Základy matematické analýzy

Primitivní funkce

Pavel Hrabák[1], Tomáš Kalvoda[2], Ivo Petr[3]

[1]pavel.hrabak@fit.cvut.cz [2]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [3]ivo.petr@fit.cvut.cz,

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

4. března 2021
ZS 2020/2021

Hlavní body

Hlavní body

Primitivní funkce

Definice (primitivní funkce / *antiderivative*):

Nechť funkce f je definována na intervalu (a,b), kde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Funkci F splňující podmínku

$$F'(x) = f(x) \text{ pro každé } x \in (a,b)$$

nazýváme **primitivní funkcí** k funkci f na intervalu (a,b).

Poznámka:

Z definice ihned plyne, že F je diferencovatelná v každém bodě intervalu (a,b) a tedy je i spojitá na (a,b).

Primitivní funkce

Příklad.

Funkce $F(x) = x^3$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = 3x^2$ na libovolném intervalu (a, b).

Primitivní funkce

Příklad.

Funkce $F(x) = x^3$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = 3x^2$ na libovolném intervalu (a, b).

Příklad.

Funkce $F(x) = \ln x$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = \frac{1}{x}$ na libovolném intervalu $(a, b) \subset (0, +\infty)$.

Primitivní funkce

Příklad.

Funkce $F(x) = x^3$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = 3x^2$ na libovolném intervalu (a, b).

Příklad.

Funkce $F(x) = \ln x$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = \frac{1}{x}$ na libovolném intervalu $(a, b) \subset (0, +\infty)$.

Příklad.

Funkce $F(x) = \operatorname{arctg} x$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ na libovolném intervalu (a, b).

(Ne)jednoznačnost primitivní funkce

Věta:

Nechť F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b). Pak G je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b) právě tehdy, když existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že

$$G(x) = F(x) + c, \quad \text{pro každé } x \in (a, b).$$

(Ne)jednoznačnost primitivní funkce

Věta:

Nechť F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b). Pak G je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b) právě tehdy, když existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že

$$G(x) = F(x) + c, \quad \text{pro každé } x \in (a, b).$$

Důkaz.

Pokud F a G jsou funkce primitivní k f na intervalu (a, b), potom

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \text{pro všechna } x \in (a, b).$$

Funkce $F - G$ je proto konstantní na intervalu (a, b).

(Ne)jednoznačnost primitivní funkce

Věta:

Nechť F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b). Pak G je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b) právě tehdy, když existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že

$$G(x) = F(x) + c, \quad \text{pro každé } x \in (a, b).$$

Důkaz.

Pokud F a G jsou funkce primitivní k f na intervalu (a, b), potom

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \text{pro všechna } x \in (a, b).$$

Funkce $F - G$ je proto konstantní na intervalu (a, b).

Naopak, je-li $G(x) = F(x) + c$, pro libovolné $x \in (a, b)$, pak $G'(x) = F'(x)$. $\square$

Neurčitý integrál

Definice (neurčitý integrál / *indefinite integral*):

Nechť k funkci f existuje primitivní funkce na intervalu (a, b). Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na (a, b) nazýváme **neurčitým integrálem** a značíme jej $\int f$ nebo $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Neurčitý integrál

Definice (neurčitý integrál / *indefinite integral*):

Nechť k funkci f existuje primitivní funkce na intervalu (a, b). Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na (a, b) nazýváme **neurčitým integrálem** a značíme jej $\int f$ nebo $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Poznámka (Terminologie):

Najdeme-li k f primitivní funkci F v intervalu (a, b), zapisujeme tento fakt obvykle

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c.$$

Funkci f nazýváme **integrovanou funkcí**, x **integrační proměnnou** a c **integrační konstantou**. Úkolu určit $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ říkáme „najít primitivní funkci k f", nebo „vypočítat integrál z f", nebo „integrovat f".

Existence primitivní funkce

Poznámka:

- Je-li funkce g diferencovatelná na intervalu (a, b), pak přímo z definice plyne

$$\int g'(x)\,\mathrm{d}x = g(x) + c, \quad x \in (a, b).$$

Existence primitivní funkce

Poznámka:

- Je-li funkce g diferencovatelná na intervalu (a,b), pak přímo z definice plyne

$$\int g'(x)\,\mathrm{d}x = g(x) + c, \quad x \in (a,b).$$

- Má-li funkce f primitivní funkci na intervalu (a,b), potom opět přímo z definice plyne

$$\left(\int f\right)'(x) = f(x), \quad x \in (a,b).$$

Existence primitivní funkce

Poznámka:

- Je-li funkce g diferencovatelná na intervalu (a,b), pak přímo z definice plyne

$$\int g'(x)\,\mathrm{d}x = g(x) + c, \quad x \in (a,b).$$

- Má-li funkce f primitivní funkci na intervalu (a,b), potom opět přímo z definice plyne

$$\left(\int f\right)'(x) = f(x), \quad x \in (a,b).$$

Věta (Postačující podmínka pro existenci primitivní funkce):

Nechť funkce f je spojitá na intervalu (a,b). Pak funkce f má na tomto intervalu primitivní funkci.

Primitivní funkce elementárních funkcí...

Ze znalosti derivací můžeme ihned sestavit tabulku primitivních funkcí:

vzorec	interval, parametry
$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$
$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq -2$
$\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$x \in (0, +\infty)$, $\alpha \notin \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + C$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$x \in \mathbb{R}$, $a > 0$ a $a \neq 1$
$\int \sin(x) \,\mathrm{d}x = -\cos(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$

. . . pokračování

vzorec	interval, parametry
$\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg}(x) + C$	$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg}(x) + C$	$x \in \left(k\pi,\ \pi + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x) + C$	$x \in (-1, 1)$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg}(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$

Základní pravidla pro integrování

Věta:

Nechť F, resp. G, je primitivní funkce k funkci f, resp. g, na intervalu (a, b) a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

Základní pravidla pro integrování

Věta:

Nechť F, resp. G, je primitivní funkce k funkci f, resp. g, na intervalu (a, b) a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

- $F + G$ je primitivní funkcí k funkci $f + g$ na intervalu (a, b),

Základní pravidla pro integrování

Věta:

Nechť F, resp. G, je primitivní funkce k funkci f, resp. g, na intervalu (a, b) a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

- $F + G$ je primitivní funkcí k funkci $f + g$ na intervalu (a, b),
- αF je primitivní funkcí k funkci αf na intervalu (a, b).

Základní pravidla pro integrování

Věta:

Nechť F, resp. G, je primitivní funkce k funkci f, resp. g, na intervalu (a, b) a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

- $F + G$ je primitivní funkcí k funkci $f + g$ na intervalu (a, b),
- αF je primitivní funkcí k funkci αf na intervalu (a, b).

Důkaz.

Plyne ihned z pravidla po derivaci součtu funkcí a konstantního násobku funkce. □

Základní pravidla pro integrování

Věta:

Nechť F, resp. G, je primitivní funkce k funkci f, resp. g, na intervalu (a,b) a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

- $F+G$ je primitivní funkcí k funkci $f+g$ na intervalu (a,b),
- αF je primitivní funkcí k funkci αf na intervalu (a,b).

Důkaz.

Plyne ihned z pravidla po derivaci součtu funkcí a konstantního násobku funkce. □

Poznámka:

Větu symbolicky zapisujeme a při výpočtech využíváme takto:

$$\int (f+g) = \int f + \int g \quad \text{a} \quad \int (\alpha f) = \alpha \int f.$$

Příklad

Příklad.

Vypočtěte
$$\int \left(4x^2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) \mathrm{d}x.$$

Příklad

Příklad.

Vypočtěte

$$\int \left(4x^2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) \mathrm{d}x.$$

$$\int \left(4x^2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) \mathrm{d}x = 4\int x^2 \,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x + \int x^{-2/3} \,\mathrm{d}x =$$

$$= 4 \cdot \frac{x^3}{3} - \ln|x| + \frac{x^{1/3}}{1/3} + C = \frac{4}{3}x^3 - \ln|x| + 3x^{1/3} + C.$$

Příklad

Příklad.

Vypočtěte

$$\int \left(2^x + 3^x\right)^2 \mathrm{d}x.$$

Příklad

Příklad.

Vypočtěte

$$\int \left(2^x + 3^x\right)^2 \mathrm{d}x.$$

$$\begin{aligned}
\int \left(2^x + 3^x\right)^2 \mathrm{d}x &= \int \left(2^{2x} + 2 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3^{2x}\right) \mathrm{d}x = \\
&= \int 4^x \mathrm{d}x + 2 \int 6^x \mathrm{d}x + \int 9^x \mathrm{d}x = \\
&= \frac{4^x}{\ln 4} + 2 \cdot \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C.
\end{aligned}$$

Hlavní body

Integrace per partes

Věta (Per partes / *integration by parts*):

Nechť funkce f je diferencovatelná v intervalu (a,b) a G je primitivní funkce k funkci g na intervalu (a,b) a konečně nechť existuje primitivní funkce k funkci $f'G$. Potom existuje primitivní funkce k funkci fg a platí

$$\int fg = fG - \int f'G.$$

Integrace per partes

Věta (Per partes / *integration by parts*):

Nechť funkce f je diferencovatelná v intervalu (a,b) a G je primitivní funkce k funkci g na intervalu (a,b) a konečně nechť existuje primitivní funkce k funkci $f'G$. Potom existuje primitivní funkce k funkci fg a platí

$$\int fg = fG - \int f'G.$$

Důkaz.

Tvrzení věty můžeme přímo ověřit derivováním

$$\left(fG - \int f'G\right)' = (fG)' - f'G = f'G + fG' - f'G = fG' = fg.$$

Všimněte si, že ve výpočtu jsme použili pravidlo pro derivování součinu dvou funkcí. $\square$

Integrace per partes

Poznámka:

- „per partes“, česky „po částech“.
- Umožňuje integrovat **některé** součiny funkcí. Srovnejte obtížnost s výpočtem derivace součinu funkcí.

Aby bylo jasné jak per partes používáme budeme v následujících výpočtech používat jednoduchou notaci:

$$\int fg = \left| \begin{array}{cc} f & g \\ & \\ & \end{array} \right| =$$

Integrace per partes

Poznámka:

- „per partes“, česky „po částech“.
- Umožňuje integrovat **některé** součiny funkcí. Srovnejte obtížnost s výpočtem derivace součinu funkcí.

Aby bylo jasné jak per partes používáme budeme v následujících výpočtech používat jednoduchou notaci:

$$\int fg = \left| \begin{array}{cc} f & g \\ \downarrow & \downarrow \\ f' & G \end{array} \right| =$$

Integrace per partes

Poznámka:

- „per partes“, česky „po částech“.
- Umožňuje integrovat **některé** součiny funkcí. Srovnejte obtížnost s výpočtem derivace součinu funkcí.

Aby bylo jasné jak per partes používáme budeme v následujících výpočtech používat jednoduchou notaci:

$$\int fg = \left| \begin{array}{cc} f & g \\ & \\ f' & G \end{array} \right| = fG$$

Integrace per partes

Poznámka:

- „per partes“, česky „po částech“.
- Umožňuje integrovat **některé** součiny funkcí. Srovnejte obtížnost s výpočtem derivace součinu funkcí.

Aby bylo jasné jak per partes používáme budeme v následujících výpočtech používat jednoduchou notaci:

$$\int fg = \left| \begin{array}{cc} f & g \\ & \\ f' & G \end{array} \right| = fG - \int f'G.$$

Příklady

Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál $\int x \sin x \, \mathrm{d}x$.

Příklady

Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál $\int x \sin x \,\mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int x \sin x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} f(x) = x & g(x) = \sin x \\ f'(x) = 1 & G(x) = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x + \int \cos x \,\mathrm{d}x =$$

$$= -x\cos x + \sin x + C.$$

Příklady

Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál $\int x \sin x \, \mathrm{d}x$.

Řešení:

$$\int x \sin x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} f(x) = x & g(x) = \sin x \\ f'(x) = 1 & G(x) = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x + \int \cos x \, \mathrm{d}x =$$

$$= -x \cos x + \sin x + C.$$

Připomeňme, že výsledek můžeme snadno ověřit:

$$\big(-x \cos x + \sin x + C \big)' = -\cos x + x \sin x + \cos x + 0 = x \sin x.$$

Příklady

Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál $\int x^2 e^x \, \mathrm{d}x$.

Příklady

Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál $\int x^2 e^x \,\mathrm{d}x$.

Nyní je potřeba per partes použít dvakrát.

$$\int x^2 e^x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{cc} x^2 & e^x \\ 2x & e^x \end{array} \right| = x^2 e^x - \int 2x e^x \,\mathrm{d}x = x^2 e^x - 2 \int x e^x \,\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{cc} x & e^x \\ 1 & e^x \end{array} \right| = x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x \,\mathrm{d}x \right) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x =$$

$$= \left(x^2 - 2x + 2 \right) e^x + C.$$

Příklady

Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál $\int \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$.

Příklady

Příklad.

Vypočtěte neurčitý integrál $\int \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$.

Integrand sice na první pohled není ve tvaru součinu, ale můžeme postupovat následovně:

$$\int \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{cc} \operatorname{arctg} x & 1 \\ \frac{1}{1+x^2} & x \end{array} \right| = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \underbrace{\frac{2x}{1+x^2}}_{(\ln(1+x^2))'} \, \mathrm{d}x = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) + C.$$

Hlavní body

Substituce v neurčitém integrálu (v1)

Věta (O substituci I):

Nechť pro funkce f a φ platí

1. f má primitivní funkci F na intervalu (a,b),
2. φ je na intervalu (α,β) diferencovatelná,
3. $\varphi\big((\alpha,\beta)\big) \subset (a,b)$.

Pak funkce $f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)$ má primitivní funkci na intervalu (α,β) a platí

$$\int f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F\big(\varphi(x)\big) + C.$$

Substituce v neurčitém integrálu (v1)

Důkaz.

F je primitivní funkcí k funkci f, tj. $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$. Podle věty o derivaci složené funkce dostaneme

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x) = f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x),$$

pro každé $x \in (\alpha, \beta)$. $\square$

Substituce v neurčitém integrálu (v1)

Důkaz.

F je primitivní funkcí k funkci f, tj. $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$. Podle věty o derivaci složené funkce dostaneme

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x) = f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x),$$

pro každé $x \in (\alpha, \beta)$. □

Poznámka:

Jedná se vlastně o „derivaci složené funkce naruby“.

Příklad

Příklad.

Vypočtěte

$$\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x.$$

Příklad

Příklad.

Vypočtěte

$$\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x.$$

Použijeme substituci $y = \varphi(x) = \frac{1}{x}$. Potom $\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Proto

$$\int \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{-\varphi'(x)} \sin \underbrace{\frac{1}{x}}_{\varphi(x)} \, \mathrm{d}x = -\int \sin y \, \mathrm{d}y = \cos y + C = \cos \frac{1}{x} + C.$$

Příklad.

Nalezněte primitivní funkci k funkci $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ na intervalu $J = \left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$.

Příklad.

Nalezněte primitivní funkci k funkci $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ na intervalu $J = \left(\frac{\pi}{2}, \ \frac{3\pi}{2}\right)$.

Funkce f je na intervalu J spojitá a má zde tedy primitivní funkci. Nejprve upravme integrand

$$\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\cos(x)} \cdot \big(-\sin(x)\big) \mathrm{d}x.$$

Použijeme větu o substituci, kde zvolíme $f(y) = \frac{1}{y}$ a $y = \varphi(x) = \cos(x)$.

Příklad.

Nalezněte primitivní funkci k funkci $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ na intervalu $J = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Funkce f je na intervalu J spojitá a má zde tedy primitivní funkci. Nejprve upravme integrand

$$\int \mathrm{tg}\, x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\cos(x)} \cdot \big(-\sin(x)\big) \mathrm{d}x.$$

Použijeme větu o substituci, kde zvolíme $f(y) = \frac{1}{y}$ a $y = \varphi(x) = \cos(x)$. Funkce φ zobrazuje interval J na interval $(-1, 0)$ kde má f primitivní funkci $F(y) = \ln(-y)$. Navíc $\varphi'(x) = -\sin(x)$. Větu lze tudíž použít a dostáváme

$$\int \mathrm{tg}(x) \, \mathrm{d}x = -\ln\big(-\cos(x)\big) + C, \quad x \in J.$$

Příklad.

Nalezněte primitivní funkci k funkci $f(x) = \mathrm{tg}(x)$ na intervalu $J = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Funkce f je na intervalu J spojitá a má zde tedy primitivní funkci. Nejprve upravme integrand

$$\int \mathrm{tg}\, x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) \mathrm{d}x.$$

Použijeme větu o substituci, kde zvolíme $f(y) = \frac{1}{y}$ a $y = \varphi(x) = \cos(x)$. Funkce φ zobrazuje interval J na interval $(-1, 0)$ kde má f primitivní funkci $F(y) = \ln(-y)$. Navíc $\varphi'(x) = -\sin(x)$. Větu lze tudíž použít a dostáváme

$$\int \mathrm{tg}(x)\,\mathrm{d}x = -\ln\big(-\cos(x)\big) + C, \quad x \in J.$$

Často se též substituce zapisuje jako $y = \cos x$, $\mathrm{d}y = -\sin x \,\mathrm{d}x$ a

$$\int \mathrm{tg}\, x \,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{y} \,\mathrm{d}y = -\ln|y| + C = -\ln\big(-\cos(x)\big) + C.$$

Substituce v neurčitém integrálu (v2)

Věta (O substituci II):

Nechť f je definována na intervalu (a, b) a nechť φ je bijekce intervalu (α, β) na (a, b) s nenulovou konečnou derivací v každém bodě intervalu (α, β). Pak platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = G(t) + C \quad \Longrightarrow \quad \int f(x)\mathrm{d}x = G\big(\varphi^{-1}(x)\big) + C$$

Substituce v neurčitém integrálu (v2)

Věta (O substituci II):

Nechť f je definována na intervalu (a,b) a nechť φ je bijekce intervalu (α,β) na (a,b) s nenulovou konečnou derivací v každém bodě intervalu (α,β). Pak platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = G(t) + C \quad \Longrightarrow \quad \int f(x)\mathrm{d}x = G\bigl(\varphi^{-1}(x)\bigr) + C$$

Důkaz.

Pomocí věty o derivaci inverzní funkce odvodíme, že

$$\Bigl(G\bigl(\varphi^{-1}(x)\bigr)\Bigr)' = G'\bigl(\varphi^{-1}(x)\bigr) \cdot \frac{1}{\varphi'\bigl(\varphi^{-1}(x)\bigr)} =$$

$$= f\Bigl(\varphi\bigl(\varphi^{-1}(x)\bigr)\Bigr) \cdot \varphi'\bigl(\varphi^{-1}(x)\bigr) \cdot \frac{1}{\varphi'\bigl(\varphi^{-1}(x)\bigr)} = f(x). \qquad \square$$

Příklad

Příklad.

Pomocí předchozí věty spočtěte známý integrál

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C.$$

Příklad

Příklad.

Pomocí předchozí věty spočtěte známý integrál

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C.$$

Integrand

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

je definován na intervalu $(a,b) = (-1,1)$. Abychom se zbavili odmocniny ve jmenovateli položme

$$x = \varphi(t) = \sin(t), \quad t \in (\alpha,\beta) := \big(-{}^{\pi}/_{2}, {}^{\pi}/_{2}\big).$$

Příklad, pokračování...

Funkce $\sin$ je na intervalu (α, β) rostoucí s nenulovou derivací $\varphi'(t) = \cos t$. Dále

$$G(t) = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t \,\mathrm{d}t = \\ = \int \frac{\cos t}{\cos t}\,\mathrm{d}t = \int 1\,\mathrm{d}t = t + C.$$

Protože $t = \arcsin(x)$ uzavíráme,

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x) + C.$$

Hlavní body

Hledání neurčitého integrálu

- Jenom malá část elementárních funkcí má primitivní funkci, která by byla elementární. Víme jen, že primitivní funkce existuje, ale nelze ji vyjádřit pomocí konečně mnoha operací (součet, součin, podíl, skládání a invertování) ze základních funkcí. Jako příklad uveďme

$$\int e^{-x^2}\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{\ln(x)}\mathrm{d}x.$$

Důkaz tohoto tvrzení v této přednášce nebude podán.

Hledání neurčitého integrálu

- Jenom malá část elementárních funkcí má primitivní funkci, která by byla elementární. Víme jen, že primitivní funkce existuje, ale nelze ji vyjádřit pomocí konečně mnoha operací (součet, součin, podíl, skládání a invertování) ze základních funkcí. Jako příklad uveďme

$$\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x.$$

  Důkaz tohoto tvrzení v této přednášce nebude podán.

- Rozpoznat, kdy funkce má „rozumnou“ primitivní funkci, je často složité. Obecný návod (algoritmus) „jak integrovat“ lze dát pouze v případě racionálních funkcí a funkcí které lze na racionální vhodnou substitucí převést.

Hledání neurčitého integrálu

- Jenom malá část elementárních funkcí má primitivní funkci, která by byla elementární. Víme jen, že primitivní funkce existuje, ale nelze ji vyjádřit pomocí konečně mnoha operací (součet, součin, podíl, skládání a invertování) ze základních funkcí. Jako příklad uveďme

$$\int e^{-x^2} \mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{\ln(x)} \mathrm{d}x.$$

  Důkaz tohoto tvrzení v této přednášce nebude podán.

- Rozpoznat, kdy funkce má „rozumnou" primitivní funkci, je často složité. Obecný návod (algoritmus) „jak integrovat" lze dát pouze v případě racionálních funkcí a funkcí které lze na racionální vhodnou substitucí převést.

- Integrace, na rozdíl od rutinního derivování, vyžaduje **cvik a zkušenost**.

Poznámka:

Vždy je však pomocí derivování možné ověřit, zda jsme ve výpočtu neudělali chybu!

Poznámka:

Vždy je však pomocí derivování možné ověřit, zda jsme ve výpočtu neudělali chybu!

Příklad.

Vypočtěte $\int xe^{x^2}\mathrm{d}x$ a výsledek ověřte.

Pomocí substituce $y = x^2$,

$$\int xe^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int e^y \mathrm{d}y = \frac{1}{2}e^y + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

Ověření,

$$\left(\frac{1}{2}e^{x^2} + C\right)' = \frac{1}{2}\left(e^{x^2}\right)' + 0 = \frac{1}{2}\cdot 2xe^{x^2} = xe^{x^2}.$$

Racionální lomené funkce

- Pro **racionální lomené funkce**, tedy funkce tvaru

$$\frac{p(x)}{q(x)},$$

kde p a q jsou polynomy, lze dát obecný algoritmus pro jejich integraci (metoda integrace pomocí rozkladu na parciální zlomky).

Racionální lomené funkce

- Pro **racionální lomené funkce**, tedy funkce tvaru
$$\frac{p(x)}{q(x)},$$
kde p a q jsou polynomy, lze dát obecný algoritmus pro jejich integraci (metoda integrace pomocí rozkladu na parciální zlomky).
- Touto problematikou se zde nebudeme plně zabývat. Omezíme se na případ kdy polynom $q(x)$ ve jmenovateli je stupně nejvýše dvě.

Racionální lomené funkce

- Pro **racionální lomené funkce**, tedy funkce tvaru
$$\frac{p(x)}{q(x)},$$
kde p a q jsou polynomy, lze dát obecný algoritmus pro jejich integraci (metoda integrace pomocí rozkladu na parciální zlomky).

- Touto problematikou se zde nebudeme plně zabývat. Omezíme se na případ kdy polynom $q(x)$ ve jmenovateli je stupně nejvýše dvě.

- V následující části přednášky tedy rozebereme, jak integrovat
$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x,$$
kde p je libovolný polynom a q je polynom stupně **nejvýše** dvě.

Stručný popis metody

Integrujeme $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$, stupeň q je menší nebo roven 2.

Stručný popis metody

Integrujeme $\int \frac{p(x)}{q(x)} \, \mathrm{d}x$, stupeň q je menší nebo roven 2.

1. Pokud to lze, **vyděl** polynom p polynomem q, pak

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

kde stupeň polynomu r je nejvýše 1. Polynom s zintegrujeme snadno.

Stručný popis metody

Integrujeme $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$, stupeň q je menší nebo roven 2.

1. Pokud to lze, **vyděl** polynom p polynomem q, pak
$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$
kde stupeň polynomu r je nejvýše 1. Polynom s zintegrujeme snadno.
2. Pokud je stupeň polynomu q roven 1, pak použijeme $\int \frac{b}{x-a}\,\mathrm{d}x = b\ln|x-a| + C$.

Stručný popis metody

Integrujeme $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$, stupeň q je menší nebo roven 2.

1. Pokud to lze, **vyděl** polynom p polynomem q, pak
$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$
kde stupeň polynomu r je nejvýše 1. Polynom s zintegrujeme snadno.
2. Pokud je stupeň polynomu q roven 1, pak použijeme $\int \frac{b}{x-a}\,\mathrm{d}x = b\ln|x-a| + C$.
3. Pokud má polynom q dvojnásobný kořen c, pak $\int \frac{ax+b}{(x-c)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{a}{x-c} + \frac{b+ac}{(x-c)^2}\,\mathrm{d}x = a\ln|x-c| - \frac{b+ac}{x-c} + C$.

Stručný popis metody

Integrujeme $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$, stupeň q je menší nebo roven 2.

1. Pokud to lze, **vyděl** polynom p polynomem q, pak
$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$
kde stupeň polynomu r je nejvýše 1. Polynom s zintegrujeme snadno.
2. Pokud je stupeň polynomu q roven 1, pak použijeme $\int \frac{b}{x-a}\,\mathrm{d}x = b\ln|x-a| + C$.
3. Pokud má polynom q dvojnásobný kořen c, pak $\int \frac{ax+b}{(x-c)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{a}{x-c} + \frac{b+ac}{(x-c)^2}\,\mathrm{d}x = a\ln|x-c| - \frac{b+ac}{x-c} + C$.
4. Pokud je stupeň polynomu q roven 2 a jeho diskriminant je kladný, pak $\frac{r}{q}$ převedeme na tvar $\frac{b_1}{x-a_1} + \frac{b_2}{x-a_2}$ a použijeme **předchozí bod**.

Stručný popis metody

Integrujeme $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$, stupeň q je menší nebo roven 2.

1. Pokud to lze, **vyděl** polynom p polynomem q, pak
$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$
kde stupeň polynomu r je nejvýše 1. Polynom s zintegrujeme snadno.
2. Pokud je stupeň polynomu q roven 1, pak použijeme $\int \frac{b}{x-a}\,\mathrm{d}x = b\ln|x-a| + C$.
3. Pokud má polynom q dvojnásobný kořen c, pak $\int \frac{ax+b}{(x-c)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{a}{x-c} + \frac{b+ac}{(x-c)^2}\,\mathrm{d}x = a\ln|x-c| - \frac{b+ac}{x-c} + C$.
4. Pokud je stupeň polynomu q roven 2 a jeho diskriminant je kladný, pak $\frac{r}{q}$ převedeme na tvar $\frac{b_1}{x-a_1} + \frac{b_2}{x-a_2}$ a použijeme **předchozí bod**.
5. Pokud je stupeň polynomu q roven 2 a jeho diskriminat je záporný, pak použijeme **doplnění jmenovatele na čtverec**, integrál pak vede na arctg.

Příklady

Ukázky použití metody na postupně se komplikujících příkladech.

Příklady

Ukázky použití metody na postupně se komplikujících příkladech.

- $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int x - 1 + \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C.$

Příklady

Ukázky použití metody na postupně se komplikujících příkladech.

- $$\int \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int x - 1 + \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C.$$
- $$\int \frac{3x-3}{(x-2)(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln|x-2| + 2\ln|x+1| + C.$$

Příklady

Ukázky použití metody na postupně se komplikujících příkladech.

- $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int x - 1 + \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C.$
- $\displaystyle\int \frac{3x-3}{(x-2)(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln|x-2| + 2\ln|x+1| + C.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \operatorname{arctg} y + C =$ $\operatorname{arctg}(x-1) + C$, kde jsme použili substituci $y = x - 1$.

Příklady

Ukázky použití metody na postupně se komplikujících příkladech.

- $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int x - 1 + \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C.$
- $\displaystyle\int \frac{3x-3}{(x-2)(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln|x-2| + 2\ln|x+1| + C.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \operatorname{arctg} y + C =$ $\operatorname{arctg}(x-1) + C$, kde jsme použili substituci $y = x - 1$.
- $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2+2}{1+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\left((x-1)^2\right)'}{1+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x +$ $\displaystyle\int \frac{1}{1+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(1+(x-1)^2\right) + \int \frac{1}{1+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$, a na druhý integrál použijeme předchozí bod.