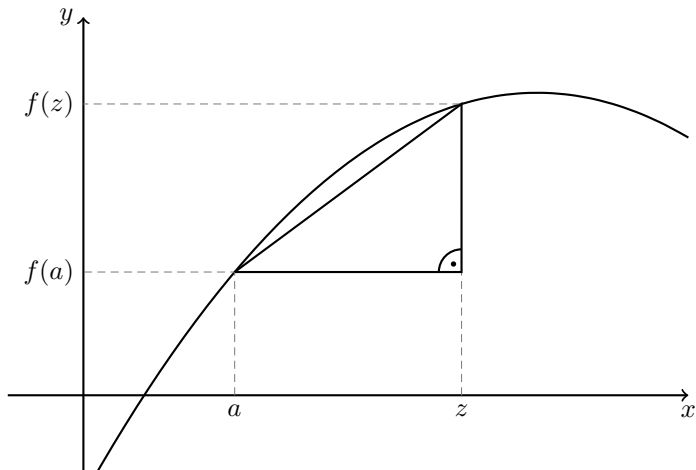




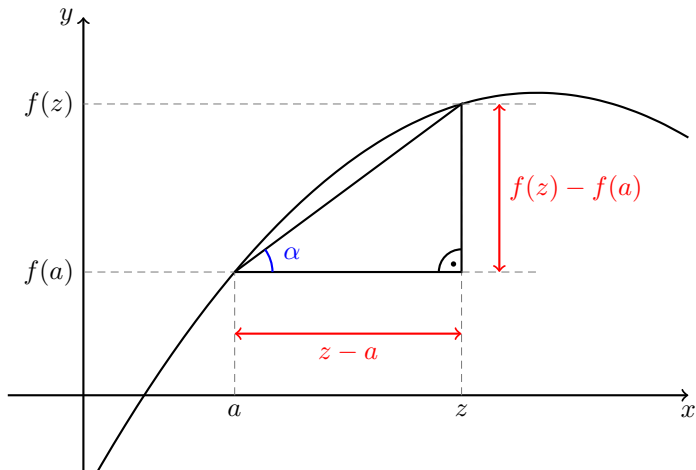
# Tečna ke grafu funkce



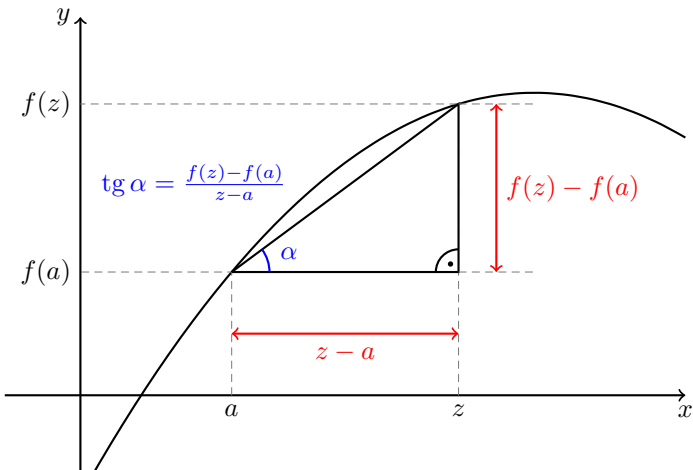
# Tečna ke grafu funkce



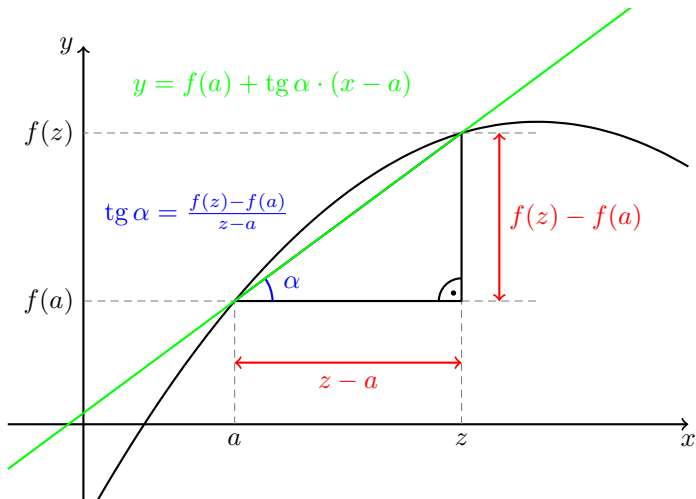
# Tečna ke grafu funkce



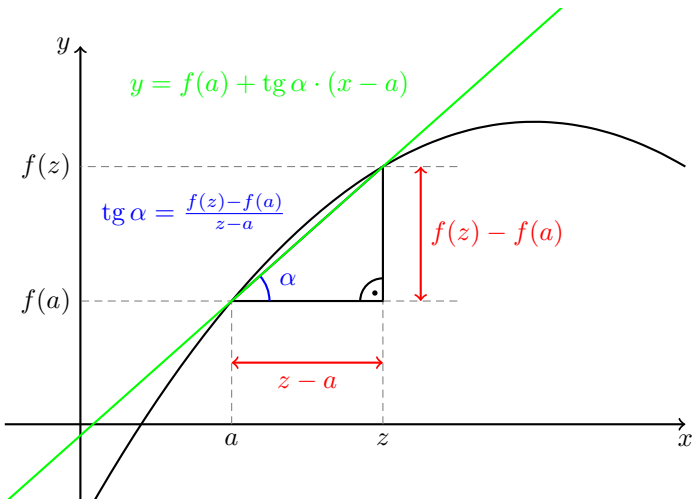
# Tečna ke grafu funkce



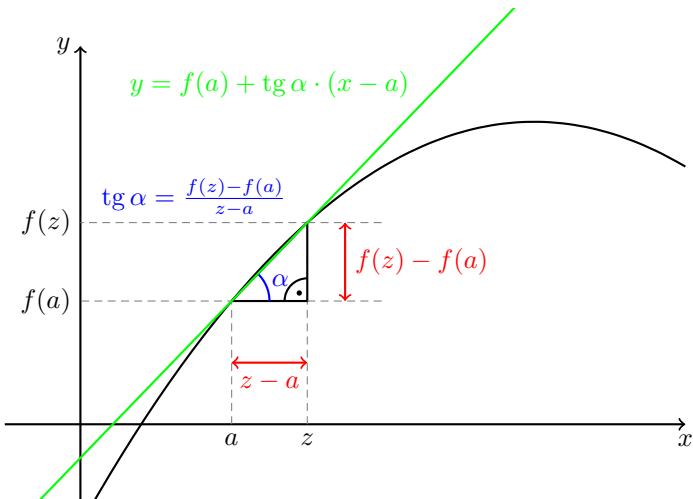
# Tečna ke grafu funkce



# Tečna ke grafu funkce



# Tečna ke grafu funkce



# Hlavní body

- 1 Rychlost a hledání tečny
- 2 Derivace funkce**
- 3 Vlastnosti derivace
- 4 Derivace elementárních funkcí: přehled a příklady
- 5 Další poznámky





# Definice derivace funkce

## Definice (derivace / derivative):

Nechť  $f$  je funkce definovaná na okolí bodu  $a \in \mathbb{R}$ . Pokud existuje limita

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

nazveme její hodnotu **derivací funkce  $f$  v bodě  $a$**  a označíme  $f'(a)$ . Pokud je tato konečná (tj.  $f'(a) \in \mathbb{R}$ ) řekneme, že funkce  $f$  je **diferencovatelná v bodě  $a$** .



# Definice derivace funkce

## Definice (derivace / derivative):

Nechť  $f$  je funkce definovaná na okolí bodu  $a \in \mathbb{R}$ . Pokud existuje limita

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

nazveme její hodnotu **derivací funkce  $f$  v bodě  $a$**  a označíme  $f'(a)$ . Pokud je tato konečná (tj.  $f'(a) \in \mathbb{R}$ ) řekneme, že funkce  $f$  je **diferencovatelná v bodě  $a$** .

## Definice:

Bud'  $f$  funkce s definičním oborem  $D_f$ . Nechť  $M$  označuje množinu všech  $x \in D_f$  takových, že existuje konečná derivace  $f'(x)$ . **Derivací funkce  $f$**  nazýváme funkci s definičním oborem  $M$ , která každému  $x \in M$  přiřadí  $f'(x)$ . Tuto funkci značíme symbolem  $f'$ .



# Definice derivace funkce

## Poznámka:

Derivace funkce  $f$  v bodě  $a$  se z různých historických důvodů značí i následujícími ekvivalentními způsoby

$$f'(a), \quad \dot{f}(a), \quad \frac{df}{dx}(a).$$



# Definice derivace funkce

## Poznámka:

Derivace funkce  $f$  v bodě  $a$  se z různých historických důvodů značí i následujícími ekvivalentními způsoby

$$f'(a), \quad \dot{f}(a), \quad \frac{df}{dx}(a).$$

## Poznámka:

Limitu v definici derivace lze ekvivalentně přepsat do tvaru, který je někdy výhodnější pro výpočty,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

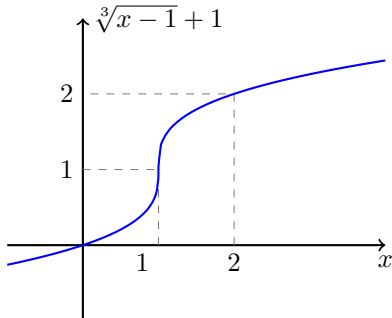


# Tečna ke grafu funkce

## Definice (tečna / *tangent*):

Nechť existuje  $f'(a)$ . **Tečnou funkce  $f$  v bodě  $a$**  nazýváme

- 1 přímku s rovnicí  $x = a$  je-li funkce  $f$  spojitá v bodě  $a$  a  $f'(a) = +\infty$  nebo  $f'(a) = -\infty$ .
- 2 přímku s rovnicí  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$  je-li  $f'(a) \in \mathbb{R}$ .

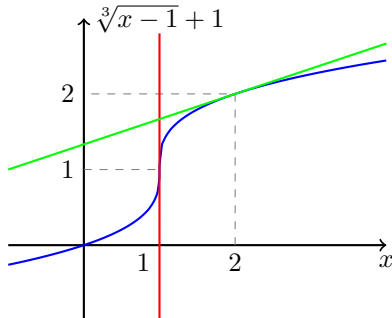


# Tečna ke grafu funkce

## Definice (tečna / *tangent*):

Nechť existuje  $f'(a)$ . **Tečnou funkce  $f$  v bodě  $a$**  nazýváme

- 1 přímku s rovnicí  $x = a$  je-li funkce  $f$  spojitá v bodě  $a$  a  $f'(a) = +\infty$  nebo  $f'(a) = -\infty$ .
- 2 přímku s rovnicí  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$  je-li  $f'(a) \in \mathbb{R}$ .



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Derivace konstantní funkce je rovna 0 v každém bodě.



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Derivace konstantní funkce je rovna 0 v každém bodě.

Je-li  $f(x) = c \in \mathbb{R}$  pro každé  $x \in \mathbb{R}$ , pak

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{c - c}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} 0 = 0$$

pro každé  $a \in \mathbb{R}$ .





# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Pro derivaci funkce  $f(x) = e^x$  platí  $f'(x) = e^x$ . Pro každé  $a \in \mathbb{R}$  platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = e^a.$$



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Pro derivaci funkce  $f(x) = e^x$  platí  $f'(x) = e^x$ . Pro každé  $a \in \mathbb{R}$  platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = e^a.$$

V minulé přednášce jsme odvodili vztah

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Pro derivaci funkce  $f(x) = e^x$  platí  $f'(x) = e^x$ . Pro každé  $a \in \mathbb{R}$  platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = e^a.$$

V minulé přednášce jsme odvodili vztah

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Podle věty o limitě složené funkce a o limitě součinu funkcí platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} e^a \cdot \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} = e^a \cdot 1 = e^a.$$



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Pro derivaci funkce  $f(x) = \ln x$  platí  $f'(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \in D_f = (0, +\infty)$ . Pro každé kladné  $a \in (0, +\infty)$  platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \frac{1}{a}.$$



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Pro derivaci funkce  $f(x) = \ln x$  platí  $f'(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \in D_f = (0, +\infty)$ . Pro každé kladné  $a \in (0, +\infty)$  platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \frac{1}{a}.$$

V minulé přednášce jsme odvodili vztah

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Pro derivaci funkce  $f(x) = \ln x$  platí  $f'(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \in D_f = (0, +\infty)$ . Pro každé kladné  $a \in (0, +\infty)$  platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \frac{1}{a}.$$

V minulé přednášce jsme odvodili vztah

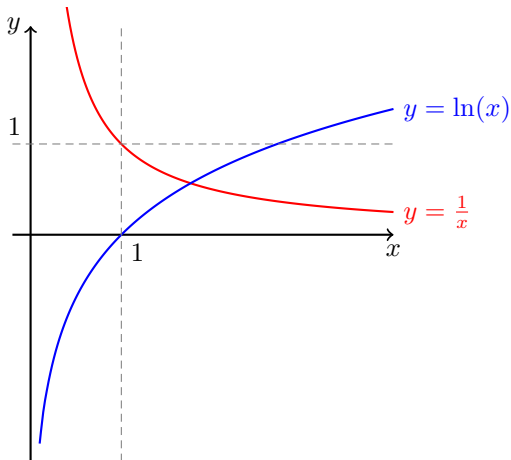
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Podobně jako v předchozím příkladu nyní

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln \frac{x}{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln \left(1 + \frac{x}{a} - 1\right)}{a \left(\frac{x}{a} - 1\right)} = \frac{1}{a} \cdot 1 = \frac{1}{a}.$$



Grafy funkcí  $f(x) = \ln(x)$  a  $g(x) = \frac{1}{x}$  pro  $x > 0$ .



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Pro derivaci funkce  $f(x) = x^n$  platí  $f'(x) = nx^{n-1}$ , kde  $n \in \mathbb{N}$  a  $x \in D_f$ . Platí totiž

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}.$$





# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Pro derivaci funkce  $f(x) = x^n$  platí  $f'(x) = nx^{n-1}$ , kde  $n \in \mathbb{N}$  a  $x \in D_f$ . Platí totiž

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}.$$

Nejprve vhodně upravme zkoumaný výraz,

$$\begin{aligned} \frac{x^n - a^n}{x - a} &= \frac{1}{x - a} \cdot (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1}) \\ &= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1}}_{n \text{ členů}}. \end{aligned}$$



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Pro derivaci funkce  $f(x) = x^n$  platí  $f'(x) = nx^{n-1}$ , kde  $n \in \mathbb{N}$  a  $x \in D_f$ . Platí totiž

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}.$$

Nejprve vhodně upravme zkoumaný výraz,

$$\begin{aligned} \frac{x^n - a^n}{x - a} &= \frac{1}{x - a} \cdot (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1}) \\ &= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1}}_{n \text{ členů}}. \end{aligned}$$

Tudíž

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}.$$



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Derivace funkce  $\sin x$  je funkce  $\cos x$  a derivace funkce  $\cos x$  je funkce  $-\sin x$ .



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Derivace funkce  $\sin x$  je funkce  $\cos x$  a derivace funkce  $\cos x$  je funkce  $-\sin x$ .

Pomocí součtového vzorce pro  $\sin$  dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x - a + a) - \sin(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x - a) \cos(a) + \cos(x - a) \sin(a) - \sin(a)}{x - a} = \\ &= \cos(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x - a)}{x - a} + \sin(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos(x - a) - 1}{x - a} = \\ &= \cos(a) \cdot 1 + \sin(a) \cdot 0 = \cos(a).\end{aligned}$$

Využili jsme znalosti již spočtených limit a věty o limitě složené funkce.



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Derivace funkce  $\sin x$  je funkce  $\cos x$  a derivace funkce  $\cos x$  je funkce  $-\sin x$ .

Pomocí součtového vzorce pro  $\sin$  dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x - a + a) - \sin(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x - a) \cos(a) + \cos(x - a) \sin(a) - \sin(a)}{x - a} = \\ &= \cos(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x - a)}{x - a} + \sin(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos(x - a) - 1}{x - a} = \\ &= \cos(a) \cdot 1 + \sin(a) \cdot 0 = \cos(a).\end{aligned}$$

Využili jsme znalosti již spočtených limit a věty o limitě složené funkce. Podobným způsobem můžeme odvodit

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos(x) - \cos(a)}{x - a} = -\sin(a),$$

pro každé  $a \in \mathbb{R}$ .



# Derivace funkce: příklady

## Poznámka:

Ve výpočtu výše jsme použili znalost limity

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

a jejího důsledku

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h} \cdot \frac{1}{\cos h + 1} = \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2 h}{h^2} \cdot \frac{h}{\cos h + 1} = -1 \cdot \frac{0}{1 + 1} = 0. \end{aligned}$$



# Hlavní body

- 1 Rychlost a hledání tečny
- 2 Derivace funkce
- 3 Vlastnosti derivace**
- 4 Derivace elementárních funkcí: přehled a příklady
- 5 Další poznámky



# Vztah spojitosti a diferencovatelnosti

## Věta:

Je-li  $f$  funkce diferencovatelná v bodě  $a$ , pak je spojitá v bodě  $a$ . Tj. platí

$$f'(a) \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$





# Vztah spojitosti a diferencovatelnosti

## Věta:

Je-li  $f$  funkce diferencovatelná v bodě  $a$ , pak je spojitá v bodě  $a$ . Tj. platí

$$f'(a) \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

## Důkaz.

Elementární úpravou a použitím věty o limitě součinu

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Tedy  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Poznamenejme, že „diferencovatelnost“ znamená  $f'(a) \in \mathbb{R}$  a výraz na konci výpočtu proto má smysl. □

# Vztah spojitosti a diferencovatelnosti

## Poznámka:

- Obrácené tvrzení neplatí. Přesněji, ze spojitosti funkce  $f$  v bodě  $a$  neplyne její diferencovatelnost v bodě  $a$ .

Jako příklad lze uvážit funkci  $f(x) = |x|$  a bod  $a = 0$ .



# Vztah spojitosti a diferencovatelnosti

## Poznámka:

- Obrácené tvrzení neplatí. Přesněji, ze spojitosti funkce  $f$  v bodě  $a$  neplyne její diferencovatelnost v bodě  $a$ .

Jako příklad lze uvážit funkci  $f(x) = |x|$  a bod  $a = 0$ .

- Dokonce, existují funkce **spojité** na celém  $\mathbb{R}$  **nemající derivaci** ani v jednom bodě. Např.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n \cdot x\}}{10^n},$$

kde  $\{x\}$  značí vzdálenost reálného čísla  $x$  od nejbližšího celého čísla.



# Vztah spojitosti a diferencovatelnosti

## Poznámka:

- Obrácené tvrzení neplatí. Přesněji, ze spojitosti funkce  $f$  v bodě  $a$  neplyne její diferencovatelnost v bodě  $a$ .

Jako příklad lze uvážit funkci  $f(x) = |x|$  a bod  $a = 0$ .

- Dokonce, existují funkce **spojité** na celém  $\mathbb{R}$  **nemající derivaci** ani v jednom bodě. Např.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n \cdot x\}}{10^n},$$

kde  $\{x\}$  značí vzdálenost reálného čísla  $x$  od nejbližšího celého čísla.

Protože  $0 \leq \{x\} < 1$  konverguje řada absolutně pro každé  $x$ . Definičním oborem funkce  $f$  je proto celá reálná osa  $D_f = \mathbb{R}$ . Ukázat spojitost a diferencovatelnost je však už složitější.



# Nástroje pro výpočet derivací

## Věta (Derivace součtu, součinu a podílu):

Nechť funkce  $f$  a  $g$  jsou diferencovatelné v bodě  $a$ . Potom platí

- $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ ,
- $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ ,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$ , pokud  $g(a) \neq 0$ .



# Nástroje pro výpočet derivací

## Věta (Derivace součtu, součinu a podílu):

Nechť funkce  $f$  a  $g$  jsou diferencovatelné v bodě  $a$ . Potom platí

- $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ ,
- $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ ,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$ , pokud  $g(a) \neq 0$ .

## Poznámka:

Pravidlo pro derivaci součinu se někdy též nazývá **Leibnizovo pravidlo**. Platí tedy například

$$\begin{aligned}(\sin(x) \cos(x))' &= \cos(x) \cos(x) - \sin(x) \sin(x) = \cos(2x), \\(x \sin(x))' &= 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)\end{aligned}$$

# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Pro derivace funkcí  $\operatorname{tg}$  a  $\operatorname{cotg}$  platí

$$\operatorname{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\},$$
$$\operatorname{cotg}'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Pro derivace funkcí  $\operatorname{tg}$  a  $\operatorname{cotg}$  platí

$$\operatorname{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\},$$
$$\operatorname{cotg}'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Pomocí pravidla pro derivaci podílu dostáváme vztahy

$$\operatorname{tg}'(x) = \left( \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)},$$
$$\operatorname{cotg}'(x) = \left( \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right)' = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)},$$

platné na příslušných definičních oborech.





# Derivace složené funkce

## Věta (Derivace složené funkce):

Nechť  $g$  je funkce diferencovatelná v bodě  $a$ ,  $f$  je diferencovatelná v bodě  $g(a)$ .  
Potom funkce  $f \circ g$  je diferencovatelná v bodě  $a$  a platí

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$



# Derivace složené funkce

## Věta (Derivace složené funkce):

Nechť  $g$  je funkce diferencovatelná v bodě  $a$ ,  $f$  je diferencovatelná v bodě  $g(a)$ .  
Potom funkce  $f \circ g$  je diferencovatelná v bodě  $a$  a platí

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

## Důkaz.

Na přednášce vynecháváme.



# Derivace složené funkce

## Věta (Derivace složené funkce):

Nechť  $g$  je funkce diferencovatelná v bodě  $a$ ,  $f$  je diferencovatelná v bodě  $g(a)$ .  
Potom funkce  $f \circ g$  je diferencovatelná v bodě  $a$  a platí

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

## Důkaz.

Na přednášce vynecháváme.

## Příklad.

Platí tedy například:

$$(e^{x^2})' = e^{x^2} \cdot 2x, \quad (\sin(\cos(x)))' = \cos(\cos(x)) \cdot (-\sin(x)).$$

# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Derivace funkce  $h(x) = x^\alpha$ ,  $x > 0$  a  $\alpha \in \mathbb{R}$ , je opět  $h'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ .



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Derivace funkce  $h(x) = x^\alpha$ ,  $x > 0$  a  $\alpha \in \mathbb{R}$ , je opět  $h'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ .

- Víme, že pro kladné  $x > 0$  platí  $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ . Označme  $f(x) = e^x$  vnější funkci a  $g(x) = \alpha \ln(x)$  vnitřní funkcí, tedy  $x^\alpha = f(g(x))$ .



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Derivace funkce  $h(x) = x^\alpha$ ,  $x > 0$  a  $\alpha \in \mathbb{R}$ , je opět  $h'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ .

- Víme, že pro kladné  $x > 0$  platí  $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ . Označme  $f(x) = e^x$  vnější funkci a  $g(x) = \alpha \ln(x)$  vnitřní funkcí, tedy  $x^\alpha = f(g(x))$ .
- Potom podle věty o derivaci složené funkce máme

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0.$$



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Derivace funkce  $f(x) = a^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , kde  $a > 0$  je  $f'(x) = a^x \ln a$ .



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Derivace funkce  $f(x) = a^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , kde  $a > 0$  je  $f'(x) = a^x \ln a$ .

- Platí  $h(x) = e^{x \ln a}$ . Označme vnější funkci  $f(x) = e^x$  a vnitřní funkci  $g(x) = x \ln a$ .





# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Derivace funkce  $f(x) = a^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , kde  $a > 0$  je  $f'(x) = a^x \ln a$ .

- Platí  $h(x) = e^{x \ln a}$ . Označme vnější funkci  $f(x) = e^x$  a vnitřní funkci  $g(x) = x \ln a$ .

- Potom

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a.$$



# Derivace inverzní funkce

## Věta (Derivace inverzní funkce):

Budte  $f$  spojitá a ryze monotónní na intervalu  $I = (a, b)$  a bod  $c \in I$ . Má-li inverzní funkce  $f^{-1}$  konečnou nenulovou derivaci v bodě  $f(c)$ , potom má  $f$  derivaci v bodě  $c$  a platí

$$f'(c) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(c))}.$$



# Derivace inverzní funkce

## Věta (Derivace inverzní funkce):

Budte  $f$  spojitá a ryze monotónní na intervalu  $I = (a, b)$  a bod  $c \in I$ . Má-li inverzní funkce  $f^{-1}$  konečnou nenulovou derivaci v bodě  $f(c)$ , potom má  $f$  derivaci v bodě  $c$  a platí

$$f'(c) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(c))}.$$

**Důkaz:** Označme  $d = f(c)$ . Všimněme si, že pro  $x \in I$ ,  $x \neq c$  platí

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \left( \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(d)}{f(x) - d} \right)^{-1} = \left( g(f(x)) \right)^{-1},$$

kde

$$g(x) = \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(d)}{x - d}, \quad \text{pro } x \in f(I), x \neq d.$$



# Derivace inverzní funkce

Podle předpokladu je ale

$$\lim_{x \rightarrow d} g(x) = (f^{-1})'(d)$$

konečná nenulová,  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = d$  a  $f(x) \neq d$  pro  $x \neq c$ .



# Derivace inverzní funkce

Podle předpokladu je ale

$$\lim_{x \rightarrow d} g(x) = (f^{-1})'(d)$$

konečná nenulová,  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = d$  a  $f(x) \neq d$  pro  $x \neq c$ .

Podle věty o limitě složené funkce pak tedy

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{1}{(f^{-1})'(d)}.$$



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Již víme, že derivace  $\ln$  je funkce  $\frac{1}{x}$ .  $\ln$  je ale inverzní funkce k funkci  $e^x$ . Ověřme si vztah pro derivaci znovu pomocí věty o derivaci inverzní funkce.



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Již víme, že derivace  $\ln$  je funkce  $\frac{1}{x}$ .  $\ln$  je ale inverzní funkce k funkci  $e^x$ . Ověřme si vztah pro derivaci znovu pomocí věty o derivaci inverzní funkce.

Chceme derivovat  $f(x) = \ln(x)$  na intervalu  $I = (0, +\infty)$ . Tato je spojitá, ryze monotónní a její inverzní funkcí je  $f^{-1}(x) = e^x$ .



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Již víme, že derivace  $\ln$  je funkce  $\frac{1}{x}$ .  $\ln$  je ale inverzní funkce k funkci  $e^x$ . Ověřme si vztah pro derivaci znovu pomocí věty o derivaci inverzní funkce.

Chceme derivovat  $f(x) = \ln(x)$  na intervalu  $I = (0, +\infty)$ . Tato je spojitá, ryze monotónní a její inverzní funkcí je  $f^{-1}(x) = e^x$ .

Je-li  $x \in I$ , pak pro derivaci  $f^{-1}$  v bodě  $f(x)$  platí

$$(f^{-1})'(f(x)) = e^{\ln(x)} = x \in I.$$





# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Již víme, že derivace  $\ln$  je funkce  $\frac{1}{x}$ .  $\ln$  je ale inverzní funkce k funkci  $e^x$ . Ověřme si vztah pro derivaci znovu pomocí věty o derivaci inverzní funkce.

Chceme derivovat  $f(x) = \ln(x)$  na intervalu  $I = (0, +\infty)$ . Tato je spojitá, ryze monotónní a její inverzní funkcí je  $f^{-1}(x) = e^x$ .

Je-li  $x \in I$ , pak pro derivaci  $f^{-1}$  v bodě  $f(x)$  platí

$$(f^{-1})'(f(x)) = e^{\ln(x)} = x \in I.$$

Podle naší věty tedy je

$$\ln'(x) = f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{x},$$

což jsme očekávali.



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Pro derivaci funkce arcsin platí  $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $x \in (-1, 1)$ .



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Pro derivaci funkce arcsin platí  $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $x \in (-1, 1)$ .

Funkce  $f = \arcsin$  je inverzní funkcí k funkci  $\sin$  zúžené na interval  $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ . Tj.  $f^{-1} = \sin \Big|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}$ . Pro každé  $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  již víme, že platí

$$(f^{-1})'(x) = \cos x \neq 0.$$



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Pro derivaci funkce arcsin platí  $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $x \in (-1, 1)$ .

Funkce  $f = \arcsin$  je inverzní funkcí k funkci  $\sin$  zúžené na interval  $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ . Tj.  $f^{-1} = \sin \Big|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}$ . Pro každé  $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  již víme, že platí

$$(f^{-1})'(x) = \cos x \neq 0.$$

Podle věty o derivaci inverzní funkce máme pro každé  $x \in (-1, 1)$  rovnost

$$\arcsin'(x) = f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Pro derivaci funkce arcsin platí  $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $x \in (-1, 1)$ .

Funkce  $f = \arcsin$  je inverzní funkcí k funkci  $\sin$  zúžené na interval  $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ . Tj.  $f^{-1} = \sin \Big|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}$ . Pro každé  $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  již víme, že platí

$$(f^{-1})'(x) = \cos x \neq 0.$$

Podle věty o derivaci inverzní funkce máme pro každé  $x \in (-1, 1)$  rovnost

$$\arcsin'(x) = f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Pro  $x \in (-1, 1)$  je ale

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2} \neq 0,$$

a tudíž

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Pro derivaci funkce  $\operatorname{arctg}$  platí

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Pro derivaci funkce  $\operatorname{arctg}$  platí

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Chceme derivovat  $f = \operatorname{arctg}$  na  $I = \mathbb{R}$ , kde je spojitá a monotónní. Její inverzní funkce je  $f^{-1} = \operatorname{tg} \Big|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$ .



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Pro derivaci funkce  $\operatorname{arctg}$  platí

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Chceme derivovat  $f = \operatorname{arctg}$  na  $I = \mathbb{R}$ , kde je spojitá a monotónní. Její inverzní funkce je  $f^{-1} = \operatorname{tg} \Big|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$ . Pro každé  $x \in I$  platí

$$(f^{-1})'(f(x)) = \operatorname{tg}'(\operatorname{arctg}(x)) = \frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg}(x))} \neq 0,$$

protože  $\operatorname{arctg}(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .





# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Pro derivaci funkce  $\operatorname{arctg}$  platí

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Chceme derivovat  $f = \operatorname{arctg}$  na  $I = \mathbb{R}$ , kde je spojitá a monotónní. Její inverzní funkce je  $f^{-1} = \operatorname{tg} \Big|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$ . Pro každé  $x \in I$  platí

$$(f^{-1})'(f(x)) = \operatorname{tg}'(\operatorname{arctg}(x)) = \frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg}(x))} \neq 0,$$

protože  $\operatorname{arctg}(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ . Navíc je

$$\cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}{\sin^2(\operatorname{arctg} x) + \cos^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Pro derivaci funkce  $\operatorname{arctg}$  platí

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Chceme derivovat  $f = \operatorname{arctg}$  na  $I = \mathbb{R}$ , kde je spojitá a monotónní. Její inverzní funkce je  $f^{-1} = \operatorname{tg} \Big|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$ . Pro každé  $x \in I$  platí

$$(f^{-1})'(f(x)) = \operatorname{tg}'(\operatorname{arctg}(x)) = \frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg}(x))} \neq 0,$$

protože  $\operatorname{arctg}(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ . Navíc je

$$\cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}{\sin^2(\operatorname{arctg} x) + \cos^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Odtud

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$



# Hlavní body

- 1 Rychlost a hledání tečny
- 2 Derivace funkce
- 3 Vlastnosti derivace
- 4 Derivace elementárních funkcí: přehled a příklady
- 5 Další poznámky



# Rekapitulace

Tabulka zatím známých derivací:

$f(x)$	$f'(x)$	
$x^n$	$nx^{n-1}$	$x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
$x^n$	$nx^{n-1}$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n = -1, -2, \dots$
$x^\alpha$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$
$e^x$	$e^x$	$x \in \mathbb{R}$
$a^x$	$a^x \ln a$	$x \in \mathbb{R}, a > 0$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{tg}(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{cotg}(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$



# Rekapitulace

Pokračování...

$f(x)$	$f'(x)$	
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\operatorname{arctg}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{arccotg}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{arctg} x, \quad x \neq 0.$$



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{arctg} x, \quad x \neq 0.$$

Postupně použijeme:

1. derivace součtu,

$$f'(x) = \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)' + \operatorname{arctg}'(x)$$



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{arctg} x, \quad x \neq 0.$$

Postupně použijeme:

- 1 derivace součtu,
- 2 znalost derivace funkcí  $\operatorname{arctg}(x)$ ,  $x^{-1}$  a derivace složené funkce,

$$f'(x) \stackrel{1}{=} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right)' + \operatorname{arctg}'(x) \stackrel{2}{=} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{1 + x^2}$$





# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{arctg} x, \quad x \neq 0.$$

Postupně použijeme:

- 1 derivace součtu,
- 2 znalost derivace funkcí  $\operatorname{arctg}(x)$ ,  $x^{-1}$  a derivace složené funkce,
- 3 algebraické úpravy.

$$f'(x) \stackrel{1}{=} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right)' + \operatorname{arctg}'(x) \stackrel{2}{=} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{1 + x^2} \stackrel{3}{=} 0$$



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = x^x, \quad x > 0.$$



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = x^x, \quad x > 0.$$

Postupně použijeme:

- 1 úprava výrazu před samotnou derivací,

$$f'(x) \stackrel{1}{=} \left( e^{x \ln x} \right)'$$



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = x^x, \quad x > 0.$$

Postupně použijeme:

- 1 úprava výrazu před samotnou derivací,
- 2 derivace složené funkce, znalost derivace funkce  $e^x$ ,

$$f'(x) \stackrel{1}{=} \left( e^{x \ln x} \right)' \stackrel{2}{=} e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)'$$



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = x^x, \quad x > 0.$$

Postupně použijeme:

- 1 úprava výrazu před samotnou derivací,
- 2 derivace složené funkce, znalost derivace funkce  $e^x$ ,
- 3 derivace součinu a znalost derivace  $\ln x$ , resp.  $x$ ,

$$f'(x) \stackrel{1}{=} \left( e^{x \ln x} \right)' \stackrel{2}{=} e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' \stackrel{3}{=} e^{x \ln x} \cdot \left( 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right)$$



# Derivace funkce: příklady

## Příklad.

Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = x^x, \quad x > 0.$$

Postupně použijeme:

- 1 úprava výrazu před samotnou derivací,
- 2 derivace složené funkce, znalost derivace funkce  $e^x$ ,
- 3 derivace součinu a znalost derivace  $\ln x$ , resp.  $x$ ,
- 4 algebraické úpravy.

$$f'(x) \stackrel{1}{=} \left( e^{x \ln x} \right)' \stackrel{2}{=} e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' \stackrel{3}{=} e^{x \ln x} \cdot \left( 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) \stackrel{4}{=} x^x (1 + \ln x).$$



# Hlavní body

- 1 Rychlost a hledání tečny
- 2 Derivace funkce
- 3 Vlastnosti derivace
- 4 Derivace elementárních funkcí: přehled a příklady
- 5 Další poznámky



# Jednostranné derivace

## Poznámka:

Lze definovat derivaci funkce  $f$  v bodě  $a$  zleva i zprava jako limity

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{a} \quad f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

## Příklad.

Uvažme funkci  $f(x) = |x|$ . Pro  $x \neq 0 = a$  platí

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sgn} x.$$

Tudíž

$$f'_+(0) = 1 \quad \text{a} \quad f'_-(0) = -1,$$

ale  $f'(0)$  neexistuje.



# Derivace vyšších řádů

## Poznámka:

Derivací funkce  $f$  dostáváme novou funkci  $f'$ , jejíž definiční obor ovšem může být menší než původní  $D_f$ . Nyní můžeme znovu derivovat  $f'$ , tj. sestrojít  $f''$ . Rekurzivně tedy definujeme

$$f^{(0)}(x) = f(x), \quad f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x), \quad n \geq 1.$$



# Derivace vyšších řádů

## Poznámka:

Derivací funkce  $f$  dostáváme novou funkci  $f'$ , jejíž definiční obor ovšem může být menší než původní  $D_f$ . Nyní můžeme znovu derivovat  $f'$ , tj. sestrojít  $f''$ . Rekurzivně tedy definujeme

$$f^{(0)}(x) = f(x), \quad f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x), \quad n \geq 1.$$

## Příklad.

Například pro  $f(x) = x^3 - 2x + 4$  máme

$$f'(x) = 3x^2 - 2, \quad f''(x) = 6x, \quad f'''(x) = 6, \quad f^{(n)}(x) = 0 \quad n \geq 4.$$

