Základy matematické analýzy

Limita funkce

Pavel Hrabák[1], Tomáš Kalvoda[2], Ivo Petr[3]

[1]pavel.hrabak@fit.cvut.cz [2]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [3]ivo.petr@fit.cvut.cz,

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

4. března 2021
ZS 2020/2021

Hlavní body

1. Limita funkce
2. Věty o limitách funkcí
3. Nerovnosti a limity funkcí

Hlavní body

Limita funkce

Nyní upřeme naší pozornost na funkce, tedy zobrazení $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}$.

Limita funkce

Nyní upřeme naší pozornost na funkce, tedy zobrazení $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}$.

Definice:

Buďte f reálná funkce reálné proměnné a $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Nechť f je definovaná na okolí bodu a, s možnou výjimkou bodu a samotného. Řekneme, že $c \in \overline{\mathbb{R}}$ je **limitou funkce** f **v bodě** a, právě když pro každé okolí H_c bodu c existuje okolí H_a bodu a takové, že z podmínky

$$x \in H_a \setminus \{a\}$$

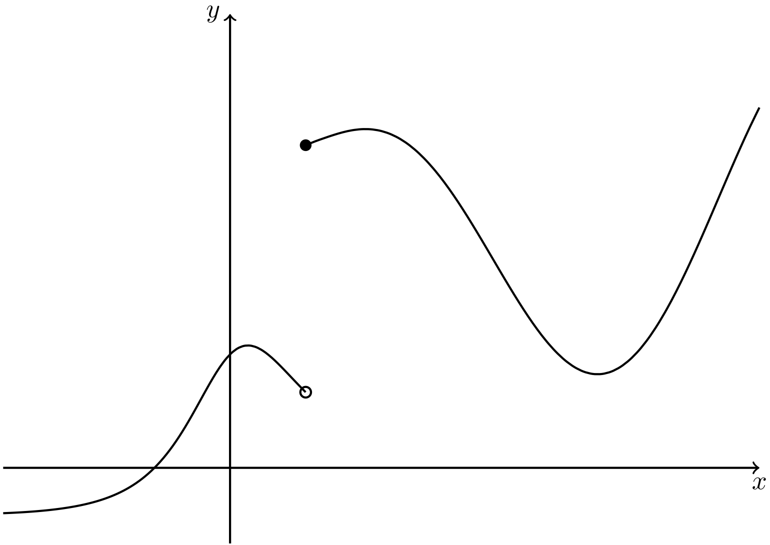
plyne

$$f(x) \in H_c.$$

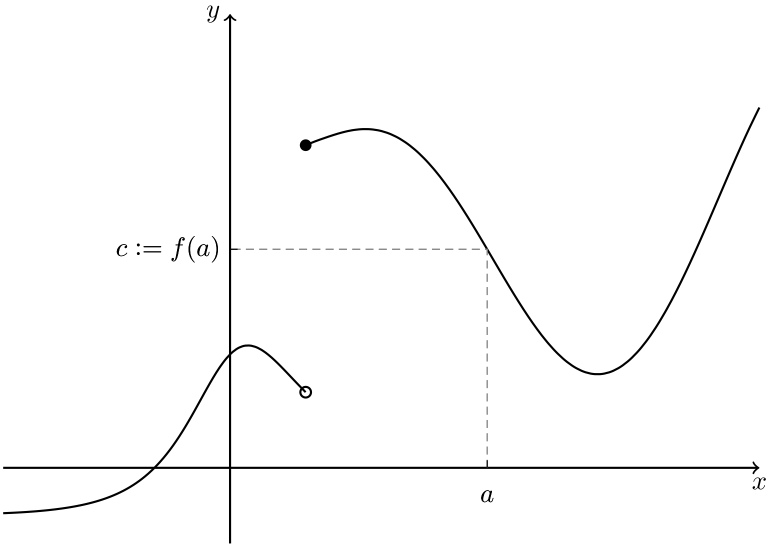
Zapisujeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = c, \quad \text{případně} \quad \lim_{a} f = c.$$

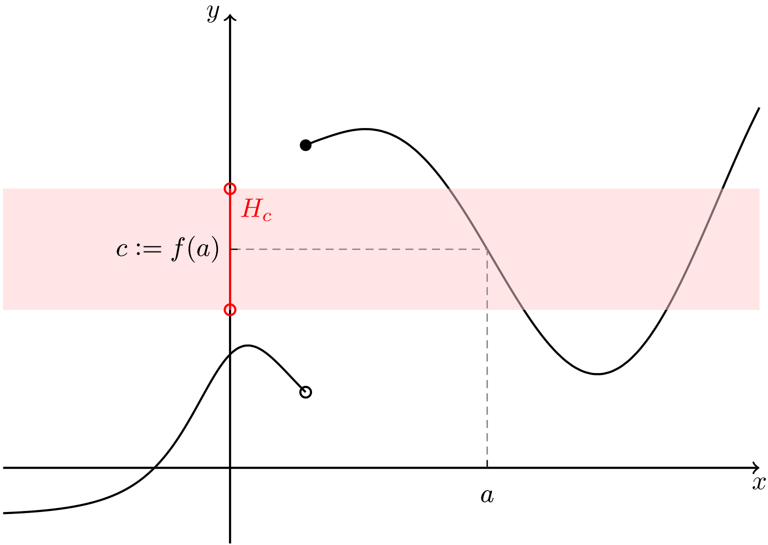
Ilustrace případu $a, c \in \mathbb{R}$



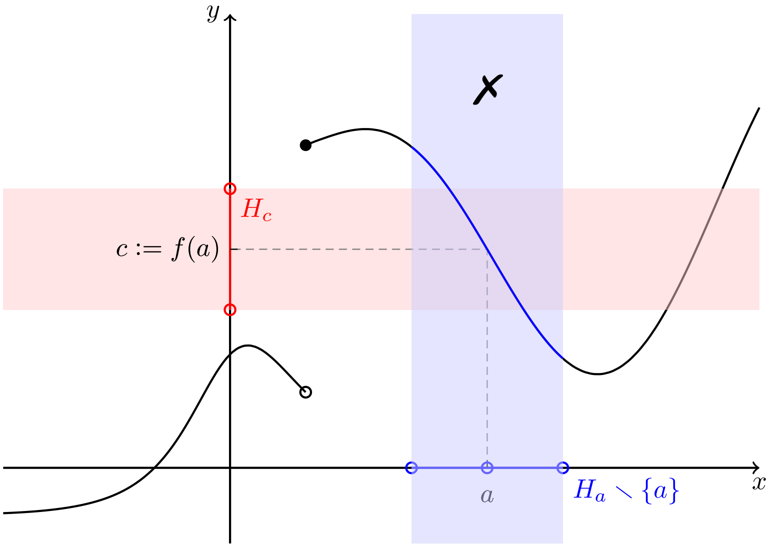
Ilustrace případu $a, c \in \mathbb{R}$



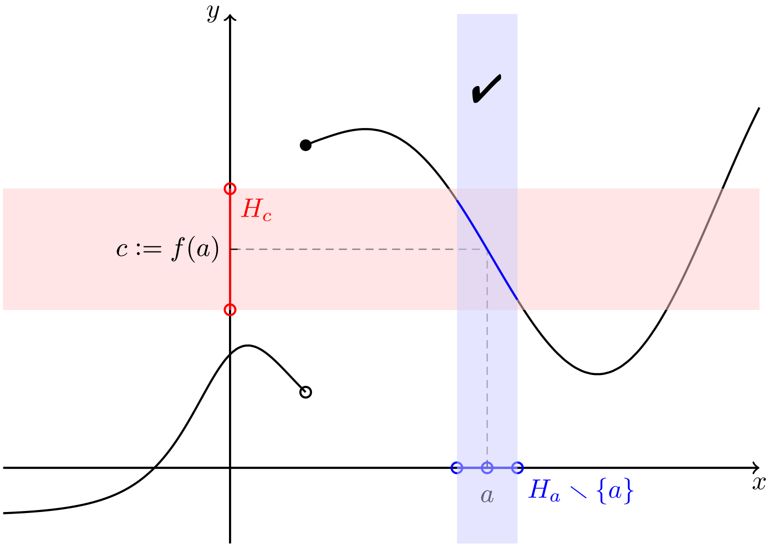
Ilustrace případu $a, c \in \mathbb{R}$



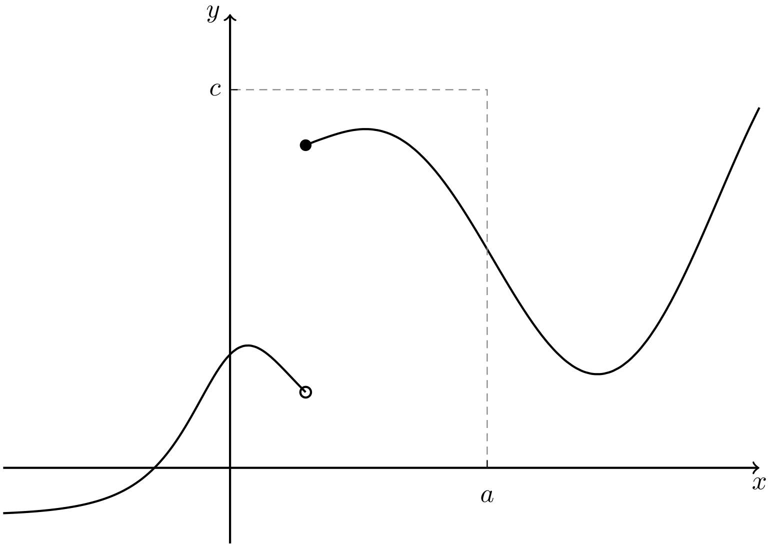
Ilustrace případu $a, c \in \mathbb{R}$



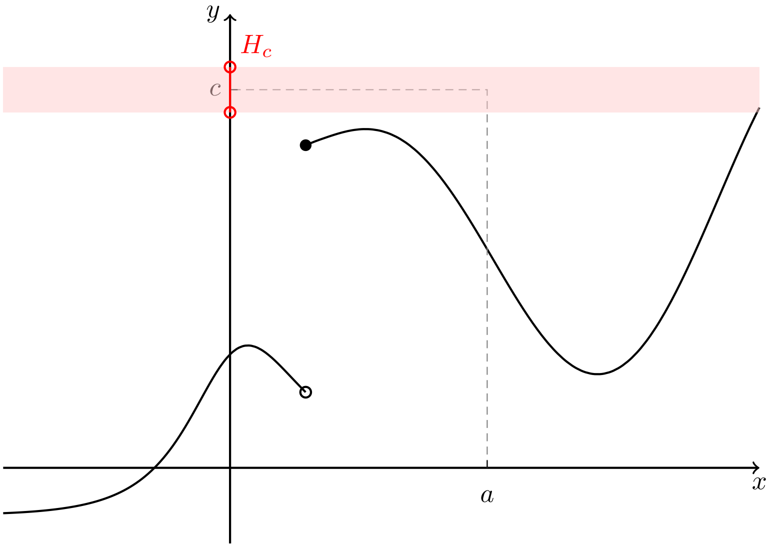
Ilustrace případu $a, c \in \mathbb{R}$



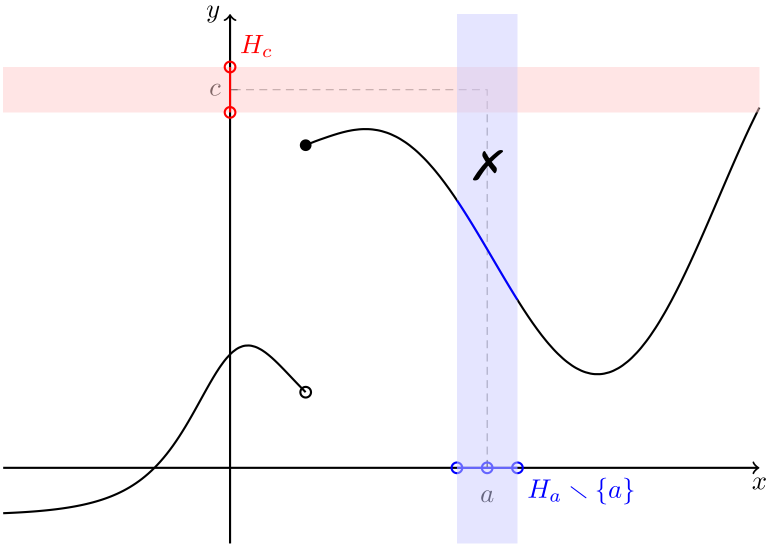
Ilustrace případu $a, c \in \mathbb{R}$



Ilustrace případu $a, c \in \mathbb{R}$



Ilustrace případu $a, c \in \mathbb{R}$



Limita funkce: poznámky

Poznámka (ε–δ definice):

V případě kdy a i c jsou prvky $\mathbb{R}$ je podmínka $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ ekvivalentní požadavku: funkce f je definovaná na okolí bodu a s možnou výjimkou bodu a samotného a

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta > 0\big)\big(\forall x \in D_f\big)(0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x)-c| < \varepsilon\big).$$

Analogické definice lze zformulovat pro různé kombinace případů $a, c \in \overline{\mathbb{R}}$.

Limita funkce: poznámky

Poznámka (ε–δ definice):

V případě kdy a i c jsou prvky $\mathbb{R}$ je podmínka $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ ekvivalentní požadavku: funkce f je definovaná na okolí bodu a s možnou výjimkou bodu a samotného a

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big(\forall x \in D_f\big)(0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - c| < \varepsilon\big).$$

Analogické definice lze zformulovat pro různé kombinace případů $a, c \in \overline{\mathbb{R}}$.

Příklad (Ke vztahu limity a funkční hodnoty).

Hodnota limity funkce f v bodě a závisí pouze na chování funkce f na okolí bodu a **mimo** bod a.

Limita funkce: poznámky

Poznámka (ε–δ definice):

V případě kdy a i c jsou prvky $\mathbb{R}$ je podmínka $\lim_{x \to a} f(x) = c$ ekvivalentní požadavku: funkce f je definovaná na okolí bodu a s možnou výjimkou bodu a samotného a

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big(\forall x \in D_f\big)(0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - c| < \varepsilon\big).$$

Analogické definice lze zformulovat pro různé kombinace případů $a, c \in \overline{\mathbb{R}}$.

Příklad (Ke vztahu limity a funkční hodnoty).

Hodnota limity funkce f v bodě a závisí pouze na chování funkce f na okolí bodu a **mimo** bod a.

- Buď $f(x) := \operatorname{sgn} x^2$. Ačkoliv $f(0) = 0$ je $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

Limita funkce: poznámky

Poznámka (ε–δ definice):

V případě kdy a i c jsou prvky $\mathbb{R}$ je podmínka $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ ekvivalentní požadavku: funkce f je definovaná na okolí bodu a s možnou výjimkou bodu a samotného a

$$\big(\forall\varepsilon > 0\big)\big(\exists\delta > 0\big)\big(\forall x \in D_f\big)\big(0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - c| < \varepsilon\big).$$

Analogické definice lze zformulovat pro různé kombinace případů $a, c \in \overline{\mathbb{R}}$.

Příklad (Ke vztahu limity a funkční hodnoty).

Hodnota limity funkce f v bodě a závisí pouze na chování funkce f na okolí bodu a **mimo** bod a.

- Buď $f(x) := \operatorname{sgn} x^2$. Ačkoliv $f(0) = 0$ je $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.
- Buď $f(x) := \operatorname{sgn} \frac{1}{x^2}$, $D_f = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$. Ačkoliv 0 nepatří do D_f platí $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

Jednostranná limita funkce

Definice:

Buďte f reálná funkce reálné proměnné a $a \in \mathbb{R}$. Nechť f je definovaná na levém, resp. pravém okolí bodu a, s možnou výjimkou bodu a.

Řekneme, že $c \in \overline{\mathbb{R}}$ je **limitou funkce f v bodě a zleva, resp. zprava**, právě když pro každé okolí H_c bodu c existuje levé okolí H_a^-, resp. pravé okolí H_a^+, bodu a takové, že z podmínky

$$x \in H_a^- \smallsetminus \{a\}, \text{ resp. } x \in H_a^+ \smallsetminus \{a\},$$

plyne

$$f(x) \in H_c.$$

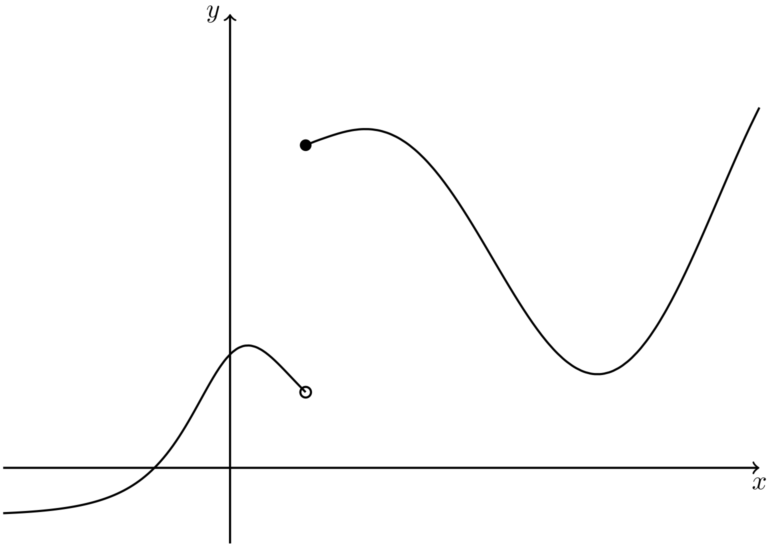
Zapisujeme

$$\lim_{x \to a_-} f(x) = c, \quad \text{případně} \quad \lim_{a_-} f = c,$$

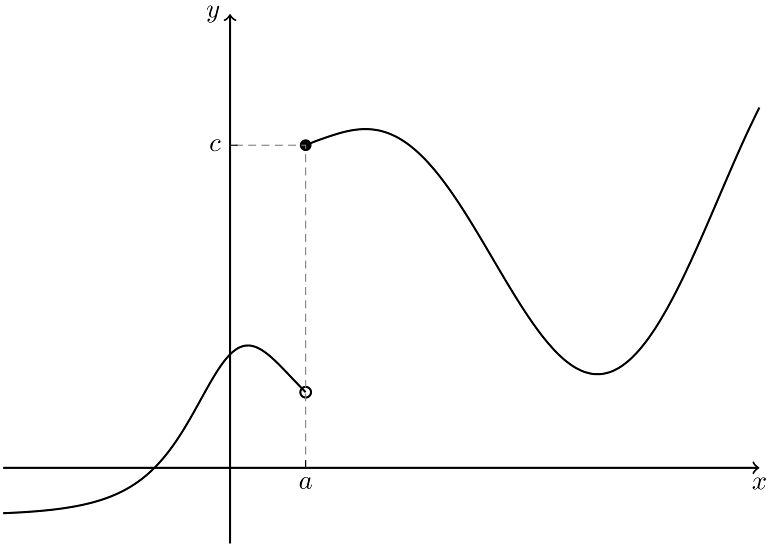
resp.

$$\lim_{x \to a_+} f(x) = c, \quad \text{případně} \quad \lim_{a_+} f = c.$$

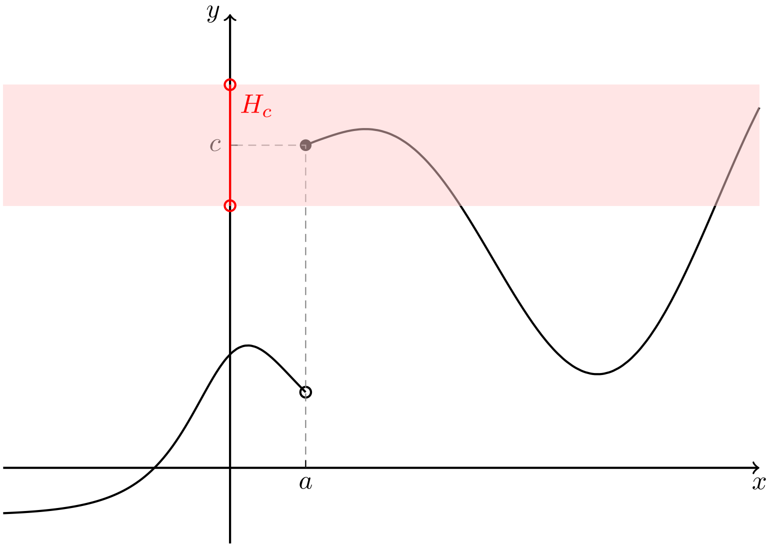
Ilustrace případu $a, c \in \mathbb{R}$



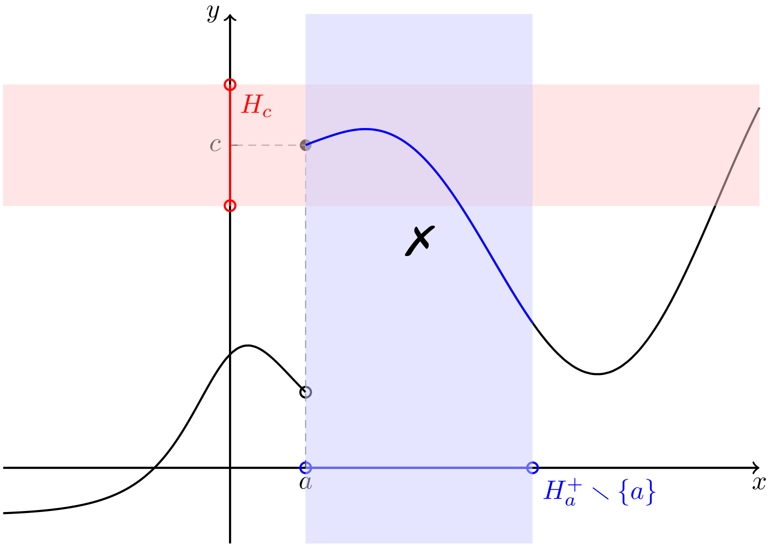
Ilustrace případu $a, c \in \mathbb{R}$



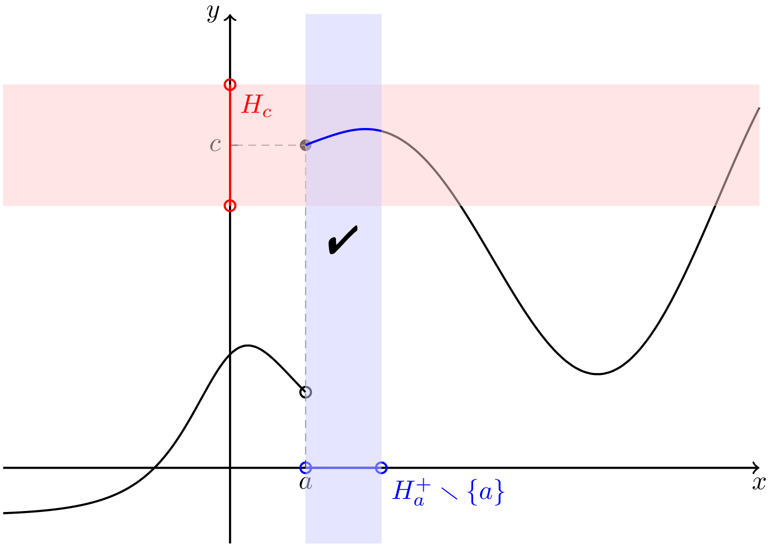
Ilustrace případu $a, c \in \mathbb{R}$



Ilustrace případu $a, c \in \mathbb{R}$



Ilustrace případu $a, c \in \mathbb{R}$



Limita funkce: příklad

Příklad.

Pro libovolné $a \in \overline{\mathbb{R}}$ platí

$$\lim_{x \to a} x = \lim_{x \to a_+} x = \lim_{x \to a_-} x = a.$$

Limita funkce: příklad

Příklad.

Pro libovolné $a \in \overline{\mathbb{R}}$ platí

$$\lim_{x \to a} x = \lim_{x \to a_+} x = \lim_{x \to a_-} x = a.$$

Vezmu-li libovolné okolí H_a bodu a pak pro $x \in H_a \smallsetminus \{a\}$ zcela jistě platí, že $x \in H_a$.

Hlavní body

1 Limita funkce

2 Věty o limitách funkcí

3 Nerovnosti a limity funkcí

Vztah limity funkce a jednostranných limit funkce

Věta:

Nechť $a \in \mathbb{R}$. Limita $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existuje a je rovna $c \in \overline{\mathbb{R}}$, právě když existují obě jednostranné limity $\lim\limits_{x \to a_+} f(x)$ a $\lim\limits_{x \to a_-} f(x)$ a obě jsou rovny c.

Důkaz.

Snadný, přenecháváme k rozmyšlení. $\square$

Vztah limity funkce a jednostranných limit funkce

Věta:

Nechť $a \in \mathbb{R}$. Limita $\lim_{x\to a} f(x)$ existuje a je rovna $c \in \overline{\mathbb{R}}$, právě když existují obě jednostranné limity $\lim_{x\to a_+} f(x)$ a $\lim_{x\to a_-} f(x)$ a obě jsou rovny c.

Důkaz.

Snadný, přenecháváme k rozmyšlení. $\square$

Důsledek:

Nechť f je funkce a bod $a \in \mathbb{R}$. Platí-li alespoň jedna z podmínek

- obě jednostranné limity funkce f v bodě a existují a jsou různé,
- alespoň jedna z jednostranných limit funkce f v bodě a neexistuje,

potom limita funkce f v bodě a neexistuje.

Jednostranná limita funkce: příklad

Příklad.

Limita

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$$

neexistuje.

Jednostranná limita funkce: příklad

Příklad.

Limita

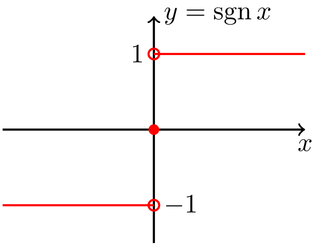
$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$$

neexistuje.

Pro jednostranné limity platí

$$\lim_{x \to 0_+} \operatorname{sgn} x = 1,$$

$$\lim_{x \to 0_-} \operatorname{sgn} x = -1.$$



Podle předchozího důsledku oboustranná limita nemůže existovat ($1 \neq -1$).

Heineho věta: tvrzení ekvivalentní definici limity

Věta (Heine):

$\lim_{x \to a} f(x) = c$, právě když je f definována na okolí bodu a (s možnou výjimkou bodu a) a pro každou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ s limitou a a splňující $\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \subset D_f \setminus \{a\}$ platí $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = c$.

Heineho věta: tvrzení ekvivalentní definici limity

Věta (Heine):

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$, právě když je f definována na okolí bodu a (s možnou výjimkou bodu a) a pro každou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ s limitou a a splňující $\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \subset D_f \setminus \{a\}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$.

Věta (Heine pro jednostranné limity):

$\lim\limits_{x\to a_-} f(x) = c$, resp. $\lim\limits_{x\to a_+} f(x) = c$, právě když je f definována na levém, resp. pravém, okolí bodu a a pro každou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ s limitou a a splňující

$$\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset D_f \cap (-\infty, a), \quad \text{resp.} \quad \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset D_f \cap (a, +\infty),$$

platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$.

Heineho věta: tvrzení ekvivalentní definici limity

Věta (Heine):

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$, **právě když** je f definována na okolí bodu a (s možnou výjimkou bodu a) a pro každou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ s limitou a a splňující $\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \subset D_f \setminus \{a\}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$.

Věta (Heine pro jednostranné limity):

$\lim\limits_{x\to a_-} f(x) = c$, resp. $\lim\limits_{x\to a_+} f(x) = c$, **právě když** je f definována na levém, resp. pravém, okolí bodu a a pro každou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ s limitou a a splňující

$$\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset D_f \cap (-\infty, a), \quad \text{resp.} \quad \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset D_f \cap (a, +\infty),$$

platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$.

Důkazy vynecháváme (jeden směr je snadný, rozmyslete který!).

Heineho věta: příklad

Příklad.

- Z dřívější přednášky o posloupnostech víme, že pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ a pro libovolnou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňující $a_n \geq 0$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \langle 0, +\infty)$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\alpha}$.

Heineho věta: příklad

Příklad.

- Z dřívější přednášky o posloupnostech víme, že pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ a pro libovolnou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňující $a_n \geq 0$ a $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \langle 0, +\infty)$ platí $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\alpha}$.
- Heineho věta pak implikuje

$$\lim_{x\to\alpha} \sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{\alpha}$$

pro každé $\alpha \in (0, +\infty)$ a

$$\lim_{x\to 0_+} \sqrt[k]{x} = 0.$$

Heineho věta: příklad

Příklad.

- Z dřívější přednášky o posloupnostech víme, že pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ a pro libovolnou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňující $a_n \geq 0$ a $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \alpha \in \langle 0, +\infty)$ platí $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\alpha}$.
- Heineho věta pak implikuje

$$\lim_{x \to \alpha} \sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{\alpha}$$

pro každé $\alpha \in (0, +\infty)$ a

$$\lim_{x \to 0_+} \sqrt[k]{x} = 0.$$

- Tento fakt lze alternativně dokázat i přímo z definice limity funkce $\sqrt[k]{x}$ v bodě α.

Heineho věta: důsledek

Heineho věta nám dále umožňuje zformulovat jednoduché kritérium pro vyvrácení existence (jednostranné) limity.

Heineho věta: důsledek

Heineho věta nám dále umožňuje zformulovat jednoduché kritérium pro vyvrácení existence (jednostranné) limity.

Důsledek:

Nechť f je funkce definovaná na okolí bodu $a \in \overline{\mathbb{R}}$ a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě reálné posloupnosti patřící do D_f, mající limitu a a splňující podmínky $x_n \neq a$ a $z_n \neq a$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pokud limity

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} f(z_n)$$

existují a jsou různé, nebo alespoň jedna z nich neexistuje, potom limita $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ neexistuje.

Příklad.

Limita

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

neexistuje.

Příklad.

Limita

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

neexistuje.

Označme $f(x) := \sin\frac{1}{x}$ a položme

$$x_n := \frac{1}{2\pi n}, \quad z_n := \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

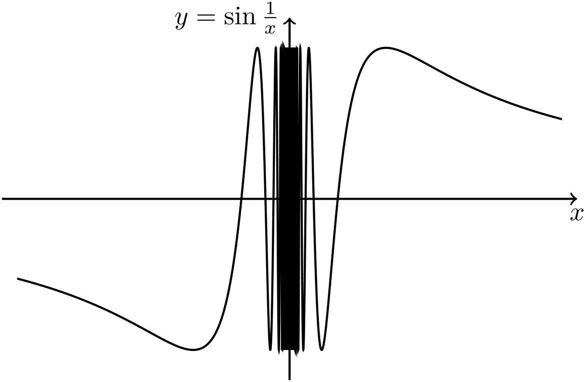
Tyto posloupnosti splňují

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = 0 \quad \text{a} \quad \{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{z_n | n \in \mathbb{N}\} \subset D_f = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}.$$

Konečně

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(2\pi n) = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Graf funkce $\sin \frac{1}{x}$



Nástroje pro výpočet limity funkce

Věta (O limitě součtu, součinu a podílu):

Nechť f a g jsou funkce a a prvek $\overline{\mathbb{R}}$. Potom

$$\lim_a (f+g) = \lim_a f + \lim_a g,$$

$$\lim_a f \cdot g = \lim_a f \cdot \lim_a g,$$

$$\lim_a \frac{f}{g} = \frac{\lim_a f}{\lim_a g},$$

platí v případě, že výrazy na pravé straně jsou definovány a v posledním případě za předpokladu, že $\frac{f}{g}$ je definována na okolí bodu a s možnou výjimkou bodu a samotného.

Poznámka:

Analogická věta platí i pro jednostranné limity funkcí.

Příklad

Počítat limitu polynomů je díky této větě velmi jednoduché.

Příklad.

Buď $P(x)$ libovolný polynom a $a \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a).$$

Příklad

Počítat limitu polynomů je díky této větě velmi jednoduché.

Příklad.

Buď $P(x)$ libovolný polynom a $a \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a).$$

Již jsme ukázali, že $\lim\limits_{x \to a} x = a$. Použijeme-li mnohonásobně větu o limitě součtu a součinu funkcí, ihned dostaneme tvrzení z našeho příkladu.

Příklad

Počítat limitu polynomů je díky této větě velmi jednoduché.

Příklad.

Buď $P(x)$ libovolný polynom a $a \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a).$$

Již jsme ukázali, že $\lim\limits_{x \to a} x = a$. Použijeme-li mnohonásobně větu o limitě součtu a součinu funkcí, ihned dostaneme tvrzení z našeho příkladu.

Například tedy platí

$$\lim_{x \to 2} \left(x^2 - 3x + 1\right) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = -1.$$

Příklad

Příklad.

Vypočtěte limitu funkce

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^3 - 3x^2 + 2x}$$

v bodech $a = -1$, $b = 1$, $c = 2$ a $d = -\infty$.

Příklad

Příklad.

Vypočtěte limitu funkce
$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^3 - 3x^2 + 2x}$$
v bodech $a = -1$, $b = 1$, $c = 2$ a $d = -\infty$.

Nejprve si všimněme, že jmenovatel lze rozložit na kořenové činitele
$$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2),$$
tudíž $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$. Pro výpočet limity v bodě $a = -1$ můžeme proto použít větu o limitě podílu,
$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\lim_{x \to a} x^4 + 2x^2 - 3}{\lim_{x \to a} x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{0}{-6} = 0.$$

Dále, před výpočtem limity v bodě $d = -\infty$ upravme výraz pro $f(x)$ následovně

$$f(x) = \frac{x^4 \left(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}\right)}{x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = x \cdot \frac{1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}.$$

Použijeme-li nyní větu o limitě součtu a podílu, dostáváme

$$\lim_{x \to d} f(x) = -\infty \cdot \frac{1}{1} = -\infty.$$

Dále, před výpočtem limity v bodě $d = -\infty$ upravme výraz pro $f(x)$ následovně

$$f(x) = \frac{x^4\left(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}\right)}{x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = x \cdot \frac{1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}.$$

Použijeme-li nyní větu o limitě součtu a podílu, dostáváme

$$\lim_{x \to d} f(x) = -\infty \cdot \frac{1}{1} = -\infty.$$

Pro výpočet limit v bodech $b = 1$ a $c = 2$ je vhodné upravit na součin kořenových činitelů i čitatel,

$$f(x) = \frac{(x^2+3)(x^2-1)}{x(x-1)(x-2)} = \frac{(x^2+3)(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x-2)} = \frac{(x^2+3)(x+1)}{x(x-2)}, x \in D_f.$$

Tudíž, opět pomocí předešlých vět,

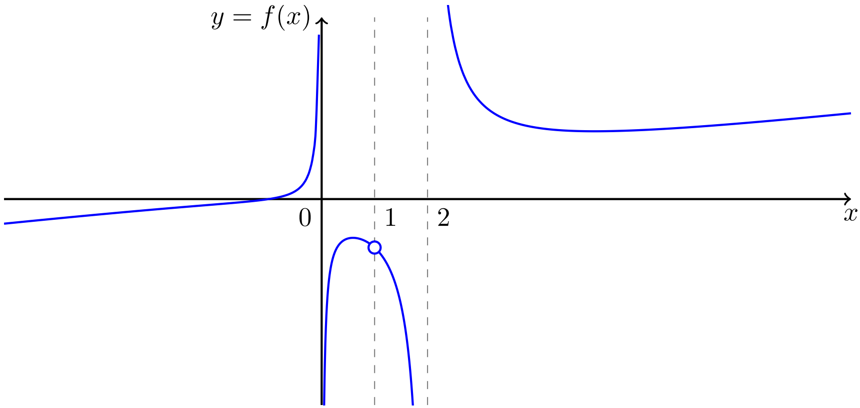
$$\lim_{x \to b} = \frac{8}{-1} = -8, \quad \lim_{x \to c} f(x) \text{ neexistuje.}$$

Neexistence poslední limity plyne z nerovnosti jednostranných limit,

$$\lim_{x \to c_+} f(x) = \frac{21}{2} \cdot (+\infty) = +\infty, \quad \lim_{x \to c_-} f(x) = \frac{21}{2} \cdot (-\infty) = -\infty$$

Graf funkce z předchozího příkladu

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^3 - 3x^2 + 2x}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$$



Věta o limitě složené funkce

Funkce můžeme nejen sčítat, násobit a dělit, ale i skládat.

Věta (O limitě složené funkce):

Nechť f a g jsou funkce, a, b, c jsou prvky $\overline{\mathbb{R}}$ a platí tři podmínky

1. $\lim\limits_{x \to b} f(x) = c$,
2. $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$,
3. buď $(\exists H_a)(\forall x \in D_g \cap H_a \smallsetminus \{a\})(g(x) \neq b)$ nebo $(b \in D_f$ a $f(b) = c)$.

Potom $\lim\limits_{x \to a} (f \circ g)(x) = c$.

Věta o limitě složené funkce

Funkce můžeme nejen sčítat, násobit a dělit, ale i skládat.

Věta (O limitě složené funkce):

Nechť f a g jsou funkce, a, b, c jsou prvky $\overline{\mathbb{R}}$ a platí tři podmínky

1. $\lim\limits_{x \to b} f(x) = c$,
2. $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$,
3. buď $(\exists H_a)(\forall x \in D_g \cap H_a \smallsetminus \{a\})(g(x) \neq b)$ nebo $(b \in D_f$ a $f(b) = c)$.

Potom $\lim\limits_{x \to a} (f \circ g)(x) = c$.

Důkaz.

Důkaz vynecháváme. $\square$

Příklad

Příklad.

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1} e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}.$$

Příklad

Příklad.

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \to 1} e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}.$$

Označme

$$f(x) = e^x \quad \text{a} \quad g(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Příklad

Příklad.

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1} e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}.$$

Označme

$$f(x) = e^x \quad \text{a} \quad g(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Na cvičení ověříte, že (1. a 2. předpoklad věty o limitě složené funkce)

$$\lim_{x\to 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to -\infty} e^x = 0.$$

Příklad

Příklad.

Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to 1} e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}.$$

Označme
$$f(x) = e^x \quad \text{a} \quad g(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Na cvičení ověříte, že (1. a 2. předpoklad věty o limitě složené funkce)
$$\lim_{x\to 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to -\infty} e^x = 0.$$

Dále například pro $H_1(1) = (0,2)$ platí $g(x) \neq -\infty$ pro všechna $x \in H_1(1) \setminus \{1\}$. První možnost v 3. předpokladu je tedy splněna.

Příklad

Příklad.

Vypočtěte limitu
$$\lim_{x\to 1} e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}.$$

Označme
$$f(x) = e^x \quad \text{a} \quad g(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Na cvičení ověříte, že (1. a 2. předpoklad věty o limitě složené funkce)
$$\lim_{x\to 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to -\infty} e^x = 0.$$

Dále například pro $H_1(1) = (0,2)$ platí $g(x) \neq -\infty$ pro všechna $x \in H_1(1) \setminus \{1\}$.
První možnost v 3. předpokladu je tedy splněna.
Větu o limitě složené funkce lze aplikovat a dostáváme výsledek
$$\lim_{x\to 1} e^{-\frac{1}{(x-1)^2}} = 0.$$

Hlavní body

1 Limita funkce

2 Věty o limitách funkcí

3 Nerovnosti a limity funkcí

Nerovnosti a limity funkcí

I pro funkce a jejich limity platí podobné věty jako o posloupnostech a nerovnostech. Důkazy se vedou velmi podobně jako u posloupností a proto je zde vynecháváme.

Věta:

Nechť existují limity $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)$. Pak platí dvě tvrzení:

1. Pokud $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$, potom existuje okolí H_a bodu a takové, že

$$\text{pro všechna } x \in H_a \smallsetminus \{a\} \text{ platí } f(x) < g(x).$$

2. Pokud existuje okolí H_a bodu a takové, že

$$\text{pro všechna } x \in H_a \smallsetminus \{a\} \text{ je } f(x) \le g(x),$$

   potom $\lim\limits_{x\to a} f(x) \le \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Věta o limitě sevřené funkce

Podobně jako v případě limit posloupností platí věta o limitě sevřené posloupnosti, platí v případě funkcí i následující věta:

Věta (O limitě sevřené funkce):

Nechť pro funkce f, g, h a body $a, c \in \overline{\mathbb{R}}$ platí:

1. existuje okolí H_a bodu a takové, že pro každé $x \in H_a \setminus \{a\}$ platí $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$,
2. existují $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = c$.

Potom existuje i limita $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ a je rovna c.

Příklad.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$.

Příklad.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\dfrac{1}{x}$.

- Zřejmě nelze použít větu o součinu limit, limita $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ totiž neexistuje.

Příklad.

Vypočtěte $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$.

- Zřejmě nelze použít větu o součinu limit, limita $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ totiž neexistuje.
- Ovšem nerovnost

$$f(x) := -|x| \leq g(x) := x \sin \frac{1}{x} \leq |x| =: h(x)$$

platí pro libovolné $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Příklad.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$.

- Zřejmě nelze použít větu o součinu limit, limita $\lim\limits_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ totiž neexistuje.
- Ovšem nerovnost

$$f(x) := -|x| \leq g(x) := x \sin \frac{1}{x} \leq |x| =: h(x)$$

platí pro libovolné $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- Zvolíme-li např. $H_a = (-1, 1)$ okolí bodu $a = 0$, pak
  1. nerovnost $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ platí pro každé $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$,
  2. existují $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$.

Podle věty o limitě sevřené funkce pak $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

Příklad.

Ověřte

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0, \quad \lim_{x\to 0} \cos x = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Příklad.

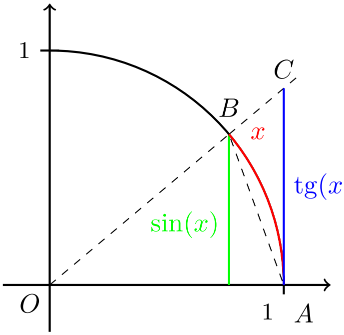
Ověřte

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0, \quad \lim_{x\to 0} \cos x = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

- Pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ platí

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

Porovnejte obsahy trojúhelníku OAB, výseče OAB a trojúhelníku OAC.



Příklad.

Ověřte

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0, \quad \lim_{x\to 0} \cos x = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

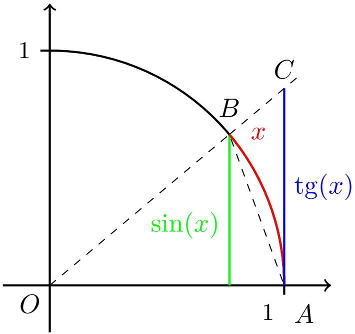
- Pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ platí

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

Porovnejte obsahy trojúhelníku OAB, výseče OAB a trojúhelníku OAC.

- Funkce $\sin$ je lichá a tudíž

$$-|x| \leq \sin x \leq |x|, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$



Příklad.

Ověřte

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0, \quad \lim_{x\to 0} \cos x = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

- Pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ platí

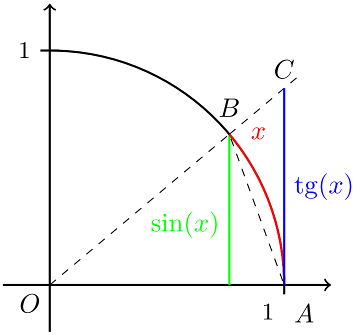
$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

Porovnejte obsahy trojúhelníku OAB, výseče OAB a trojúhelníku OAC.

- Funkce sin je lichá a tudíž

$$-|x| \le \sin x \le |x|, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

- Potom $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$. A z rovnosti $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ pak i $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$. (Rozmyslete znaménko!)



- Funkce $\sin$ i tg jsou liché a proto z nerovnosti

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

plyne nerovnost

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}.$$

Odtud ihned dostáváme hledanou limitu

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$