Základy matematické analýzy

Věty o posloupnostech

Pavel Hrabák[1], Tomáš Kalvoda[2], Ivo Petr[3]

[1]pavel.hrabak@fit.cvut.cz [2]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [3]ivo.petr@fit.cvut.cz,

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

4. března 2021
ZS 2020/2021

Hlavní body

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$$

Hlavní body

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

1. Algebraické operace na rozšířené reálné ose
2. Věty o limitách
3. Kritéria konvergence
4. Nerovnosti a limity posloupností
5. Příklady
6. Podílové kritérium

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$$

Definice operací na $\overline{\mathbb{R}}$

$\overline{\mathbb{R}}$ je $\mathbb{R}$ rozšířená o $+\infty$ a $-\infty$. Nyní rozšíříme na $\overline{\mathbb{R}}$ algebraické operace $+$ a $\cdot$:

Definice:

Nechť $a \in \overline{\mathbb{R}}$, v závislosti na jeho hodnotě definujeme

- $a > -\infty$: $\quad a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$,
- $a < +\infty$: $\quad a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$,
- $a > 0$: $\quad a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = +\infty$,
- $a < 0$: $\quad a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = -\infty$,
- $a > 0$: $\quad a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty$,
- $a < 0$: $\quad a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = +\infty$.
- $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$.

Definice operací na $\overline{\mathbb{R}}$

$\overline{\mathbb{R}}$ je $\mathbb{R}$ rozšířená o $+\infty$ a $-\infty$. Nyní rozšíříme na $\overline{\mathbb{R}}$ algebraické operace $+$ a $\cdot$:

Definice:

Nechť $a \in \overline{\mathbb{R}}$, v závislosti na jeho hodnotě definujeme

- $a > -\infty$: $\quad a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$,
- $a < +\infty$: $\quad a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$,
- $a > 0$: $\quad a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = +\infty$,
- $a < 0$: $\quad a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = -\infty$,
- $a > 0$: $\quad a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty$,
- $a < 0$: $\quad a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = +\infty$.
- $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$.

Poznámka:

Rozdíl definujeme vztahem $a - b := a + (-b)$, podíl $\frac{a}{b} := a \cdot \frac{1}{b}$, pouze v případě že výraz na pravé straně je definován. Klademe $-(+\infty) = -\infty$, $-(-\infty) = +\infty$, $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$ a $\sqrt[k]{+\infty} = +\infty$ pro libovolné $k \in \mathbb{N}$.

Definice operací na $\overline{\mathbb{R}}$:

Nedefinovány zůstávají výrazy

$$+\infty - (+\infty), \quad +\infty + (-\infty), \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty},$$
$$-\infty - (-\infty), \quad -\infty + (+\infty), \quad \frac{a}{0} \text{ pro } a \in \overline{\mathbb{R}},$$

Hlavní body

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$$

Věta o limitě součtu, součinu a podílu

Věta:

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou reálné posloupnosti mající limitu v $\overline{\mathbb{R}}$. Označme $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ a $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Platí

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b,$$
$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b,$$
$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b,$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b},$$

pokud jsou výrazy na pravých stranách definovány.

Věta o limitě součtu, součinu a podílu

Věta:

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou reálné posloupnosti mající limitu v $\overline{\mathbb{R}}$. Označme $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ a $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Platí

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b,$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b,$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b,$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b},$$

pokud jsou výrazy na pravých stranách definovány.

Poznámka:

Všimněte si, že aby podíl $\frac{a}{b}$ byl definován, musí být $b \neq 0$. Odtud již plyne existence $n_0 \in \mathbb{N}$ takového, že $b_n \neq 0$. Má tedy smysl zkoumat limitu posloupnosti $(a_n/b_n)_{n=1}^{\infty}$.

Poznámky k větě a příklad

- Věta o limitě součtu, součinu a podílu nám umožňuje **na základě znalosti** limit některých posloupností počítat limity jejich součtů, součinů a podílů.
- Před použitím věty je **typicky nutné nejprve provést vhodné algebraické úpravy** a dostat tak výraz do tvaru kde jsou splněny předpoklady věty.

Poznámky k větě a příklad

- Věta o limitě součtu, součinu a podílu nám umožňuje **na základě znalosti** limit některých posloupností počítat limity jejich součtů, součinů a podílů.
- Před použitím věty je **typicky nutné nejprve provést vhodné algebraické úpravy** a dostat tak výraz do tvaru kde jsou splněny předpoklady věty.

Příklad.

Vypočtěte

1. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n^3 - 4n + 5}{n - n^3}$,
2. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 - 4n + 5}{n - n^3}$,
3. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n^3 - 4n + 5}{n - n^2}$.

Limita, absolutní hodnota a odmocnina

Věta:

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je reálná posloupnost. Pak platí následující dvě tvrzení

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha|,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

Limita, absolutní hodnota a odmocnina

Věta:

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je reálná posloupnost. Pak platí následující dvě tvrzení

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha|,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

Věta:

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je reálná posloupnost s nezápornými členy a nechť $k \in \mathbb{N}$ je pevně dané číslo. Pak platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\alpha}.$$

Limita, absolutní hodnota a odmocnina

Věta:

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je reálná posloupnost. Pak platí následující dvě tvrzení

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha|,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

Věta:

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je reálná posloupnost s nezápornými členy a nechť $k \in \mathbb{N}$ je pevně dané číslo. Pak platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\alpha}.$$

Příklad.

Vypočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n+5} - n\right).$$

Hlavní body

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

1. Algebraické operace na rozšířené reálné ose
2. Věty o limitách
3. Kritéria konvergence
4. Nerovnosti a limity posloupností
5. Příklady
6. Podílové kritérium

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$$

Připomenutí

V úvodní přednášce jsme konstatovali, že množina reálných čísel splňuje ...

Poznámka (Axiom úplnosti):

Každý smršťující se systém vnořených uzavřených intervalů má neprázdný průnik. Přesněji, pokud

$$\langle a_n, b_n\rangle \supset \langle a_{n+1}, b_{n+1}\rangle \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N},$$
$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0,$$

pak existuje reálné x ležící v každém z intervalů $\langle a_n, b_n\rangle$, $n \in \mathbb{N}$.

Zanedlouho tuto důležitou vlastnost množiny reálných čísel využijeme.

Hromadný bod

- V minulé přednášce jsme zavedli pojem limity. Řada posloupností ale limity nemá.
- Chování posloupností „v nekonečnu" lze často popsat pomocí jejich hromadných bodů.

Hromadný bod

- V minulé přednášce jsme zavedli pojem limity. Řada posloupností ale limity nemá.
- Chování posloupností „v nekonečnu" lze často popsat pomocí jejich hromadných bodů.

Definice:

Bod $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ nazýváme **hromadným bodem** posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, právě když v **každém** okolí H_α bodu α leží nekonečně mnoho členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Hromadný bod

- V minulé přednášce jsme zavedli pojem limity. Řada posloupností ale limity nemá.
- Chování posloupností „v nekonečnu“ lze často popsat pomocí jejich hromadných bodů.

Definice:

Bod $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ nazýváme **hromadným bodem** posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, právě když v **každém** okolí H_α bodu α leží nekonečně mnoho členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

- Srovnejte s limitou: $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ je limitou posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, právě když v každém okolí H_α bodu α leží všechny členy posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **až na konečný počet výjimek**.

Hromadný bod

- V minulé přednášce jsme zavedli pojem limity. Řada posloupností ale limity nemá.
- Chování posloupností „v nekonečnu“ lze často popsat pomocí jejich hromadných bodů.

Definice:

Bod $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ nazýváme **hromadným bodem** posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, právě když v **každém** okolí H_α bodu α leží nekonečně mnoho členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

- Srovnejte s limitou: $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ je limitou posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, právě když v každém okolí H_α bodu α leží všechny členy posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **až na konečný počet výjimek**.
- Z výše uvedeného plyne, že je-li $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ limitou posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pak je i jejím hromadným bodem.

Hromadný bod

- V minulé přednášce jsme zavedli pojem limity. Řada posloupností ale limity nemá.
- Chování posloupností „v nekonečnu" lze často popsat pomocí jejich hromadných bodů.

Definice:

Bod $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ nazýváme **hromadným bodem** posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, právě když v **každém** okolí H_α bodu α leží nekonečně mnoho členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

- Srovnejte s limitou: $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ je limitou posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, právě když v každém okolí H_α bodu α leží všechny členy posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **až na konečný počet výjimek**.
- Z výše uvedeného plyne, že je-li $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ limitou posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pak je i jejím hromadným bodem.

Příklad.

Na rozdíl od limit může mít zadaná posloupnost více hromadných bodů. Např. posloupnost $\left((-1)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ má hromadné body 1 a -1. Nemá limitu.

Hromadný bod

Vztah mezi limitami posloupností, hromadnými body a vybranými posloupnostmi popisuje následující věta.

Hromadný bod

Vztah mezi limitami posloupností, hromadnými body a vybranými posloupnostmi popisuje následující věta.

Věta:

Bod $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ je hromadným bodem posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, právě když existuje vybraná posloupnost $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ mající limitu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

Hromadný bod

Vztah mezi limitami posloupností, hromadnými body a vybranými posloupnostmi popisuje následující věta.

Věta:

Bod $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ je hromadným bodem posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, právě když existuje vybraná posloupnost $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ mající limitu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

Důkaz.

- $\Leftarrow$: V každém okolí H_α leží nekonečně mnoho členů posloupnosti $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ a tím pádem i posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Hromadný bod

Vztah mezi limitami posloupností, hromadnými body a vybranými posloupnostmi popisuje následující věta.

Věta:

Bod $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ je hromadným bodem posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, právě když existuje vybraná posloupnost $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ mající limitu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

Důkaz.

- $\Leftarrow$: V každém okolí H_α leží nekonečně mnoho členů posloupnosti $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ a tím pádem i posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.
- Provedeme důkaz $\Rightarrow$ pouze pro $\alpha \in \mathbb{R}$: Uvažme okolí $H_\alpha(1)$, existuje k_1 takové, že $a_{k_1} \in H_\alpha(1)$. Je-li $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, pak pro okolí $H_\alpha(1/n)$ existuje $k_n > k_{n-1}$ splňující $a_{k_n} \in H_\alpha(1/n)$. Takto zkonstruovaná posloupnost $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a konverguje k α. $\square$

Bolzanova–Weierstrassova věta

Definice:

Číselná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **omezená**, právě když existuje reálné kladné K, pro které platí $|a_n| < K$ pro každé přirozené n.

Bolzanova–Weierstrassova věta

Definice:

Číselná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **omezená**, právě když existuje reálné kladné K, pro které platí $|a_n| < K$ pro každé přirozené n.

- Každá konvergentní posloupnost je omezená (rozmyslete!).

Bolzanova–Weierstrassova věta

Definice:

Číselná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **omezená**, právě když existuje reálné kladné K, pro které platí $|a_n| < K$ pro každé přirozené n.

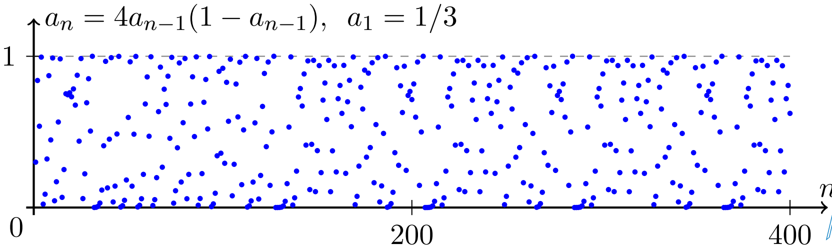
- Každá konvergentní posloupnost je omezená (rozmyslete!).
- Opak neplatí (viz $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$). Má každá omezená posloupnost alespoň hromadný bod?

Bolzanova–Weierstrassova věta

Definice:

Číselná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **omezená**, právě když existuje reálné kladné K, pro které platí $|a_n| < K$ pro každé přirozené n.

- Každá konvergentní posloupnost je omezená (rozmyslete!).
- Opak neplatí (viz $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$). Má každá omezená posloupnost alespoň hromadný bod?
- Představíme-li si omezenou a chaoticky se chovající posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, může být překvapivé, že odpověď na otázku výše je **kladná**.



Věta (Bolzano–Weierstrass):

Každá omezená číselná posloupnost má hromadný bod z $\mathbb{R}$.

Věta (Bolzano–Weierstrass):

Každá omezená číselná posloupnost má hromadný bod z $\mathbb{R}$.

Důkaz.

Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ omezená posloupnost.

Věta (Bolzano–Weierstrass):

Každá omezená číselná posloupnost má hromadný bod z $\mathbb{R}$.

Důkaz.

Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ omezená posloupnost. Jistě existuje interval $\langle b_1, c_1 \rangle$ takový, že obsahuje všechny členy posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Rozdělíme-li interval $\langle b_1, c_1 \rangle$ na poloviční intervaly $\langle b_1, \frac{b_1+c_1}{2} \rangle$ a $\langle \frac{b_1+c_1}{2}, c_1 \rangle$, pak aspoň jeden z těchto intervalů obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, označme ho $\langle b_2, c_2 \rangle$.

Věta (Bolzano–Weierstrass):

Každá omezená číselná posloupnost má hromadný bod z $\mathbb{R}$.

Důkaz.

Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ omezená posloupnost. Jistě existuje interval $\langle b_1, c_1\rangle$ takový, že obsahuje všechny členy posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Rozdělíme-li interval $\langle b_1, c_1\rangle$ na poloviční intervaly $\langle b_1, \frac{b_1+c_1}{2}\rangle$ a $\langle\frac{b_1+c_1}{2}, c_1\rangle$, pak aspoň jeden z těchto intervalů obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, označme ho $\langle b_2, c_2\rangle$. Tímto způsobem induktivně sestrojíme systém vnořených intervalů $\langle b_n, c_n\rangle$ z nichž každý obsahuje nekonečně mnoho členů $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a pro jejichž délky platí

$$\lim_{n\to\infty}(c_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{c_1 - b_1}{2^{n-1}} = 0.$$

Věta (Bolzano–Weierstrass):

Každá omezená číselná posloupnost má hromadný bod z $\mathbb{R}$.

Důkaz.

Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ omezená posloupnost. Jistě existuje interval $\langle b_1, c_1 \rangle$ takový, že obsahuje všechny členy posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Rozdělíme-li interval $\langle b_1, c_1 \rangle$ na poloviční intervaly $\langle b_1, \frac{b_1+c_1}{2} \rangle$ a $\langle \frac{b_1+c_1}{2}, c_1 \rangle$, pak aspoň jeden z těchto intervalů obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, označme ho $\langle b_2, c_2 \rangle$. Tímto způsobem induktivně sestrojíme systém vnořených intervalů $\langle b_n, c_n \rangle$ z nichž každý obsahuje nekonečně mnoho členů $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a pro jejichž délky platí

$$\lim_{n\to\infty} (c_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{c_1 - b_1}{2^{n-1}} = 0.$$

Podle axiomu úplnosti existuje reálné x patřící do **každého** z intervalů $\langle b_n, c_n \rangle$.

Věta (Bolzano–Weierstrass):

Každá omezená číselná posloupnost má hromadný bod z $\mathbb{R}$.

Důkaz.

Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ omezená posloupnost. Jistě existuje interval $\langle b_1, c_1 \rangle$ takový, že obsahuje všechny členy posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Rozdělíme-li interval $\langle b_1, c_1 \rangle$ na poloviční intervaly $\langle b_1, \frac{b_1+c_1}{2} \rangle$ a $\langle \frac{b_1+c_1}{2}, c_1 \rangle$, pak aspoň jeden z těchto intervalů obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, označme ho $\langle b_2, c_2 \rangle$. Tímto způsobem induktivně sestrojíme systém vnořených intervalů $\langle b_n, c_n \rangle$ z nichž každý obsahuje nekonečně mnoho členů $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a pro jejichž délky platí

$$\lim_{n\to\infty} (c_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{c_1 - b_1}{2^{n-1}} = 0.$$

Podle axiomu úplnosti existuje reálné x patřící do **každého** z intervalů $\langle b_n, c_n \rangle$. Protože délky intervalů $\langle b_n, c_n \rangle$ konvergují k nule, lze pro libovolné okolí H_x nalézt n dostatečně velké na to, aby celý interval $\langle b_n, c_n \rangle$ patřil do H_x. Proto lze v H_x nalézt nekonečně mnoho členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a x je tedy hromadným bodem $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. □

Limita monotonní posloupnosti

Důsledkem Bolzanovy–Weierstrassovy věty je následující, často používané, tvrzení.

Věta (O limitě monotonní posloupnosti):

Každá reálná monotonní posloupnost má limitu. Tato limita je konečná, právě když je daná posloupnost omezená.

Limita monotonní posloupnosti

Důsledkem Bolzanovy–Weierstrassovy věty je následující, často používané, tvrzení.

Věta (O limitě monotonní posloupnosti):

Každá reálná monotonní posloupnost má limitu. Tato limita je konečná, právě když je daná posloupnost omezená.

Důkaz.

- V případě, že je zkoumaná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ neomezená, je z definice limity zřejmé, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$. (znaménko $+$ pro neomezenost shora, $-$ pro zdola).

Limita monotonní posloupnosti

Důsledkem Bolzanovy–Weierstrassovy věty je následující, často používané, tvrzení.

Věta (O limitě monotonní posloupnosti):

Každá reálná monotonní posloupnost má limitu. Tato limita je konečná, právě když je daná posloupnost omezená.

Důkaz.

- V případě, že je zkoumaná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ neomezená, je z definice limity zřejmé, že $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$. (znaménko $+$ pro neomezenost shora, $-$ pro zdola).
- Předpokládejme, že $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a (shora) omezená. Potom podle Bolzanovy–Weierstrassovy věty má posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ hromadný bod, označme ho x.

Limita monotonní posloupnosti

Důsledkem Bolzanovy–Weierstrassovy věty je následující, často používané, tvrzení.

Věta (O limitě monotonní posloupnosti):

Každá reálná monotonní posloupnost má limitu. Tato limita je konečná, právě když je daná posloupnost omezená.

Důkaz.

- V případě, že je zkoumaná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ neomezená, je z definice limity zřejmé, že $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$. (znaménko $+$ pro neomezenost shora, $-$ pro zdola).
- Předpokládejme, že $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a (shora) omezená. Potom podle Bolzanovy–Weierstrassovy věty má posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ hromadný bod, označme ho x. Buď H_x libovolné okolí bodu x.

Limita monotonní posloupnosti

Důsledkem Bolzanovy–Weierstrassovy věty je následující, často používané, tvrzení.

Věta (O limitě monotonní posloupnosti):

Každá reálná monotonní posloupnost má limitu. Tato limita je konečná, právě když je daná posloupnost omezená.

Důkaz.

- V případě, že je zkoumaná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ neomezená, je z definice limity zřejmé, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$. (znaménko $+$ pro neomezenost shora, $-$ pro zdola).
- Předpokládejme, že $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a (shora) omezená. Potom podle Bolzanovy–Weierstrassovy věty má posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ hromadný bod, označme ho x. Buď H_x libovolné okolí bodu x. Potom existuje jisté a_{n_0} patřící do H_x. Do tohoto okolí ale musí patřit všechna a_n s $n > n_0$, protože pro ně nutně platí $a_{n_0} \leq a_n \leq x$. $\square$

Příklad (Limita posloupnosti „harmonických čísel").

Zkoumejme limitu posloupnosti $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right)_{n=1}^{\infty}$.

Příklad (Limita posloupnosti „harmonických čísel").

Zkoumejme limitu posloupnosti $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Tato posloupnost je očividně rostoucí. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti tudíž existuje její limita. Vyberme z ní posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$,

$$b_n = \sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{k}.$$

Platí

$$b_{j+1} - b_j = \frac{1}{2^j+1} + \frac{1}{2^j+2} + \cdots + \frac{1}{2^j+2^j} \geq 2^j\frac{1}{2^{j+1}} = \frac{1}{2}.$$

Odtud

$$b_n = b_1 + \sum_{j=1}^{n-1}(b_{j+1}-b_j) \geq b_1 + \frac{n-1}{2} = 1 + \frac{n}{2}.$$

Posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, a tedy i $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, není omezená shora. Proto

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = +\infty.$$

Nutná a postačující podmínka pro konvergenci

V definici limity posloupnosti se neobejdeme bez její explicitní hodnoty. Tento nedostatek odstraňuje následující ekvivalentní podmínka. Opět jde o důsledek Bolzanovy–Weierstrassovy věty.

Věta (Bolzano–Cauchy):

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m > n_0$ je $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Nutná a postačující podmínka pro konvergenci

V definici limity posloupnosti se neobejdeme bez její explicitní hodnoty. Tento nedostatek odstraňuje následující ekvivalentní podmínka. Opět jde o důsledek Bolzanovy–Weierstrassovy věty.

Věta (Bolzano–Cauchy):

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m > n_0$ je $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Důkaz $\Rightarrow$.

Nechť má $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ limitu $\alpha \in \mathbb{R}$.

Nutná a postačující podmínka pro konvergenci

V definici limity posloupnosti se neobejdeme bez její explicitní hodnoty. Tento nedostatek odstraňuje následující ekvivalentní podmínka. Opět jde o důsledek Bolzanovy–Weierstrassovy věty.

Věta (Bolzano–Cauchy):

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m > n_0$ je $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Důkaz $\Rightarrow$.

Nechť má $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ limitu $\alpha \in \mathbb{R}$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Potom lze nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ je $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Nutná a postačující podmínka pro konvergenci

V definici limity posloupnosti se neobejdeme bez její explicitní hodnoty. Tento nedostatek odstraňuje následující ekvivalentní podmínka. Opět jde o důsledek Bolzanovy–Weierstrassovy věty.

Věta (Bolzano–Cauchy):

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m > n_0$ je $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Důkaz $\Rightarrow$.

Nechť má $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ limitu $\alpha \in \mathbb{R}$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Potom lze nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ je $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$. Takže pro libovolné $n, m > n_0$ platí

$$|a_n - a_m| = |a_n - \alpha + \alpha - a_m| \leq |a_n - \alpha| + |\alpha - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Při odhadu jsme využili znalosti trojúhelníkové nerovnosti. □

Důkaz $\Leftarrow$.

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňuje podmínku

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n, m \in \mathbb{N})\big(n, m > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon\big).$$

Důkaz $\Leftarrow$.

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňuje podmínku

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n, m \in \mathbb{N})\big(n, m > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon\big).$$

Zvolme za $\varepsilon = 1$, pak existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|a_m - a_{n_0}| < 1 \quad \text{pro každé } m > n_0.$$

Důkaz $\Leftarrow$.

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňuje podmínku

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n, m \in \mathbb{N})\big(n, m > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon\big).$$

Zvolme za $\varepsilon = 1$, pak existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|a_m - a_{n_0}| < 1 \quad \text{pro každé } m > n_0.$$

Jinak řečeno, pro $m > n_0$ patří a_m do intervalu $(a_{n_0} - 1, a_{n_0} + 1) = H_{a_{n_0}}(1)$. Mimo tento interval může ležet pouze konečný počet prvků posloupnosti. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je proto omezená.

Důkaz $\Leftarrow$.

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňuje podmínku

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n, m \in \mathbb{N})\big(n, m > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon\big).$$

Zvolme za $\varepsilon = 1$, pak existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|a_m - a_{n_0}| < 1 \quad \text{pro každé } m > n_0.$$

Jinak řečeno, pro $m > n_0$ patří a_m do intervalu $(a_{n_0} - 1, a_{n_0} + 1) = H_{a_{n_0}}(1)$. Mimo tento interval může ležet pouze konečný počet prvků posloupnosti. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je proto omezená. Podle Bolzanovy–Weierstrassovy věty existuje $x \in \mathbb{R}$, hromadný bod posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Důkaz $\Leftarrow$.

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňuje podmínku

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n, m \in \mathbb{N})\big(n, m > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon\big).$$

Zvolme za $\varepsilon = 1$, pak existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|a_m - a_{n_0}| < 1 \quad \text{pro každé } m > n_0.$$

Jinak řečeno, pro $m > n_0$ patří a_m do intervalu $(a_{n_0} - 1, a_{n_0} + 1) = H_{a_{n_0}}(1)$. Mimo tento interval může ležet pouze konečný počet prvků posloupnosti. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je proto omezená. Podle Bolzanovy–Weierstrassovy věty existuje $x \in \mathbb{R}$, hromadný bod posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.
Buď $H_x(\varepsilon/2)$ okolí bodu x. Pro $\varepsilon/2$ existuje n_0 tak, že pokud $m, n > n_0$ pak platí $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$. Určitě ale existuje $m > n_0$ tak, že $a_m \in H_x(\varepsilon/2)$. Tudíž pro $n > n_0$ je

$$|a_n - x| = |a_n - a_m + a_m - x| \le |a_n - a_m| + |a_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \square$$

Hlavní body

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

1. Algebraické operace na rozšířené reálné ose
2. Věty o limitách
3. Kritéria konvergence
4. Nerovnosti a limity posloupností
5. Příklady
6. Podílové kritérium

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$$

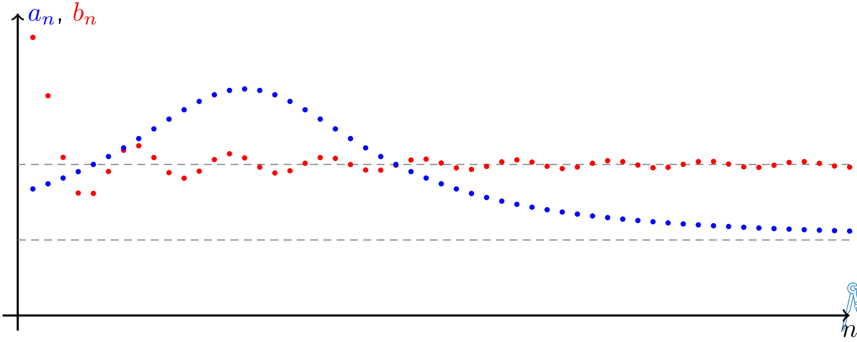
Nerovnost mezi limitami $\Rightarrow$?

Věta:

Nechť reálné posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ mají limity v $\overline{\mathbb{R}}$. Pokud

$$\lim a_n < \lim b_n$$

potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená $n > n_0$ platí $a_n < b_n$.



Nerovnost mezi členy posloupností $\Rightarrow$?

Důsledek:

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou reálné posloupnosti mající limitu v $\overline{\mathbb{R}}$. Pokud existuje n_0 takové, že pro všechna přirozená $n > n_0$ je $a_n \leq b_n$, potom $\lim a_n \leq \lim b_n$.

Nerovnost mezi členy posloupností $\Rightarrow$?

Důsledek:

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou reálné posloupnosti mající limitu v $\overline{\mathbb{R}}$. Pokud existuje n_0 takové, že pro všechna přirozená $n > n_0$ je $a_n \leq b_n$, potom $\lim a_n \leq \lim b_n$.

Důkaz.

Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že $\lim a_n > \lim b_n$. Potom podle předchozí věty existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n > n_0$ platí $a_n > b_n$. To je ovšem ve sporu s předpokládanými vlastnostmi posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. $\square$

Nerovnost mezi členy posloupností $\Rightarrow$?

Důsledek:

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou reálné posloupnosti mající limitu v $\overline{\mathbb{R}}$. Pokud existuje n_0 takové, že pro všechna přirozená $n > n_0$ je $a_n \leq b_n$, potom $\lim a_n \leq \lim b_n$.

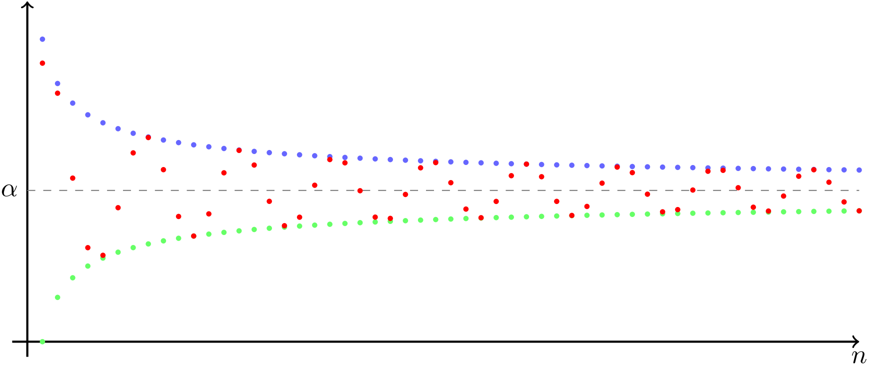
Důkaz.

Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že $\lim a_n > \lim b_n$. Potom podle předchozí věty existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n > n_0$ platí $a_n > b_n$. To je ovšem ve sporu s předpokládanými vlastnostmi posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. $\square$

Poznámka:

Všimněte si, že neostrost nerovnosti je zde důležitá. Například, pro $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = 0$ platí ostrá nerovnost $a_n > b_n$ pro každé přirozené n, ale $\lim a_n = \lim b_n = 0$.

Věta o sevřené posloupnosti: idea



Věta o sevřené posloupnosti

Věta (O sevřené posloupnosti):

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou reálné posloupnosti pro které platí

1. $\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0\big)\big(a_n \leq b_n \leq c_n\big)$
2. posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ mají **stejnou** limitu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

Potom existuje limita posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ a platí $\lim b_n = \alpha$.

Věta o sevřené posloupnosti

Věta (O sevřené posloupnosti):

Nechť $(a_n)_{n=1}^\infty$, $(b_n)_{n=1}^\infty$ a $(c_n)_{n=1}^\infty$ jsou reálné posloupnosti pro které platí

1. $\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0\big)\big(a_n \leq b_n \leq c_n\big)$
2. posloupnosti $(a_n)_{n=1}^\infty$ a $(c_n)_{n=1}^\infty$ mají **stejnou** limitu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

Potom existuje limita posloupnosti $(b_n)_{n=1}^\infty$ a platí $\lim b_n = \alpha$.

Důkaz.

Buď H_α okolí bodu α. Existuje $m_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n > m_0$ patří jak a_n tak c_n do H_α. Pro $n > \max\{n_0, m_0\}$ do tohoto okolí musí patřit i b_n, protože $a_n \leq b_n \leq c_n$ pro všechna $n > n_0$. Proto má posloupnost $(b_n)_{n=1}^\infty$ limitu rovnou α. □

Příklad

Na následující příklad **nelze aplikovat** větu o limitě podílu.

Příklad.

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n}$.

Příklad

Na následující příklad **nelze aplikovat** větu o limitě podílu.

Příklad.

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n}$.

Funkce $\sin$ má obor hodnot $H_{\sin} = \langle -1, 1\rangle$. Tedy platí nerovnost

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad \text{pro každé}\, x \in \mathbb{R}.$$

Tudíž pro každé přirozené n platí

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Protože ale $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-1}{n} = 0$ je podle předchozí věty

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Hlavní body

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$$

Příklad.

Platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Příklad.

Platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Položme $h_n := \sqrt[n]{n} - 1.$

Příklad.

Platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Položme $h_n := \sqrt[n]{n} - 1$. Z jedné strany platí $h_n \geq 0$ pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Příklad.

Platí
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Položme $h_n := \sqrt[n]{n} - 1$. Z jedné strany platí $h_n \geq 0$ pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$. Z binomické věty dostaneme pro $n \geq 2$

$$n = (1 + h_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_n^k > 1 + \binom{n}{2} h_n^2,$$

Příklad.

Platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Položme $h_n := \sqrt[n]{n} - 1$. Z jedné strany platí $h_n \geq 0$ pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Z binomické věty dostaneme pro $n \geq 2$

$$n = (1 + h_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_n^k > 1 + \binom{n}{2} h_n^2,$$

a tedy pro $n \geq 2$ platí

$$n - 1 > \frac{n(n-1)}{2} h_n^2.$$

Příklad.

Platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Položme $h_n := \sqrt[n]{n} - 1$. Z jedné strany platí $h_n \geq 0$ pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$. Z binomické věty dostaneme pro $n \geq 2$

$$n = (1 + h_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_n^k > 1 + \binom{n}{2} h_n^2,$$

a tedy pro $n \geq 2$ platí

$$n - 1 > \frac{n(n-1)}{2} h_n^2.$$

Pro $n \geq 2$ je výraz $\frac{n(n-1)}{2}$ kladný a můžeme jím proto poslední nerovnost vydělit a díky nezápornosti h_n poté i odmocnit. Po těchto úpravách dostáváme

$$0 \leq h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Příklad.

Platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Položme $h_n := \sqrt[n]{n} - 1$. Z jedné strany platí $h_n \geq 0$ pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$. Z binomické věty dostaneme pro $n \geq 2$

$$n = (1 + h_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_n^k > 1 + \binom{n}{2} h_n^2,$$

a tedy pro $n \geq 2$ platí

$$n - 1 > \frac{n(n-1)}{2} h_n^2.$$

Pro $n \geq 2$ je výraz $\frac{n(n-1)}{2}$ kladný a můžeme jím proto poslední nerovnost vydělit a díky nezápornosti h_n poté i odmocnit. Po těchto úpravách dostáváme

$$0 \leq h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Odtud ihned pomocí věty o sevřené posloupnosti dostáváme $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$.

Příklad.

Pro každé $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, je
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Příklad.

Pro každé $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

- **Případ** $a \geq 1$: Pro každé celé $n > a$ platí

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}.$$

V předchozím příkladě jsme však ukázali rovnost $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Tudíž podle věty o sevřené posloupnosti $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Příklad.

Pro každé $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, je
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

- **Případ** $a \geq 1$: Pro každé celé $n > a$ platí
$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}.$$
V předchozím příkladě jsme však ukázali rovnost $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Tudíž podle věty o sevřené posloupnosti $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

- **Případ** $0 < a < 1$: Z předchozí bodu plyne $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$, tudíž podle věty o limitě podílu platí
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$

Příklad.

Platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

Příklad.

Platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

Při výpočtu této limity využijeme následující trik. Členy v součinu dvou faktoriálů promícháme v „zrcadlovém" pořadí:

$$\begin{aligned}(n!)^2 &= (1\cdot 2\cdot 3\cdots n)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)\\ &= \big(1\cdot n\big)\cdot\big(2\cdot(n-1)\big)\cdot\big(3\cdot(n-2)\big)\cdots\big(n\cdot 1\big) =\\ &= \prod_{k=1}^{n} k(n+1-k)\end{aligned}$$

Příklad.

Platí
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

Při výpočtu této limity využijeme následující trik. Členy v součinu dvou faktoriálů promícháme v „zrcadlovém“ pořadí:

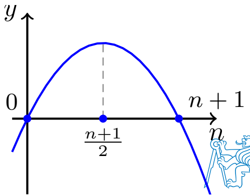
$$\begin{aligned}(n!)^2 &= (1\cdot 2\cdot 3\cdots n)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)\\ &= \big(1\cdot n\big)\cdot\big(2\cdot(n-1)\big)\cdot\big(3\cdot(n-2)\big)\cdots\big(n\cdot 1\big) =\\ &= \prod_{k=1}^{n} k(n+1-k)\end{aligned}$$

Z grafu paraboly $f(x) = x(n+1-x)$ je zřejmé, že

$$f(k) \geq f(1) = f(n) = n$$

a proto $(n!)^2 \geq n^n$. Konečně, $2n$-tá odmocnina dává

$$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n} \longrightarrow +\infty.$$



Příklad (!!!).

Nechť $a \in \mathbb{R}$. Pak pro limitu reálné posloupnosti $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & |a| < 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a > 1, \\ \text{neexistuje}, & a \leq -1. \end{cases}$$

Příklad (!!!).

Nechť $a \in \mathbb{R}$. Pak pro limitu reálné posloupnosti $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & |a| < 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a > 1, \\ \text{neexistuje}, & a \leq -1. \end{cases}$$

- **Jednoduché případy**: Pokud $a = 0$ nebo $a = 1$, pak se jedná o konstantní posloupnost jejíž limita je rovna příslušné konstantě. Pro $a = -1$ jsme již ukázali, že limita $\big((-1)^n\big)_{n=1}^{\infty}$ neexistuje.

- **Nechť** $0 < |a| < 1$. Platí

$$\left|a^{n+1}\right| = \left|a^n\right| \cdot |a| < \left|a^n\right|.$$

Posloupnost $\left(\left|a^n\right|\right)_{n=1}^{\infty}$ je tedy ostře klesající a omezená, $0 < \left|a^n\right| < |a|$.
Z věty o limitě monotónní posloupnosti plyne existence konečné limity, označme ji $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left|a^n\right|$.

- **Nechť** $0 < |a| < 1$. Platí

$$\left|a^{n+1}\right| = \left|a^n\right| \cdot |a| < \left|a^n\right|.$$

Posloupnost $\left(\left|a^n\right|\right)_{n=1}^{\infty}$ je tedy ostře klesající a omezená, $0 < \left|a^n\right| < |a|$. Z věty o limitě monotónní posloupnosti plyne existence konečné limity, označme ji $L = \lim_{n\to\infty} \left|a^n\right|$.

Posloupnost $\left(\left|a^{n+1}\right|\right)_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $\left(\left|a^n\right|\right)_{n=1}^{\infty}$ a proto mají stejnou limitu. Konečně

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|a^{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty} |a| \cdot \left|a^n\right| = |a| \cdot \lim_{n\to\infty} \left|a^n\right| = |a| \cdot L.$$

Díky předpokladům nakladeným na a odtud nutně plyne rovnost $L = 0$.

- **Nechť** $0 < |a| < 1$. Platí

$$\left|a^{n+1}\right| = \left|a^n\right| \cdot |a| < \left|a^n\right|.$$

Posloupnost $\left(\left|a^n\right|\right)_{n=1}^{\infty}$ je tedy ostře klesající a omezená, $0 < \left|a^n\right| < |a|$. Z věty o limitě monotónní posloupnosti plyne existence konečné limity, označme ji $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left|a^n\right|$.

Posloupnost $\left(\left|a^{n+1}\right|\right)_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $\left(\left|a^n\right|\right)_{n=1}^{\infty}$ a proto mají stejnou limitu. Konečně

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|a^{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty} |a| \cdot \left|a^n\right| = |a| \cdot \lim_{n\to\infty} \left|a^n\right| = |a| \cdot L.$$

Díky předpokladům nakladeným na a odtud nutně plyne rovnost $L = 0$.

- **Případ** $a > 1$: Podobně jako v předchozím případě ukážeme, že $\left(a^n\right)_{n=1}^{\infty}$ je ostře rostoucí posloupnost zdola omezená např. číslem 1. Existuje proto limita $L = \lim\limits_{n\to\infty} a^n$.

- **Nechť** $0 < |a| < 1$. Platí
$$\left|a^{n+1}\right| = \left|a^n\right| \cdot |a| < \left|a^n\right|.$$
Posloupnost $\left(\left|a^n\right|\right)_{n=1}^{\infty}$ je tedy ostře klesající a omezená, $0 < \left|a^n\right| < |a|$.
Z věty o limitě monotónní posloupnosti plyne existence konečné limity, označme ji $L = \lim_{n\to\infty} \left|a^n\right|$.
Posloupnost $\left(\left|a^{n+1}\right|\right)_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $\left(\left|a^n\right|\right)_{n=1}^{\infty}$ a proto mají stejnou limitu. Konečně
$$L = \lim_{n\to\infty} \left|a^{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty} |a| \cdot \left|a^n\right| = |a| \cdot \lim_{n\to\infty} \left|a^n\right| = |a| \cdot L.$$
Díky předpokladům nakladeným na a odtud nutně plyne rovnost $L = 0$.
- **Případ** $a > 1$: Podobně jako v předchozím případě ukážeme, že $\left(a^n\right)_{n=1}^{\infty}$ je ostře rostoucí posloupnost zdola omezená např. číslem 1. Existuje proto limita $L = \lim_{n\to\infty} a^n$. Protože posloupnost roste, musí nutně být $L > a$. Navíc platí
$$L = \lim_{n\to\infty} a^{n+1} = a \cdot \lim_{n\to\infty} a^n = a \cdot L.$$
Protože ale $L > a > 1$ může tato nerovnost platit pouze v případě $L = +\infty$.

- **Případ** $a < -1$: Pro vybranou posloupnost $\left(a^{2n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\left(a^2\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ nyní podle předchozího bodu platí $\lim\limits_{n\to\infty} a^{2n} = +\infty$, protože $a^2 > 1$.

- **Případ** $a < -1$: Pro vybranou posloupnost $\left(a^{2n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\left(a^2\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ nyní podle předchozího bodu platí $\lim\limits_{n\to\infty} a^{2n} = +\infty$, protože $a^2 > 1$.

Limitu vybrané posloupnosti $\left(a^{2n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ snadno spočteme

$$\lim_{n\to\infty} a^{2n+1} = a \cdot \lim_{n\to\infty} a^{2n} = a \cdot (+\infty) = -\infty.$$

- **Případ** $a < -1$: Pro vybranou posloupnost $\left(a^{2n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\left(a^2\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ nyní podle předchozího bodu platí $\lim\limits_{n\to\infty} a^{2n} = +\infty$, protože $a^2 > 1$.

Limitu vybrané posloupnosti $\left(a^{2n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ snadno spočteme

$$\lim_{n\to\infty} a^{2n+1} = a \cdot \lim_{n\to\infty} a^{2n} = a \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Našli jsme dvě vybrané posloupnosti s různými limitami. Původní limita, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$, tedy neexistuje.

Shrnutí: Známé posloupnosti a jejich limity

posloupnost	limita
$(n^a)_{n=1}^{\infty}$	$\begin{cases} +\infty, & a > 0, \\ 1, & a = 0, \\ 0, & a < 0. \end{cases}$
$\left(\sqrt[n]{n}\right)_{n=1}^{\infty}$	1
$\left(\sqrt[n]{a}\right)_{n=1}^{\infty}$ pro $a > 0$	1
$\left(\sqrt[n]{n!}\right)_{n=1}^{\infty}$	$+\infty$
$(a^n)_{n=1}^{\infty}$	$\begin{cases} 0, & \lvert a\rvert < 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a > 1, \\ \text{neexistuje}, & a \leq -1. \end{cases}$

Výsledky v této tabulce považujeme za známé, netřeba je v písemce odvozovat.

Hlavní body

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$$

Podílové kritérium

Z nyní již známé limity posloupnosti $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ a věty o limitě sevřené posloupnosti dostaneme pro řadu výpočtů důležité podílové kritérium.

Věta (Podílové kritérium / *ratio test for sequences*):

Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost **kladných** čísel a nechť existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

označme její hodnotu symbolem q. Potom

1. pokud $q < 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,
2. pokud $q > 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Podílové kritérium

Důkaz.

Dokažme první bod.

Podílové kritérium

Důkaz.

Dokažme první bod. Protože $q < 1$ určitě existuje r splňující $q < r < 1$. Díky tomu pak i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < r.$$

Podílové kritérium

Důkaz.

Dokažme první bod. Protože $q < 1$ určitě existuje r splňující $q < r < 1$. Díky tomu pak i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < r.$$

Dle věty o nerovnostech v limitách existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že nerovnost

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$$

platí pro všechna $n \geq n_0$. Díky nezápornosti členů posloupnosti pak platí i nerovnost $a_{n+1} < r a_n$ pro libovolné $n \geq n_0$.

Podílové kritérium

Důkaz.

Dokažme první bod. Protože $q < 1$ určitě existuje r splňující $q < r < 1$. Díky tomu pak i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < r.$$

Dle věty o nerovnostech v limitách existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že nerovnost

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$$

platí pro všechna $n \geq n_0$. Díky nezápornosti členů posloupnosti pak platí i nerovnost $a_{n+1} < ra_n$ pro libovolné $n \geq n_0$. Tudíž pro $n \geq n_0$ je

$$0 \leq a_n \leq r^{n-n_0} a_{n_0}.$$

Protože $0 < r < 1$, je limita pravé strany nerovnosti rovna nule.

Podílové kritérium

Důkaz.

Dokažme první bod. Protože $q < 1$ určitě existuje r splňující $q < r < 1$. Díky tomu pak i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < r.$$

Dle věty o nerovnostech v limitách existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že nerovnost

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$$

platí pro všechna $n \geq n_0$. Díky nezápornosti členů posloupnosti pak platí i nerovnost $a_{n+1} < ra_n$ pro libovolné $n \geq n_0$. Tudíž pro $n \geq n_0$ je

$$0 \leq a_n \leq r^{n-n_0} a_{n_0}.$$

Protože $0 < r < 1$, je limita pravé strany nerovnosti rovna nule. Z věty o limitě sevřené posloupnosti tak dostáváme výsledek $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Druhý bod se dokáže obdobně. □

Podílové kritérium

Příklad.

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10^n}{n!}$.

Podílové kritérium

Příklad.

Vypočtěte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10^n}{n!}$. Protože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{10^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n+1} = 0$$

je původní zkoumaná limita rovna taktéž 0.

Hlavní body

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

7 Dodatek

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$$

Komentář

- Látka obsažená v této prezentaci je dále podrobně vysvětlena ve studijním textu.
- Příklady k procvičování látky o posloupnostech lze nalézt v druhé a třetí BI-ZMA lekci na MARASTu a v cvičebnici tamtéž.
- K posloupnosti harmonických čísel zmíněné v této přednášce se ještě během semestru několikrát vrátíme. Zkuste se zamyslet nad tím, jak by studium její limity dopadlo, pokud byste si její členy počítali na počítači ve strojové aritmetice.