

# Semestrální domácí úkol

BIK-ZMA 2020/2021

---

Následující domácí úkol slouží jako součást přípravy na zkoušku. Vypracujte jej proto sami za pomoci látky probrané na přednášce či cvičení. Úkol odevzdejte prostřednictvím aplikace MS Teams v teamu BIK-ZMA **nejpozději do 17. 1. 2021.**

Svá řešení důkladně zdůvodněte, je-li to možné odkažte se na tvrzení z přednášky. Za vypracování je možno získat nejvýše **25 bodů**. Pro řešení nelze používat matematický software.

---

## Okruh 1. Reálné posloupnosti

1. (2 body) Vypočtete limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n(n^4 - 1)}{4 \cdot 3^n + n^7}.$$

2. (2 body) Rozhodněte o existenci limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2 \cdot (-1)^{n^2}) \cdot \frac{n^2 - n + 2}{n + 1}.$$

## Okruh 2. Zobrazení a funkce, limity funkcí

1. (2 body) Vypočtete

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{e}{2} \arctan x \right)^{\frac{1}{x}}.$$

2. (2 body) Vypočtete limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{n}} \right).$$

3. (2 body) Nalezněte všechny hodnoty reálného parametru  $a \in \mathbb{R}$  tak, aby funkce

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

byla spojitá na celém  $D_f$ .

## Okruh 3. Průběh funkce

1. (4 body) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{2x^2}{1 + x^3}.$$

Tzn. určete  $D_f$ ,  $H_f$ , limity v krajních bodech  $D_f$ , spojitost, existenci derivací, intervaly monotonie, lokální a globální extrémů. Nalezněte asymptoty a načrtněte graf.

2. (1 bod) S využitím předchozích výsledků určete kolik kořenů má rovnice

$$\frac{2x^2}{1+x^3} - a = 0$$

v závislosti na hodnotě parametru  $a \in \mathbb{R}$ .

#### Okruh 4. Integrální počet

1. (2 body) Nalezněte primitivní funkci k funkci

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

2. (2 body) Spočtěte integrál

$$\int_0^{+\infty} 2xe^{-2x} dx.$$

#### Okruh 5. Řady a Taylorův polynom

1. (2 body) Rozhodněte o konvergenci číselné řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt{k}}{k^2 + k}.$$

Vyšetřete i absolutní konvergenci.

2. (2 body) Určete pro která  $x \in \mathbb{R}$  mocninná řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} (x-2)^k$$

konverguje.

3. (2 body) Vypočtěte 3. Taylorův polynom funkce

$$f(x) = x^2 + \sin^2 x$$

v bodě 0. Dále odhadněte maximální velikost absolutní chyby mezi funkčními hodnotami funkce  $f(x)$  a tohoto Taylorova polynomu na intervalu  $(-1, 1)$ .