Základy matematické analýzy

Extrémy a průběh funkce

Pavel Hrabák[1], Tomáš Kalvoda[2], Ivo Petr[3]

[1]pavel.hrabak@fit.cvut.cz [2]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [3]ivo.petr@fit.cvut.cz,

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

4. března 2021
ZS 2020/2021

Hlavní body

Hlavní body

1. Extrémy funkce
2. Věta o přírustku funkce
3. Důsledky pro vyšetřování průběhu funkce
4. l'Hospitalovo pravidlo
5. Příklady

Optimalizace

- Řada zajímavých a praktických úloh spočívá v hledání maxim (či minim) jistých funkcí, v tzv. optimalizaci. Například:
    - Jak distribuovat objednané zboží mezi zákazníky co nejefektivněji, tj. s co **nejmenšími** náklady na dopravu?
    - Jak sestavit jídelníček splňující zadané dietologické podmínky a **minimalizovat** při tom náklady?
    - Jak efektivně distribuovat pohonné hmoty a materiál na frontu a současně **maximalizovat** protivníkovy ztráty?

Optimalizace

- Řada zajímavých a praktických úloh spočívá v hledání maxim (či minim) jistých funkcí, v tzv. optimalizaci. Například:
  - Jak distribuovat objednané zboží mezi zákazníky co nejefektivněji, tj. s co **nejmenšími** náklady na dopravu?
  - Jak sestavit jídelníček splňující zadané dietologické podmínky a **minimalizovat** při tom náklady?
  - Jak efektivně distribuovat pohonné hmoty a materiál na frontu a současně **maximalizovat** protivníkovy ztráty?
- Optimalizace se dále využívá ve strojovém učení. V řadě metod z této oblasti (např. rozpoznávání) pod termínem „učení“ nenajdeme nic jiného než hledání maxima/minima jisté komplikované funkce.

Optimalizace

- Řada zajímavých a praktických úloh spočívá v hledání maxim (či minim) jistých funkcí, v tzv. optimalizaci. Například:
  - Jak distribuovat objednané zboží mezi zákazníky co nejefektivněji, tj. s co **nejmenšími** náklady na dopravu?
  - Jak sestavit jídelníček splňující zadané dietologické podmínky a **minimalizovat** při tom náklady?
  - Jak efektivně distribuovat pohonné hmoty a materiál na frontu a současně **maximalizovat** protivníkovy ztráty?
- Optimalizace se dále využívá ve strojovém učení. V řadě metod z této oblasti (např. rozpoznávání) pod termínem „učení“ nenajdeme nic jiného než hledání maxima/minima jisté komplikované funkce.
- Zde v BI-ZMA se při hledání maxim a minim omezíme na reálné funkce reálné proměnné. Řada zaváděných konceptů se ovšem dále používá i v případě funkcí více proměnných.

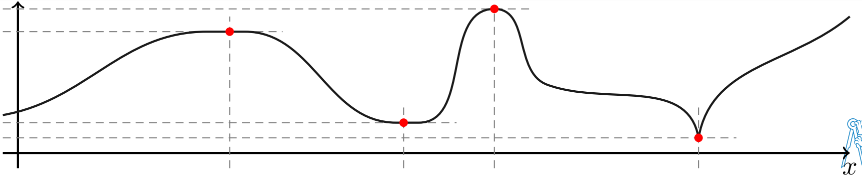
Definice:

Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in D_f$

1. **lokální maximum**,

právě když existuje okolí (v krajním bodě jednostranné) $H_a \subset D_f$ bodu a tak, že

1. pro všechna $x \in H_a$ platí $f(x) \leq f(a)$,



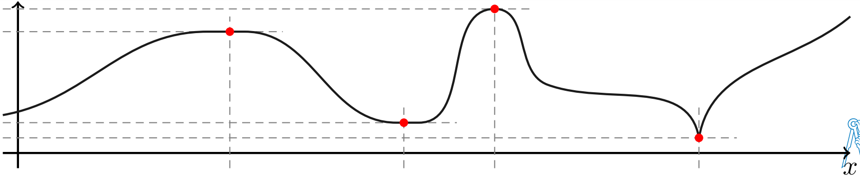
Definice:

Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in D_f$

1. **lokální maximum**,
2. **lokální minimum**,

právě když existuje okolí (v krajním bodě jednostranné) $H_a \subset D_f$ bodu a tak, že

1. pro všechna $x \in H_a$ platí $f(x) \leq f(a)$,
2. pro všechna $x \in H_a$ platí $f(x) \geq f(a)$,



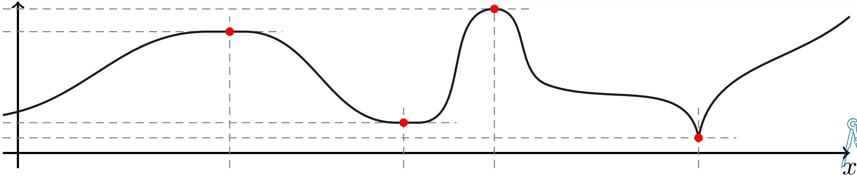
Definice:

Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in D_f$

1. **lokální maximum**,
2. **lokální minimum**,
3. **ostré lokální maximum**,

právě když existuje okolí (v krajním bodě jednostranné) $H_a \subset D_f$ bodu a tak, že

1. pro všechna $x \in H_a$ platí $f(x) \leq f(a)$,
2. pro všechna $x \in H_a$ platí $f(x) \geq f(a)$,
3. pro všechna $x \in H_a \setminus \{a\}$ platí $f(x) < f(a)$,



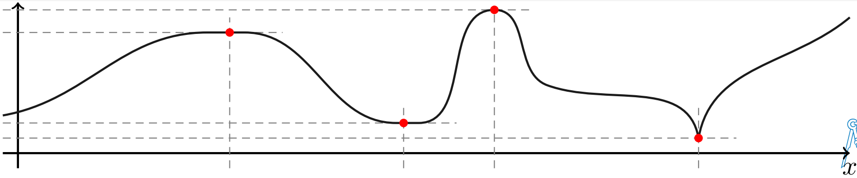
Definice:

Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in D_f$

1. **lokální maximum**,
2. **lokální minimum**,
3. **ostré lokální maximum**,
4. **ostré lokální minimum**,

právě když existuje okolí (v krajním bodě jednostranné) $H_a \subset D_f$ bodu a tak, že

1. pro všechna $x \in H_a$ platí $f(x) \leq f(a)$,
2. pro všechna $x \in H_a$ platí $f(x) \geq f(a)$,
3. pro všechna $x \in H_a \setminus \{a\}$ platí $f(x) < f(a)$,
4. pro všechna $x \in H_a \setminus \{a\}$ platí $f(x) > f(a)$.



Věta (Nutná podmínka existence lokálního extrému):

Nechť funkce f má v bodě a lokální extrém. Potom $f'(a) = 0$, nebo derivace v bodě a neexistuje.

Věta (Nutná podmínka existence lokálního extrému):

Nechť funkce f má v bodě a lokální extrém. Potom $f'(a) = 0$, nebo derivace v bodě a neexistuje.

Důkaz.

Provedeme sporem.

Věta (Nutná podmínka existence lokálního extrému):

Nechť funkce f má v bodě a lokální extrém. Potom $f'(a) = 0$, nebo derivace v bodě a neexistuje.

Důkaz.

Provedeme sporem. Kdyby např. $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$, potom lze nalézt $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in (a - \delta,\ a + \delta) \setminus \{a\}$ platí

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Věta (Nutná podmínka existence lokálního extrému):

Nechť funkce f má v bodě a lokální extrém. Potom $f'(a) = 0$, nebo derivace v bodě a neexistuje.

Důkaz.

Provedeme sporem. Kdyby např. $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$, potom lze nalézt $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in (a-\delta,\ a+\delta) \smallsetminus \{a\}$ platí

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0.$$

Tudíž

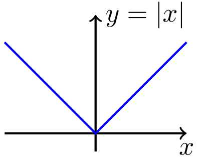
- $f(x) > f(a)$ pro $x \in (a,\ a+\delta)$,
- $f(x) < f(a)$ pro $x \in (a-\delta, a)$.

Funkce f tedy v a nemá lokální extrém. Podobně lze postupovat v případě $f'(a) < 0$. □

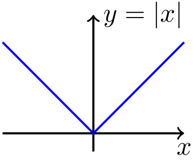
Příklady a poznámky

Příklad (Extrém v bodě s neexistující derivací).

Uvažme funkci $f(x) := |x|$. Funkce f má jistě ostré lokální minimum v bodě 0, ale její derivace v bodě 0 neexistuje.



Příklady a poznámky

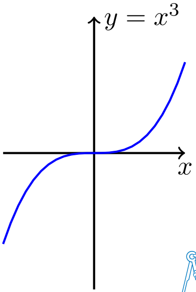


Příklad (Extrém v bodě s neexistující derivací).

Uvažme funkci $f(x) := |x|$. Funkce f má jistě ostré lokální minimum v bodě 0, ale její derivace v bodě 0 neexistuje.

Příklad (Bod nulové derivace bez extrému).

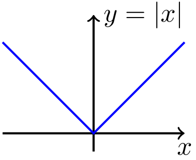
Funkce $f(x) := x^3$ má v bodě 0 nulovou derivaci, $f'(0) = 0$, avšak nenabývá v něm lokálního extrému. Je dokonce rostoucí na celém $\mathbb{R}$.



Příklady a poznámky

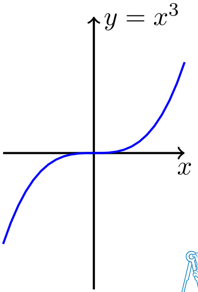
Příklad (Extrém v bodě s neexistující derivací).

Uvažme funkci $f(x) := |x|$. Funkce f má jistě ostré lokální minimum v bodě 0, ale její derivace v bodě 0 neexistuje.



Příklad (Bod nulové derivace bez extrému).

Funkce $f(x) := x^3$ má v bodě 0 nulovou derivaci, $f'(0) = 0$, avšak nenabývá v něm lokálního extrému. Je dokonce rostoucí na celém $\mathbb{R}$.



Poznámka:

Předchozí věta udává pouze podmínku **nutnou** pro existenci lokálního extrému. Umožňuje nám tvrdit, kde lokální extrém nenastává.

Globální extrémy

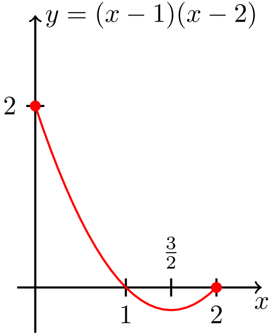
Věta (Extrém spojité funkce na uzavřeném intervalu):

Funkce f spojitá a definovaná právě na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ nabývá maxima a minima (tzv. **globální extrém**). Extrém může být pouze v krajních bodech a, b a v bodech kde je derivace rovna 0 nebo neexistuje.

Globální extrémy

Věta (Extrém spojité funkce na uzavřeném intervalu):

Funkce f spojitá a definovaná právě na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ nabývá maxima a minima (tzv. **globální extrém**). Extrém může být pouze v krajních bodech a, b a v bodech kde je derivace rovna 0 nebo neexistuje.



Jako **příklad** uvažme funkci

$$f(x) = (x-1)(x-2)$$

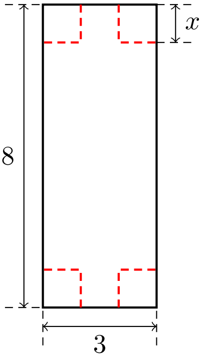
na intervalu $\langle 0, 2\rangle$. Derivace je nulová v bodě $\frac{3}{2}$, porovnáním funkčních hodnot

$$f(0) = 2, \quad f\left({}^{3}\!/\!{}_{2}\right) = -\frac{1}{4}, \quad f(2) = 0$$

uzavíráme že globání maximum je v bodě 0 s hodnotou 2 a globální minimum je v bodě $\frac{3}{2}$ s hodnotou $-\frac{1}{4}$.

Příklad

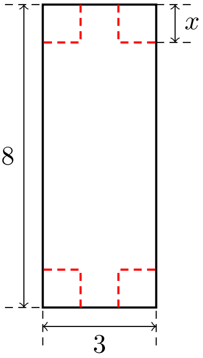
Příklad.
Z papíru tvaru obdélníka se stranami 8 cm a 3 cm vyrobíme krabičku tak, že vystřihneme ze všech čtyř rohů stejné čtverce. Krabička bude mít výšku rovnou straně tohoto čtverce. Nalezněte délku strany čtverce, při níž bude objem krabičky největší.



Příklad

Příklad.

Z papíru tvaru obdélníka se stranami 8 cm a 3 cm vyrobíme krabičku tak, že vystřihneme ze všech čtyř rohů stejné čtverce. Krabička bude mít výšku rovnou straně tohoto čtverce. Nalezněte délku strany čtverce, při níž bude objem krabičky největší.



Označme stranu vystřihnutých čtverců symbolem x. Pro objem krabičky $O(x)$ platí

$$O(x) = x(8-2x)(3-2x) = 4x^3 - 22x^2 + 24x,$$

kde $x \in \langle 0, {}^3\!/_2 \rangle$.
Derivace $O(x)$ je nula pouze v bodech 3 a ${}^2\!/_3$, ovšem pouze ${}^2\!/_3 \in \langle 0, {}^3\!/_2 \rangle$. V tomto bodě nastává i maximum $O({}^2\!/_3) = {}^{200}\!/_{27}\,\mathrm{cm}^3$, protože $O(0) = O({}^3\!/_2) = 0$.

Příklad

Příklad.

Uzavřenost intervalu v předchozí větě je podstatná. Jako příklad uvažme funkci

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-4}$$

spojitou na otevřeném intervalu $J = (0, 4)$. Tato funkce nemá na J ani maximum ani minimum.

Příklad

Příklad.
Uzavřenost intervalu v předchozí větě je podstatná. Jako příklad uvažme funkci

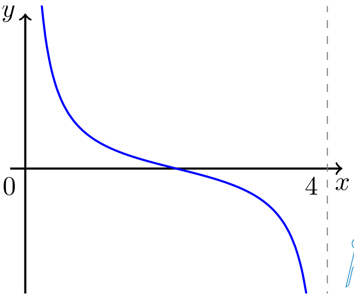
$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-4}$$

spojitou na otevřeném intervalu $J = (0,4)$. Tato funkce nemá na J ani maximum ani minimum.

Skutečně, platí totiž

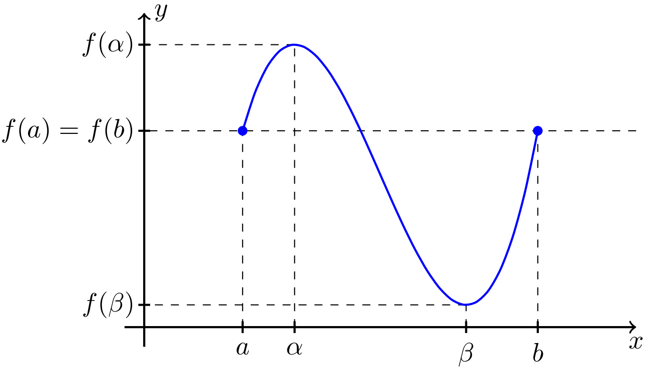
$$\lim_{x \to 0_+} f(x) = +\infty - \frac{1}{4} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 4_-} f(x) = \frac{1}{4} + (-\infty) = -\infty.$$

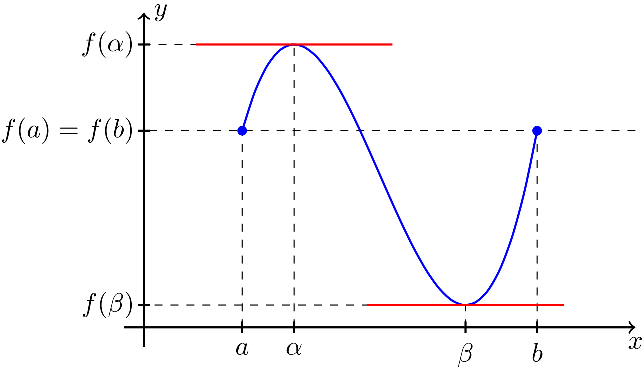


Hlavní body

Ilustrace



Ilustrace



Pozorování: Pro „pěknou“ funkci, mající v krajních bodech jistého intervalu stejné funkční hodnoty, existuje uvnitř tohoto intervalu bod, kde má její graf tečnu rovnoběžnou s osou x.

Rolleova věta

Věta (Rolleova):

Nechť funkce f splňuje podmínky

Rolleova věta

Věta (Rolleova):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$,

Rolleova věta

Věta (Rolleova):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b),

Rolleova věta

Věta (Rolleova):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b),
3. $f(a) = f(b)$.

Rolleova věta

Věta (Rolleova):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b),
3. $f(a) = f(b)$.

Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

Rolleova věta

Věta (Rolleova):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b),
3. $f(a) = f(b)$.

Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

Důkaz.

Pokud je funkce f konstantní, lze za c volit libovolné číslo z intervalu (a, b).

Rolleova věta

Věta (Rolleova):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b),
3. $f(a) = f(b)$.

Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

Důkaz.

Pokud je funkce f konstantní, lze za c volit libovolné číslo z intervalu (a, b).

V případě, že f není konstantní, je $f(\langle a, b\rangle) = \langle A, B\rangle$ uzavřený interval (plyne ze spojitosti f). Existují tedy $\alpha, \beta \in \langle a, b\rangle$ tak, že $A = f(\alpha) < f(\beta) = B$.

Rolleova věta

Věta (Rolleova):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b),
3. $f(a) = f(b)$.

Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

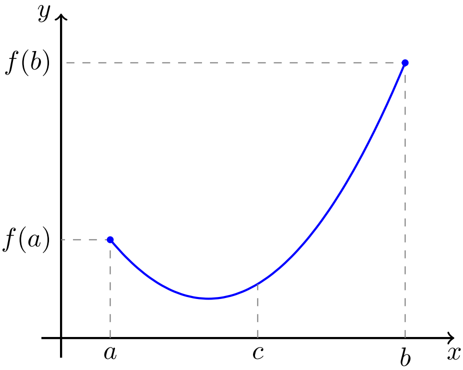
Důkaz.

Pokud je funkce f konstantní, lze za c volit libovolné číslo z intervalu (a, b).

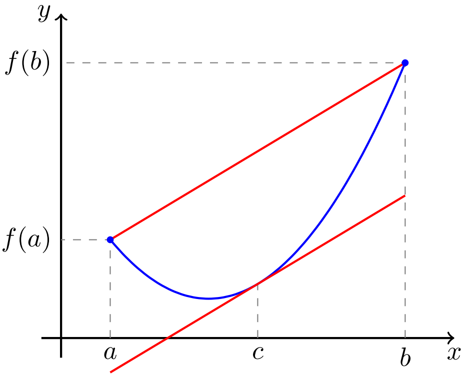
V případě, že f není konstantní, je $f(\langle a, b\rangle) = \langle A, B\rangle$ uzavřený interval (plyne ze spojitosti f). Existují tedy $\alpha, \beta \in \langle a, b\rangle$ tak, že $A = f(\alpha) < f(\beta) = B$.

Protože $f(a) = f(b)$ leží alespoň jeden z bodů α, β uvnitř (a, b). Označme tento bod c. Funkce f má v bodě c lokální extrém, a proto $f'(c) = 0$. Skutečně, funkce f má totiž derivaci v každém bodě intervalu (a, b). □

Ilustrace



Ilustrace



Přírustek funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ je roven $f(b) - f(a)$. Lze ho vyjádřit pomocí derivace funkce f?

Věta o přírustku funkce

Věta (Lagrangeova, O přírustku funkce):

Nechť funkce f splňuje podmínky

Věta o přírustku funkce

Věta (Lagrangeova, O přírustku funkce):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,

Věta o přírustku funkce

Věta (Lagrangeova, O přírustku funkce):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b).

Věta o přírustku funkce

Věta (Lagrangeova, O přírustku funkce):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b).

Potom existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Věta o přírustku funkce

Věta (Lagrangeova, O přírustku funkce):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b).

Potom existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Důkaz.

Položme $g(x) := f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.

Věta o přírustku funkce

Věta (Lagrangeova, O přírustku funkce):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b).

Potom existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Důkaz.

Položme $g(x) := f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. Tato funkce je spojitá na $\langle a, b\rangle$, má derivaci v každém bodě intervalu (a, b) a navíc $g(a) = g(b) = f(a)$.

Věta o přírustku funkce

Věta (Lagrangeova, O přírustku funkce):

Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b).

Potom existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Důkaz.

Položme $g(x) := f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. Tato funkce je spojitá na $\langle a, b\rangle$, má derivaci v každém bodě intervalu (a, b) a navíc $g(a) = g(b) = f(a)$. Proto podle Rolleovy věty existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Hlavní body

Monotonie funkce

Definice:

Nechť J je interval s krajními body a a b. Potom **vnitřkem intervalu** J nazveme otevřený interval (a, b). Značíme ho $J^\circ = (a, b)$.

Monotonie funkce

Definice:

Nechť J je interval s krajními body a a b. Potom **vnitřkem intervalu** J nazveme otevřený interval (a, b). Značíme ho $J^\circ = (a, b)$.

Věta:

Nechť f je spojitá na intervalu J a nechť pro každé $x \in J^\circ$ existuje $f'(x)$. Potom platí následujících pět tvrzení

Monotonie funkce

Definice:

Nechť J je interval s krajními body a a b. Potom **vnitřkem intervalu** J nazveme otevřený interval (a, b). Značíme ho $J^\circ = (a, b)$.

Věta:

Nechť f je spojitá na intervalu J a nechť pro každé $x \in J^\circ$ existuje $f'(x)$. Potom platí následujících pět tvrzení

1. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) \geq 0\big) \Rightarrow f$ je rostoucí na J,

Monotonie funkce

Definice:

Nechť J je interval s krajními body a a b. Potom **vnitřkem intervalu** J nazveme otevřený interval (a, b). Značíme ho $J^\circ = (a, b)$.

Věta:

Nechť f je spojitá na intervalu J a nechť pro každé $x \in J^\circ$ existuje $f'(x)$. Potom platí následujících pět tvrzení

1. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) \geq 0\big) \Rightarrow f$ je rostoucí na J,
2. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) \leq 0\big) \Rightarrow f$ je klesající na J,

Monotonie funkce

Definice:

Nechť J je interval s krajními body a a b. Potom **vnitřkem intervalu** J nazveme otevřený interval (a, b). Značíme ho $J^\circ = (a, b)$.

Věta:

Nechť f je spojitá na intervalu J a nechť pro každé $x \in J^\circ$ existuje $f'(x)$. Potom platí následujících pět tvrzení

1. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) \geq 0\big) \Rightarrow f$ je rostoucí na J,
2. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) \leq 0\big) \Rightarrow f$ je klesající na J,
3. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) > 0\big) \Rightarrow f$ je ostře rostoucí na J,

Monotonie funkce

Definice:

Nechť J je interval s krajními body a a b. Potom **vnitřkem intervalu** J nazveme otevřený interval (a, b). Značíme ho $J^\circ = (a, b)$.

Věta:

Nechť f je spojitá na intervalu J a nechť pro každé $x \in J^\circ$ existuje $f'(x)$. Potom platí následujících pět tvrzení

1. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) \geq 0\big) \Rightarrow f$ je rostoucí na J,
2. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) \leq 0\big) \Rightarrow f$ je klesající na J,
3. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) > 0\big) \Rightarrow f$ je ostře rostoucí na J,
4. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) < 0\big) \Rightarrow f$ je ostře klesající na J,

Monotonie funkce

Definice:

Nechť J je interval s krajními body a a b. Potom **vnitřkem intervalu** J nazveme otevřený interval (a, b). Značíme ho $J^\circ = (a, b)$.

Věta:

Nechť f je spojitá na intervalu J a nechť pro každé $x \in J^\circ$ existuje $f'(x)$. Potom platí následujících pět tvrzení

1. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) \geq 0\big) \Rightarrow f$ je rostoucí na J,
2. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) \leq 0\big) \Rightarrow f$ je klesající na J,
3. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) > 0\big) \Rightarrow f$ je ostře rostoucí na J,
4. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) < 0\big) \Rightarrow f$ je ostře klesající na J,
5. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) = 0\big) \Rightarrow f$ je konstantní na J,

Důkaz

Důkaz 1. tvrzení, ostatní naprosto analogicky.

Buďte $x_1, x_2 \in J$ taková, že $x_1 < x_2$. Podle Lagrangeovy věty o přírustku funkce aplikované na interval $\langle x_1, x_2 \rangle$ existuje $c \in (x_1, x_2)$ tak, že

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Protože $c \in J^\circ$, je $f'(c) \geq 0$. Tudíž

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2). \qquad \square$$

Příklad

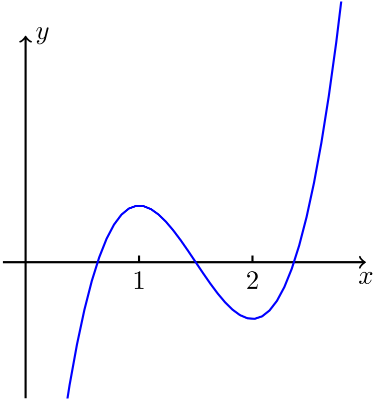
Poznámka:

Hlavním výsledkem předchozí věty tedy je: Je-li funkce f diferencovatelná, pak o tom zda roste/klesá rozhoduje znaménko její derivace.

Příklad

Poznámka:

Hlavním výsledkem předchozí věty tedy je: Je-li funkce f diferencovatelná, pak o tom zda roste/klesá rozhoduje znaménko její derivace.



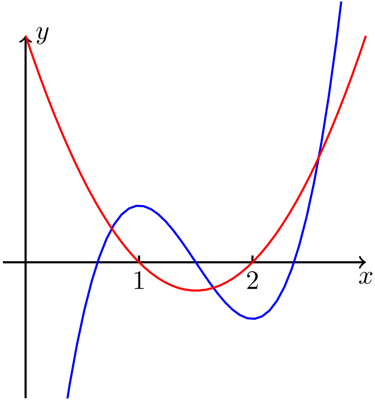
Uvažme funkci

$$f(x) := 2x^3 - 9x^2 + 12x - \frac{9}{2}$$

Příklad

Poznámka:

Hlavním výsledkem předchozí věty tedy je: Je-li funkce f diferencovatelná, pak o tom zda roste/klesá rozhoduje znaménko její derivace.



Uvažme funkci

$$f(x) := 2x^3 - 9x^2 + 12x - \frac{9}{2}$$

pro jejíž derivaci platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 18x + 12 \\ &= 6(x-1)(x-2). \end{aligned}$$

Konvexnost a konkávnost funkce

Definice:

Funkci f definovanou na intervalu J nazveme **konvexní** (resp. **konkávní**) **na intervalu** J, právě když pro každé $x_1, x_2, x_3 \in J$ splňující $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $(x_2, f(x_2))$ buďto pod (resp. nad) přímkou spojující body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$, nebo na ní.

Konvexnost a konkávnost funkce

Definice:

Funkci f definovanou na intervalu J nazveme **konvexní** (resp. **konkávní**) **na intervalu** J, právě když pro každé $x_1, x_2, x_3 \in J$ splňující $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $(x_2, f(x_2))$ buďto pod (resp. nad) přímkou spojující body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$, nebo na ní.

Definice:

Funkci f definovanou na intervalu J nazveme **ryze konvexní** (resp. **ryze konkávní**) **na intervalu** J, právě když pro každé $x_1, x_2, x_3 \in J$ splňující $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $(x_2, f(x_2))$ pod (resp. nad) přímkou spojující body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$.

Konvexnost a konkávnost funkce

Definice:

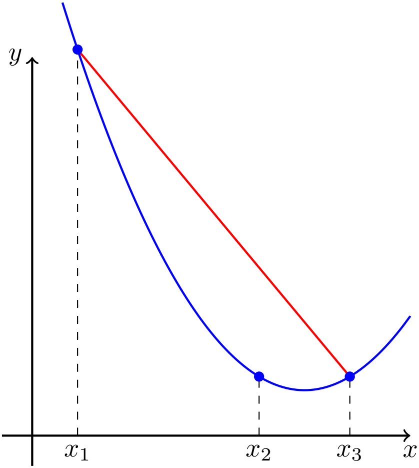
Funkci f definovanou na intervalu J nazveme **konvexní** (resp. **konkávní**) **na intervalu** J, právě když pro každé $x_1, x_2, x_3 \in J$ splňující $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $(x_2, f(x_2))$ buďto pod (resp. nad) přímkou spojující body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$, nebo na ní.

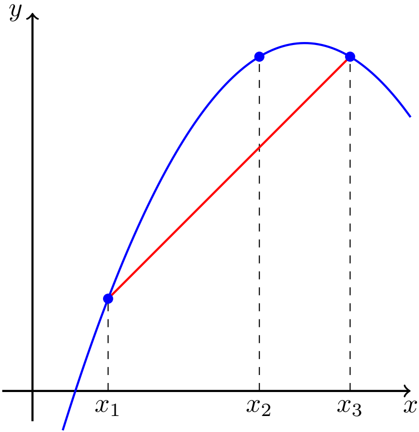
Definice:

Funkci f definovanou na intervalu J nazveme **ryze konvexní** (resp. **ryze konkávní**) **na intervalu** J, právě když pro každé $x_1, x_2, x_3 \in J$ splňující $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $(x_2, f(x_2))$ pod (resp. nad) přímkou spojující body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$.

Očividně, f je konkávní na intervalu J, právě když $-f$ je konvexní na intervalu J. Stačí se tedy soustředit například na konvexní funkce.

Konvexnost a konkávnost funkce: ilustrace





Konvexnost: nerovnost

- Přepišme požadavek v definici konvexnosti explicitně. Máme funkci f definovanou na intervalu J a body $x_1 < x_2 < x_3$. Přímka procházející body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$ je dána rovnicí

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x - x_1).$$

Konvexnost: nerovnost

- Přepišme požadavek v definici konvexnosti explicitně. Máme funkci f definovanou na intervalu J a body $x_1 < x_2 < x_3$. Přímka procházející body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$ je dána rovnicí

  $$y = f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x - x_1).$$

  Požadavek, aby bod $(x_2, f(x_2))$ ležel pod touto přímkou (nebo na ní) pak lze po několika drobných úpravách vyjádřit jako nerovnost

  $$f(x_2)(x_3 - x_1) \leq f(x_1)(x_3 - x_2) + f(x_3)(x_2 - x_1).$$

Konvexnost: nerovnost

- Přepišme požadavek v definici konvexnosti explicitně. Máme funkci f definovanou na intervalu J a body $x_1 < x_2 < x_3$. Přímka procházející body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$ je dána rovnicí

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x - x_1).$$

  Požadavek, aby bod $(x_2, f(x_2))$ ležel pod touto přímkou (nebo na ní) pak lze po několika drobných úpravách vyjádřit jako nerovnost

$$f(x_2)(x_3 - x_1) \leq f(x_1)(x_3 - x_2) + f(x_3)(x_2 - x_1).$$

- Uvažme body $x_1 := x < y =: x_3$ a bod $x_2 := \lambda x + (1 - \lambda)y$, $\lambda \in (0, 1)$ ležící mezi x a y.

Konvexnost: nerovnost

- Přepišme požadavek v definici konvexnosti explicitně. Máme funkci f definovanou na intervalu J a body $x_1 < x_2 < x_3$. Přímka procházející body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$ je dána rovnicí

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x - x_1).$$

Požadavek, aby bod $(x_2, f(x_2))$ ležel pod touto přímkou (nebo na ní) pak lze po několika drobných úpravách vyjádřit jako nerovnost

$$f(x_2)(x_3 - x_1) \leq f(x_1)(x_3 - x_2) + f(x_3)(x_2 - x_1).$$

- Uvažme body $x_1 := x < y =: x_3$ a bod $x_2 := \lambda x + (1 - \lambda)y$, $\lambda \in (0, 1)$ ležící mezi x a y. Potom lze předchozí nerovnost přepsat do tvaru

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y)(y - x) \leq f(x)(\lambda y - \lambda x) + f(y)((\lambda - 1)x + (1 - \lambda)y),$$

což po jednoduché úpravě přechází na

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Konvexnost: nerovnost

- Přepišme požadavek v definici konvexnosti explicitně. Máme funkci f definovanou na intervalu J a body $x_1 < x_2 < x_3$. Přímka procházející body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$ je dána rovnicí

  $$y = f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x - x_1).$$

  Požadavek, aby bod $(x_2, f(x_2))$ ležel pod touto přímkou (nebo na ní) pak lze po několika drobných úpravách vyjádřit jako nerovnost

  $$f(x_2)(x_3 - x_1) \leq f(x_1)(x_3 - x_2) + f(x_3)(x_2 - x_1).$$

- Uvažme body $x_1 := x < y =: x_3$ a bod $x_2 := \lambda x + (1 - \lambda)y$, $\lambda \in (0, 1)$ ležící mezi x a y. Potom lze předchozí nerovnost přepsat do tvaru

  $$f(\lambda x + (1 - \lambda)y)(y - x) \leq f(x)(\lambda y - \lambda x) + f(y)((\lambda - 1)x + (1 - \lambda)y),$$

  což po jednoduché úpravě přechází na

  $$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

  Není těžké rozmyslet, že f je konvexní na J, právě když pro každé $x, y \in J$ a $\lambda \in (0, 1)$ platí předchozí nerovnost.

Konvexnost, konkávnost a druhá derivace

Věta:

Buď f funkce spojitá na intervalu J, která má druhou derivaci v každém bodě J°.

- Funkce f je konvexní na intervalu J, právě když $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in J^\circ$.
- Je-li $f''(x) > 0$ v každém bodě $x \in J^\circ$, pak je f ryze konvexní na J.

Konvexnost, konkávnost a druhá derivace

Věta:

Buď f funkce spojitá na intervalu J, která má druhou derivaci v každém bodě J°.

- Funkce f je konvexní na intervalu J, právě když $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in J^\circ$.
- Je-li $f''(x) > 0$ v každém bodě $x \in J^\circ$, pak je f ryze konvexní na J.

Důkaz.

V důkazu se opět využije Lagrangeova věta o přírustku funkce. Na přednášce důkaz vynecháme, viz poznámky k přednášce. □

Konvexnost, konkávnost a druhá derivace

Věta:

Buď f funkce spojitá na intervalu J, která má druhou derivaci v každém bodě J°.

- Funkce f je konvexní na intervalu J, právě když $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in J^\circ$.
- Je-li $f''(x) > 0$ v každém bodě $x \in J^\circ$, pak je f ryze konvexní na J.

Důkaz.

V důkazu se opět využije Lagrangeova věta o přírustku funkce. Na přednášce důkaz vynecháme, viz poznámky k přednášce. □

Poznámka:

- Stejná věta platí i pro konkávní funkce. V tomto případě je znaménko druhé derivace (jejíž existence je předpokladem věty) záporné.
- Funkce $f(x) = x^4$ je ryze konvexní na $\mathbb{R}$, ale $f''(0) = 0$. Implikaci v druhém bodě věty nelze obrátit.

Konvexnost a konkávnost v bodě

Definice:

Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě $a \in D_f$. Pokud existuje okolí H_a bodu a takové, že pro všechna $x \in H_a \smallsetminus \{a\}$ leží všechny body $(x, f(x))$ nad (resp. pod) tečnou funkce f v bodě a,

$$y = f(a) + f'(a)(x - a),$$

nebo na ní, pak f nazveme **konvexní (resp. konkávní) v bodě** a.

Konvexnost a konkávnost v bodě

Definice:

Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě $a \in D_f$. Pokud existuje okolí H_a bodu a takové, že pro všechna $x \in H_a \setminus \{a\}$ leží všechny body $(x, f(x))$ nad (resp. pod) tečnou funkce f v bodě a,

$$y = f(a) + f'(a)(x - a),$$

nebo na ní, pak f nazveme **konvexní (resp. konkávní) v bodě** a.

- Konvexnost na intervalu nevyžaduje diferencovatelnost, na rozdíl od konvexnosti v bodě, která vychází z pojmu tečny (kterou konstruujeme pomocí derivace).

Konvexnost a konkávnost v bodě

Definice:

Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě $a \in D_f$. Pokud existuje okolí H_a bodu a takové, že pro všechna $x \in H_a \setminus \{a\}$ leží všechny body $(x, f(x))$ nad (resp. pod) tečnou funkce f v bodě a,

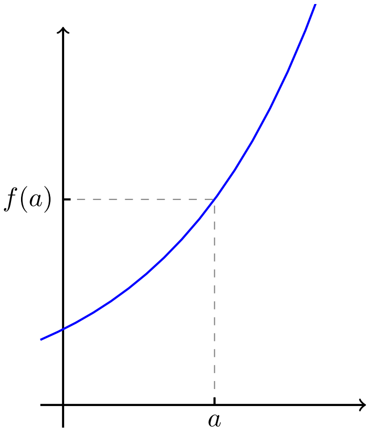
$$y = f(a) + f'(a)(x - a),$$

nebo na ní, pak f nazveme **konvexní (resp. konkávní) v bodě** a.

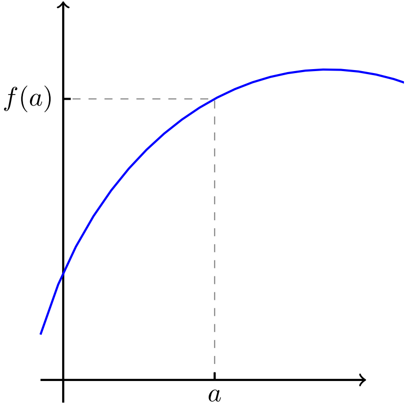
- Konvexnost na intervalu nevyžaduje diferencovatelnost, na rozdíl od konvexnosti v bodě, která vychází z pojmu tečny (kterou konstruujeme pomocí derivace).
- Podobně bychom mohli definovat ryzí konvexnost/konkávnost funkce v bodě.

Konvexnost a konkávnost v bodě

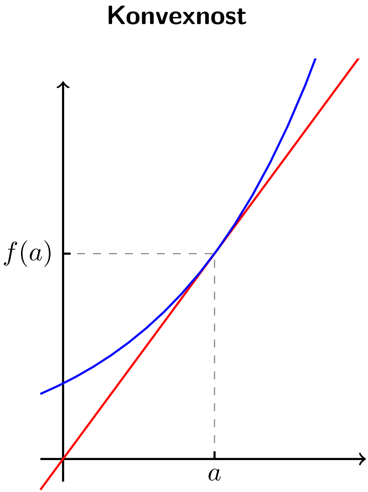
Konvexnost

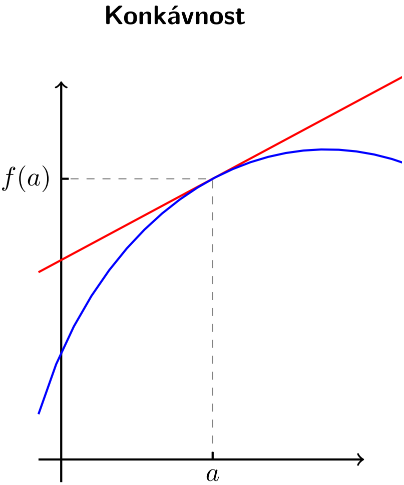


Konkávnost



Konvexnost a konkávnost v bodě





Vztah konvexnosti a konvexnosti v bodě

Věta:

Buď f funkce konvexní na intervalu J diferencovatelná v každém bodě J°. Potom je f konvexní v každém bodě intervalu J°.

Vztah konvexnosti a konvexnosti v bodě

Věta:

Buď f funkce konvexní na intervalu J diferencovatelná v každém bodě J°. Potom je f konvexní v každém bodě intervalu J°.

Důkaz.

Buď $x, c \in J^\circ$, $x \neq c$ a $\lambda \in (0,1)$, potom

$$f\big(\lambda c + (1-\lambda)x\big) \leq \lambda f(c) + (1-\lambda) f(x).$$

Tuto nerovnost lze přepsat do tvaru

$$(x-c) \cdot \frac{f\big(\lambda c + (1-\lambda)x\big) - f(c)}{\lambda c + (1-\lambda)x - c} = \frac{f\big(\lambda c + (1-\lambda)x\big) - f(c)}{1-\lambda} \leq -f(c) + f(x).$$

Podle věty o limitě složené funkce pro $\lambda \to 1$ ihned dostáváme nerovnost $(x-c)f'(c) \leq -f(c) + f(x)$, čili $f(x) \geq f(c) + f'(c)(x-c)$. Funkční hodnota funkce f v bodě x je tedy větší (nebo rovna) než funkční hodnota tečny funkce f v bodě c v bodě x. $\square$

Vztah konvexnosti a extrémů

Důsledek:

Nechť pro funkci f platí $f'(c) = 0$.

- Pokud je f konvexní v bodě c, pak má funkce f v bodě c lokální minimum.
- Pokud je f konkávní v bodě c, pak má funkce f v bodě c lokální maximum.

Vztah konvexnosti a extrémů

Důsledek:

Nechť pro funkci f platí $f'(c) = 0$.

- Pokud je f konvexní v bodě c, pak má funkce f v bodě c lokální minimum.
- Pokud je f konkávní v bodě c, pak má funkce f v bodě c lokální maximum.

Důkaz.

Stačí si uvědomit, že tečna v bodě c je dána přímkou $y = f(c)$ a využít definici konvexity/konkavity funkce f v bodě c. □

Vztah konvexnosti a extrémů

Důsledek:

Nechť pro funkci f platí $f'(c) = 0$.

- Pokud je f konvexní v bodě c, pak má funkce f v bodě c lokální minimum.
- Pokud je f konkávní v bodě c, pak má funkce f v bodě c lokální maximum.

Důkaz.

Stačí si uvědomit, že tečna v bodě c je dána přímkou $y = f(c)$ a využít definici konvexity/konkavity funkce f v bodě c. □

Poznámka:

- Pokud bychom požadovali ryzí konvexitu/konkavitu, pak dostaneme ostrá lokální minima/maxima.
- Tato věta se často používá pokud víme, že f má kladnou (nebo zápornou) druhou derivaci na okolí bodu c.

Inflexní body, asymptoty

Dalšími zajímavými jevy v průběhu funkce mohou být inflexní body a asymptoty.

Definice:

Nechť f je spojitá v bodě c. Bod c nazýváme **inflexním bodem** funkce f, právě když existuje $\delta > 0$ takové, že f je ryze konvexní na intervalu $(c - \delta, c)$ a ryze konkávní na intervalu $(c, c + \delta)$, nebo naopak.

Inflexní body, asymptoty

Dalšími zajímavými jevy v průběhu funkce mohou být inflexní body a asymptoty.

Definice:

Nechť f je spojitá v bodě c. Bod c nazýváme **inflexním bodem** funkce f, právě když existuje $\delta > 0$ takové, že f je ryze konvexní na intervalu $(c-\delta, c)$ a ryze konkávní na intervalu $(c, c+\delta)$, nebo naopak.

Definice:

- Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ **asymptotu** $x = a$, právě když $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ nebo $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ existuje a je rovna $+\infty$ nebo $-\infty$.

Inflexní body, asymptoty

Dalšími zajímavými jevy v průběhu funkce mohou být inflexní body a asymptoty.

Definice:

Nechť f je spojitá v bodě c. Bod c nazýváme **inflexním bodem** funkce f, právě když existuje $\delta > 0$ takové, že f je ryze konvexní na intervalu $(c-\delta, c)$ a ryze konkávní na intervalu $(c, c+\delta)$, nebo naopak.

Definice:

- Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ **asymptotu** $x = a$, právě když $\lim_{x\to a+} f(x)$ nebo $\lim_{x\to a-} f(x)$ existuje a je rovna $+\infty$ nebo $-\infty$.
- Řekneme, že přímka $y = kx + q$ je **asymptotou** funkce f v $+\infty$, resp. v $-\infty$, když

$$\lim_{x\to\infty} \big(f(x) - kx - q\big) = 0 \text{ resp. } \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - kx - q\big) = 0.$$

Hledání asymptot

- Má-li být přímka $y = kx + q$ asymptotou funkce f v $+\infty$, pak nutně
  1. $0 = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x) - (kx+q)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{f(x)}{x} - k \right)$ a proto
  $$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$
  2. Podobně
  $$q = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - kx \right),$$
  kde k jsme spočetli v předchozím bodu.

Hledání asymptot

- Má-li být přímka $y = kx + q$ asymptotou funkce f v $+\infty$, pak nutně
  1. $0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - (kx+q)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k\right)$ a proto
  $$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}.$$
  2. Podobně
  $$q = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - kx\right),$$
  kde k jsme spočetli v předchozím bodu.
- Není těžké si rozmyslet, že pokud q a k splňují výše uvedené rovnosti, pak přímka $y = kx + q$ je asymptotou funkce f v $+\infty$.
- Případ $-\infty$ se ošetří podobně.

Příklad.

Nalezněte asymptoty funkce $f(x) = \dfrac{x^2+2}{|x-1|} + 1$.

Příklad.

Nalezněte asymptoty funkce $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{|x - 1|} + 1$.

- Bod $x = 1$ nepatří do D_f a $\lim\limits_{x \to 1_\pm} f(x) = +\infty$. Tudíž přímka $x = 1$ je asymptotou f v bodě 1.

Příklad.

Nalezněte asymptoty funkce $f(x) = \dfrac{x^2+2}{|x-1|} + 1$.

- Bod $x = 1$ nepatří do D_f a $\lim\limits_{x \to 1_\pm} f(x) = +\infty$. Tudíž přímka $x = 1$ je asymptotou f v bodě 1.
- Hledejme asymptotu v $+\infty$,

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+2}{x^2-x} + \frac{1}{x} = 1,$$

$$q = \lim_{x \to +\infty} f(x) - kx = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+2}{x-1} + 1 - 1 \cdot x = \lim_{x \to +\infty} \frac{2+x}{x-1} + 1 = 2.$$

Příklad.

Nalezněte asymptoty funkce $f(x) = \dfrac{x^2+2}{|x-1|} + 1$.

- Bod $x = 1$ nepatří do D_f a $\lim\limits_{x \to 1_\pm} f(x) = +\infty$. Tudíž přímka $x = 1$ je asymptotou f v bodě 1.
- Hledejme asymptotu v $+\infty$,

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+2}{x^2-x} + \frac{1}{x} = 1,$$

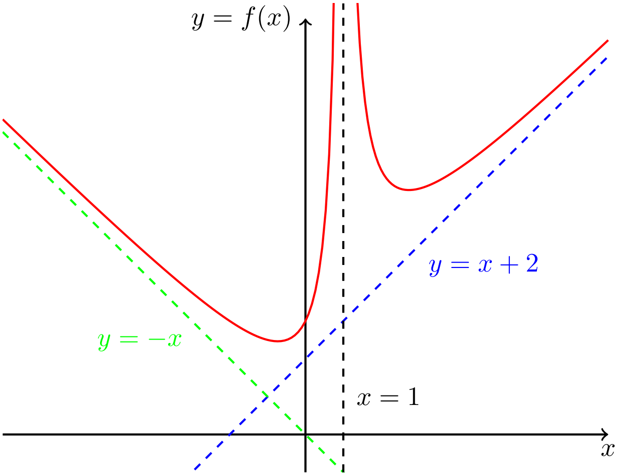
$$q = \lim_{x \to +\infty} f(x) - kx = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+2}{x-1} + 1 - 1 \cdot x = \lim_{x \to +\infty} \frac{2+x}{x-1} + 1 = 2.$$

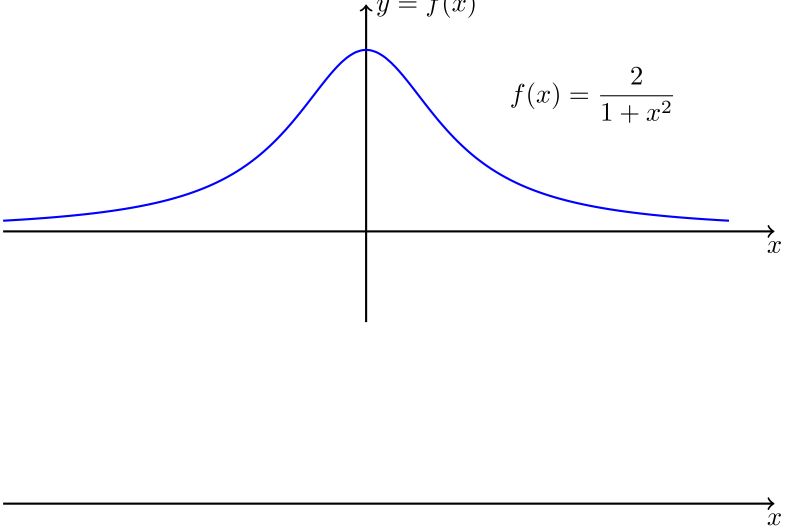
- Podobně, pro asymptotu v $-\infty$ máme

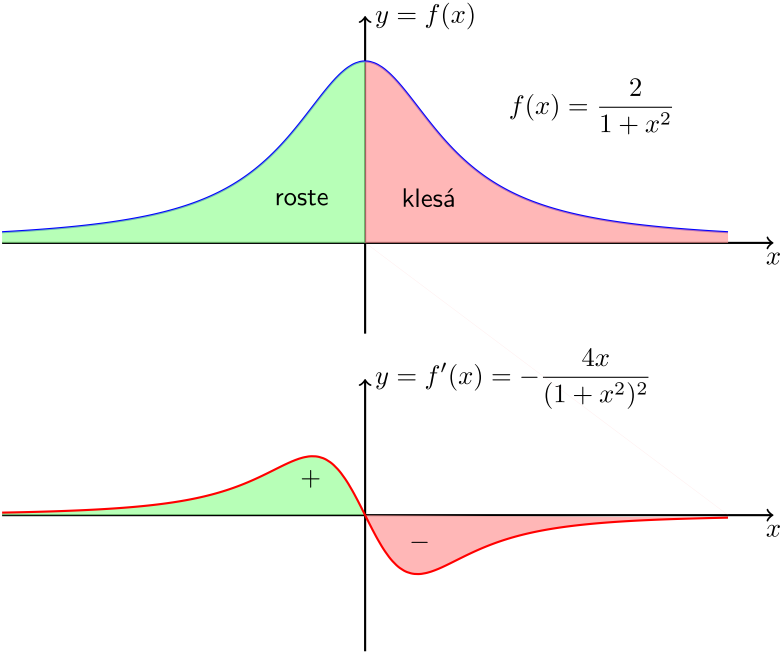
$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+2}{-x^2+x} + \frac{1}{x} = -1,$$

$$q = \lim_{x \to -\infty} f(x) - kx = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+2}{-x+1} + 1 - (-1) \cdot x = 0.$$

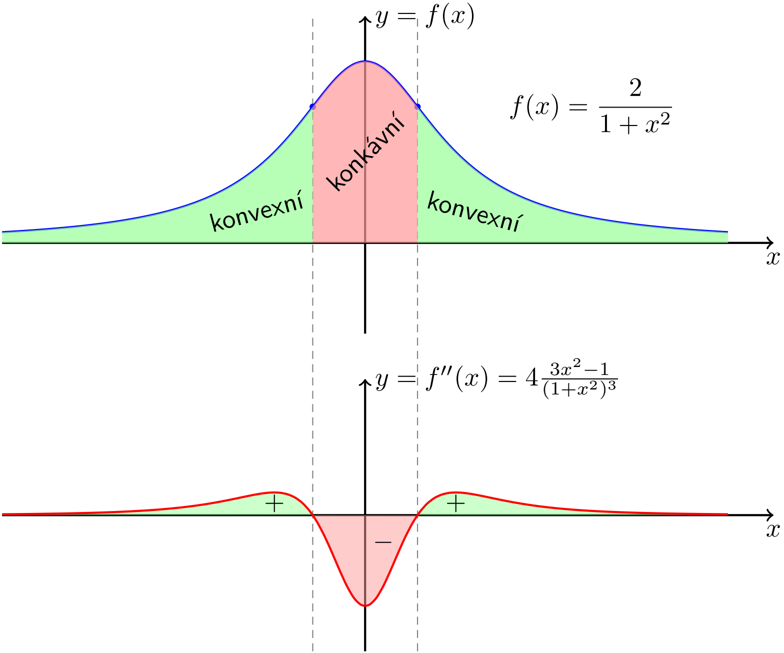
Graf funkce z příkladu




$y = f(x)$
$f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$
x
x



$y = f(x)$
$f(x) = \frac{2}{1+x^2}$
roste
klesá
x
$y = f'(x) = -\frac{4x}{(1+x^2)^2}$
$+$
$-$
x


$y = f(x)$
$f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$
konvexní
konkávní
konvexní
x
$y = f''(x) = 4\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}$
$+$
$-$
$+$
x

Průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce zkoumáme:

Průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce zkoumáme:

1. definiční obor funkce f, průsečíky grafu s osami, symetrie (sudost, lichost, periodicita),

Průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce zkoumáme:

1. definiční obor funkce f, průsečíky grafu s osami, symetrie (sudost, lichost, periodicita),
2. spojitost, body nespojitosti, existenci asymptot, limity v krajních bodech/nekonečnech,

Průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce zkoumáme:

1. definiční obor funkce f, průsečíky grafu s osami, symetrie (sudost, lichost, periodicita),
2. spojitost, body nespojitosti, existenci asymptot, limity v krajních bodech/nekonečnech,
3. existenci derivace f', monotonii funkce, lokální a globální extrémy,

Průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce zkoumáme:

1. definiční obor funkce f, průsečíky grafu s osami, symetrie (sudost, lichost, periodicita),
2. spojitost, body nespojitosti, existenci asymptot, limity v krajních bodech/nekonečnech,
3. existenci derivace f', monotonii funkce, lokální a globální extrémy,
4. existenci druhé derivace f'', konvexnost a konkávnost,

Průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce zkoumáme:

1. definiční obor funkce f, průsečíky grafu s osami, symetrie (sudost, lichost, periodicita),
2. spojitost, body nespojitosti, existenci asymptot, limity v krajních bodech/nekonečnech,
3. existenci derivace f', monotonii funkce, lokální a globální extrémy,
4. existenci druhé derivace f'', konvexnost a konkávnost,
5. na základě těchto výsledků načrtneme graf funkce f.

Hlavní body

l'Hospitalovo pravidlo

Věta (l'Hospitalovo pravidlo):

Nechť pro funkce f a g a bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$ platí

l'Hospitalovo pravidlo

Věta (l'Hospitalovo pravidlo):

Nechť pro funkce f a g a bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$ platí

1. $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{a} g = 0$, nebo $\lim\limits_{a} |g| = +\infty$,

l'Hospitalovo pravidlo

Věta (l'Hospitalovo pravidlo):

Nechť pro funkce f a g a bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$ platí

1. $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{a} g = 0$, nebo $\lim\limits_{a} |g| = +\infty$,
2. existuje okolí H_a bodu a splňující $H_a \smallsetminus \{a\} \subset D_{f/g} \cap D_{f'/g'}$,

l'Hospitalovo pravidlo

Věta (l'Hospitalovo pravidlo):

Nechť pro funkce f a g a bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$ platí

1. $\lim_a f = \lim_a g = 0$, nebo $\lim_a |g| = +\infty$,
2. existuje okolí H_a bodu a splňující $H_a \smallsetminus \{a\} \subset D_{f/g} \cap D_{f'/g'}$,
3. existuje $\lim_a \frac{f'}{g'}$.

Potom existuje $\lim_a \frac{f}{g}$ a platí $\lim_a \frac{f}{g} = \lim_a \frac{f'}{g'}$.

Důkaz.

Vynecháváme. $\square$

Příklady

Příklad.

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{\sin(x)}.$$

Pomocí l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{\sin(x)} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos(x)} = 1.$$

Příklady

Příklad.

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{\sin(x)}.$$

Pomocí l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{\sin(x)} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos(x)} = 1.$$

Příklad.

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0_+} x\ln(x)$.

Nejprve musíme výraz upravit do tvaru kdy lze aplikovat l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to 0_+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0_+} (-x) = 0.$$

Příklad

Příklad.

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}.$$

Příklad

Příklad.

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}.$$

Nyní je třeba l'Hospitalovo pravidlo použít dvakrát,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

Poznámky

Příklad (Důležitost předpokladů).

Při použití l'Hospitalova pravidla je nutné zkontrolovat předpoklady. Slepým použitím formule můžeme dostat špatný výsledek:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+\sin(x)}{x+\sin(x)} \overset{1}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2+\cos(x)}{1+\cos(x)} \overset{2}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-\sin(x)}{-\sin(x)} = 1.$$

Chyba v tomto výpočtu je dvojnásobná:

1. Není splněn 2. ani 3. předpoklad l'Hospitalova pravidla.
2. Limita napravo od $\overset{1}{=}$ vůbec neexistuje. Nemá tedy smysl pokračovat ve výpočtu.

Limitu lze snadno spočíst bez l'Hospitalova pravidla,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+\sin(x)}{x+\sin(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{\sin(x)}{x}}{1+\frac{\sin(x)}{x}} = 2.$$

Poznámky

Příklad (Bludný kruh).

V následujícím případě sice všechny předpoklady platí, ale ani opakované použití nevede k cíli

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Po druhém použití dostaneme stejný výraz s kterým jsme začínali.

Tuto limitu můžeme snadno spočítat bez použití l'Hospitalova pravidla,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = 1.$$

Hlavní body

Průběh exponenciály a logaritmu

Příklad.

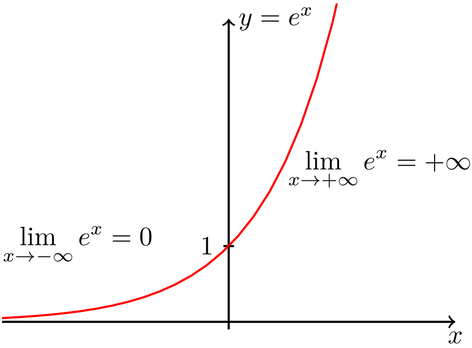
Vyšetřete průběh funkce $f(x) = e^x$.

Průběh exponenciály a logaritmu

Příklad.

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = e^x$.

Protože $f'(x) = f''(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ je funkce $f(x)$ rostoucí a konvexní na celém $\mathbb{R}$. Asymptota funkce existuje pouze v $-\infty$ a její rovnicí je $y = 0$.



Průběh exponenciály a logaritmu

Příklad.

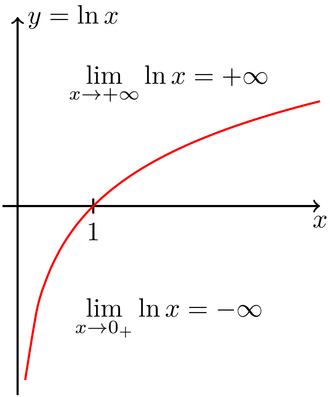
Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln x$.

Průběh exponenciály a logaritmu

Příklad.

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln x$.

Nyní $D_f = (0, +\infty)$ a $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ a $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ pro každé $x > 0$. Tudíž f je rostoucí a konkávní, jedinou asymptotou je přímka $x = 0$.



Ukázkový příklad

Příklad.

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$.

Ukázkový příklad

Příklad.

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$.

1. Odmocnina je lichá, tedy $D_f = \mathbb{R}$. Průsečík s osou y je $f(0) = 0$. Průsečíky s osou x jsou řešením rovnice

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(3 - x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \text{ a } x_2 = 3.$$

Odtud ihned plyne, že funkce nemůže být sudá, lichá ani periodická (ve všech těchto případech by muselo být průsečíkem i $x = -3$).

Ukázkový příklad

Příklad.

Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$.

1. Odmocnina je lichá, tedy $D_f = \mathbb{R}$. Průsečík s osou y je $f(0) = 0$. Průsečíky s osou x jsou řešením rovnice

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(3-x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \text{ a } x_2 = 3.$$

   Odtud ihned plyne, že funkce nemůže být sudá, lichá ani periodická (ve všech těchto případech by muselo být průsečíkem i $x = -3$).

2. Funkce je spojitá na celém $\mathbb{R}$. Zkoumejme existenci asymptot v $\pm\infty$,

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{3}{x} - 1} = -1,$$
$$q = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - kx\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{3x^2 - x^3} + x = 1.$$

   Přímka $y = -x + 1$ je tedy asymptotou v $+\infty$ i $-\infty$.

Ukázkový příklad

3. Pro derivaci funkce f platí

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x-x^2}{(3x^2-x^3)^{2/3}}, & x \neq 0, 3, \\ -\infty, & x = 3, \\ \text{neexistuje}, & x = 0. \end{cases}$$

Ukázkový příklad

3. Pro derivaci funkce f platí

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x-x^2}{(3x^2-x^3)^{2/3}}, & x \neq 0, 3, \\ -\infty, & x = 3, \\ \text{neexistuje}, & x = 0. \end{cases}$$

Nulovým bodem derivace je 2. Kandidáty na lokální extrém jsou tudíž body 0 (derivace neexistuje) a 2 (derivace je 0).

Ukázkový příklad

3. Pro derivaci funkce f platí

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x-x^2}{(3x^2-x^3)^{2/3}}, & x \neq 0, 3, \\ -\infty, & x = 3, \\ \text{neexistuje}, & x = 0. \end{cases}$$

Nulovým bodem derivace je 2. Kandidáty na lokální extrém jsou tudíž body 0 (derivace neexistuje) a 2 (derivace je 0).

interval	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
znaménko f'	$-$	$+$	$-$	$-$
monotonie f	klesá	roste	klesá	klesá

Ukázkový příklad

3. Pro derivaci funkce f platí

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x-x^2}{(3x^2-x^3)^{2/3}}, & x \neq 0, 3, \\ -\infty, & x = 3, \\ \text{neexistuje}, & x = 0. \end{cases}$$

Nulovým bodem derivace je 2. Kandidáty na lokální extrém jsou tudíž body 0 (derivace neexistuje) a 2 (derivace je 0).

interval	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
znaménko f'	$-$	$+$	$-$	$-$
monotonie f	klesá	roste	klesá	klesá

Spojitost funkce na celém $\mathbb{R}$ implikuje lokální minimum v bodě 0 ($f(0) = 0$) a maximum v bodě 2 ($f(2) = \sqrt[3]{4}$).

Ukázkový příklad

3. Pro derivaci funkce f platí

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x-x^2}{(3x^2-x^3)^{2/3}}, & x \neq 0, 3, \\ -\infty, & x = 3, \\ \text{neexistuje}, & x = 0. \end{cases}$$

Nulovým bodem derivace je 2. Kandidáty na lokální extrém jsou tudíž body 0 (derivace neexistuje) a 2 (derivace je 0).

interval	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
znaménko f'	$-$	$+$	$-$	$-$
monotonie f	klesá	roste	klesá	klesá

Spojitost funkce na celém $\mathbb{R}$ implikuje lokální minimum v bodě 0 ($f(0) = 0$) a maximum v bodě 2 ($f(2) = \sqrt[3]{4}$).

Navíc ze spojitosti na $\mathbb{R}$ a z limit $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$ plyne $H_f = \mathbb{R}$.

Ukázkový příklad

4. Pro druhou derivaci v bodech $x \neq 0, 3$ dostáváme

$$f''(x) = \frac{2x^{-4/3}}{(x-3)^{5/3}}.$$

Znaménko závisí pouze na znaménku jmenovatele (čitatel je kladný),

interval	$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, +\infty)$
znaménko f''	$-$	$-$	$+$
	konkávní	konkávní	konvexní

Ukázkový příklad

5. Nyní můžeme načrtnout graf funkce f.