Základy matematické analýzy

Taylorovy polynomy a řady

Pavel Hrabák[1], Tomáš Kalvoda[2], Ivo Petr[3]

[1] pavel.hrabak@fit.cvut.cz [2] tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [3] ivo.petr@fit.cvut.cz,

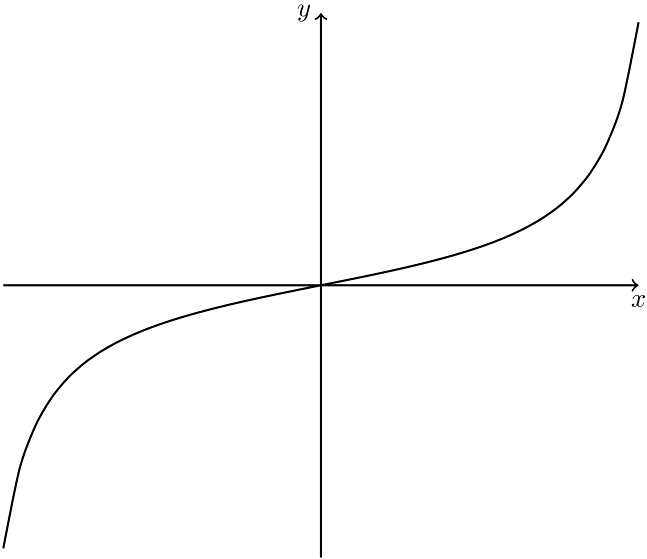
Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

4. března 2021
ZS 2020/2021

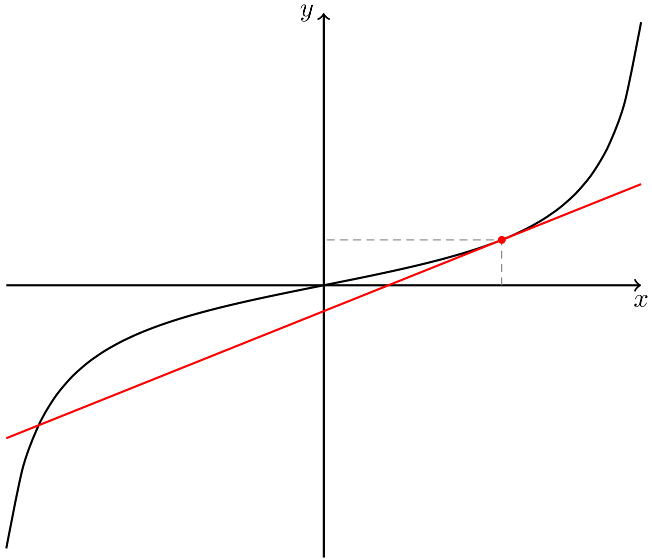
Hlavní body

Hlavní body

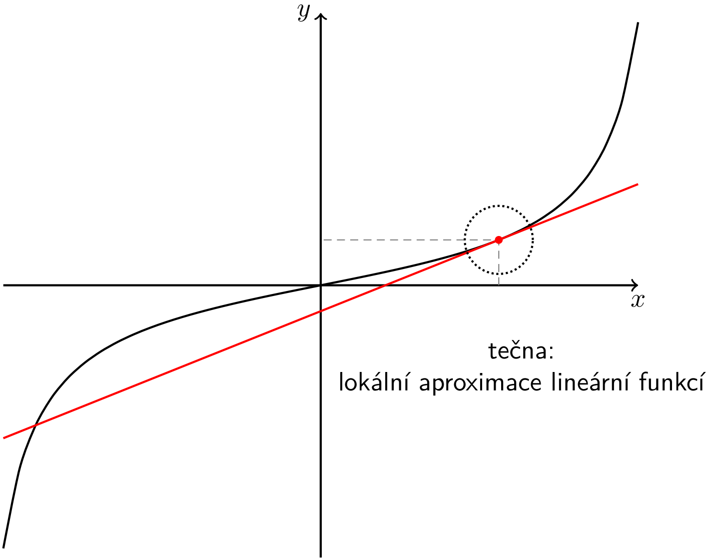
Aproximace v bodě



Aproximace v bodě

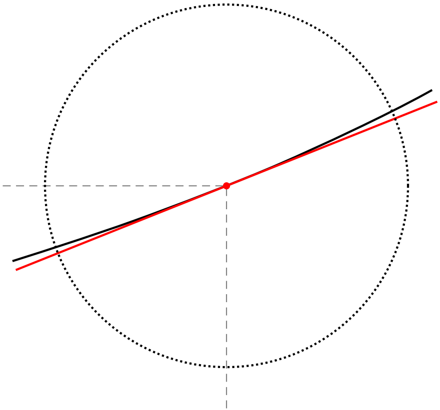


Aproximace v bodě



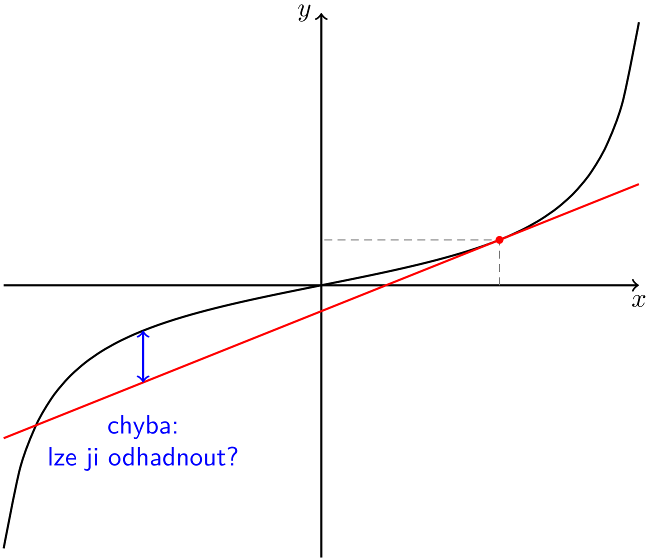
tečna:
lokální aproximace lineární funkcí

Aproximace v bodě

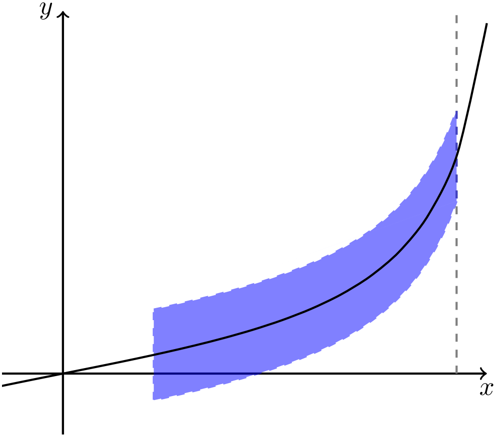


Zoom

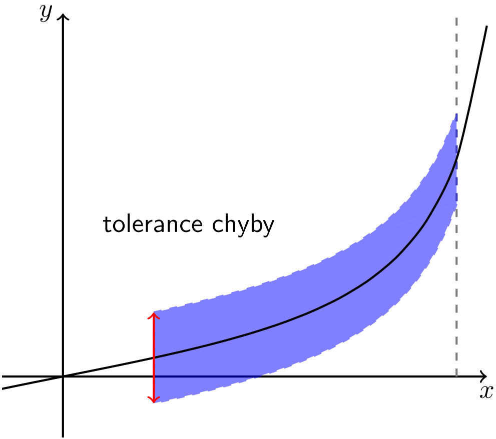
Aproximace v bodě



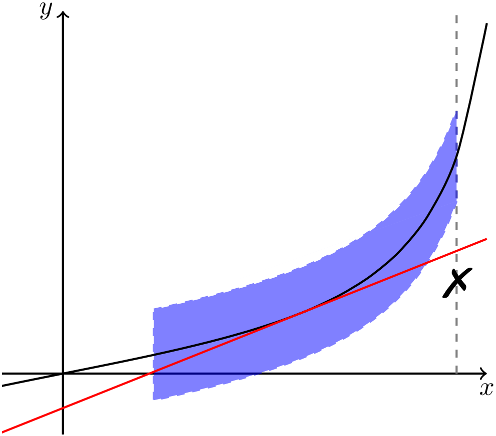
Aproximace na intervalu



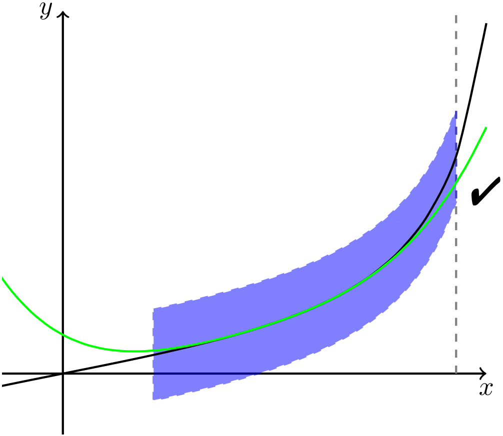
Aproximace na intervalu



Aproximace na intervalu



Aproximace na intervalu

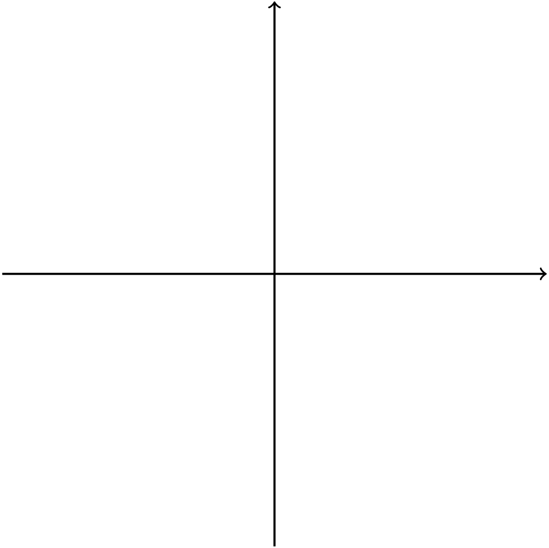


Přibližné výpočty

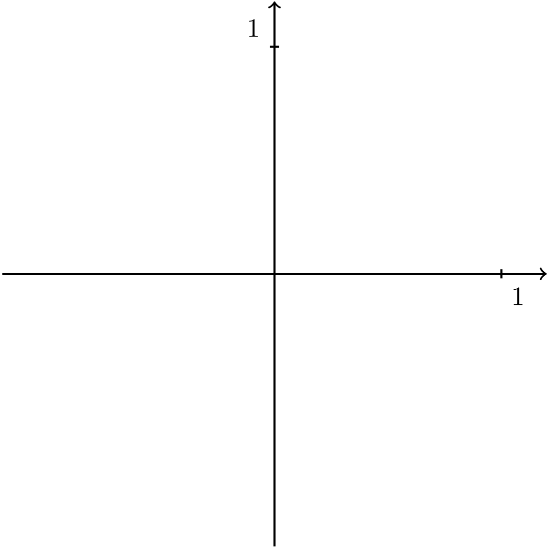
Otázka:

Jak určit hodnotu $\sin(37^\circ)$?

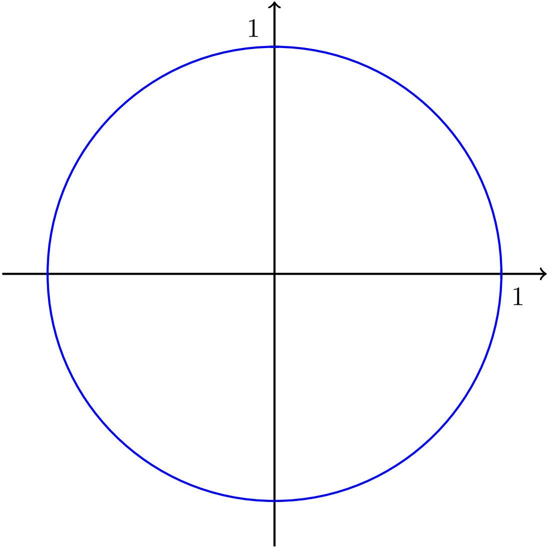
Odpověď: Geometrická konstrukce



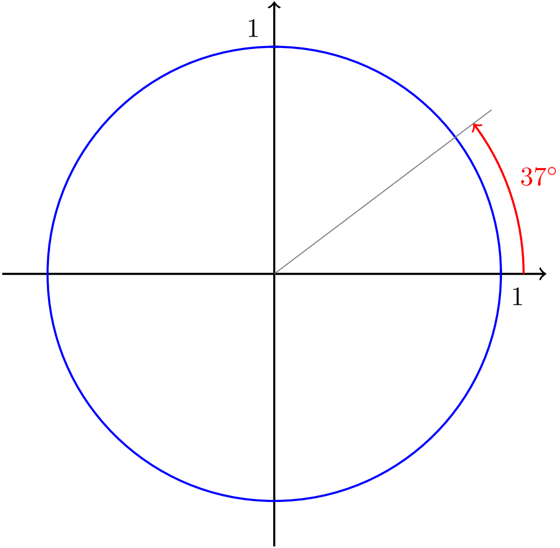
Odpověď: Geometrická konstrukce



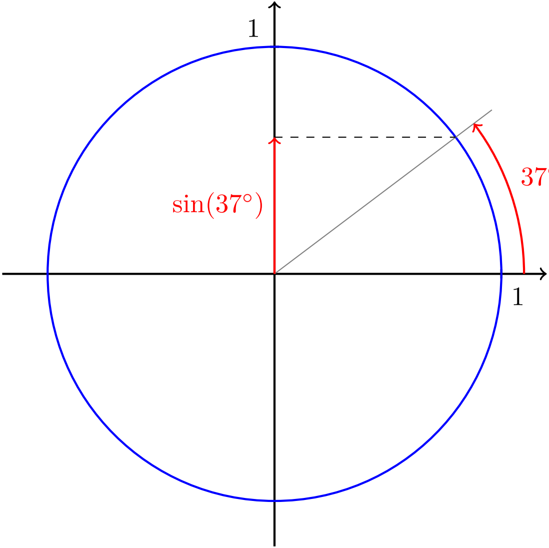
Odpověď: Geometrická konstrukce



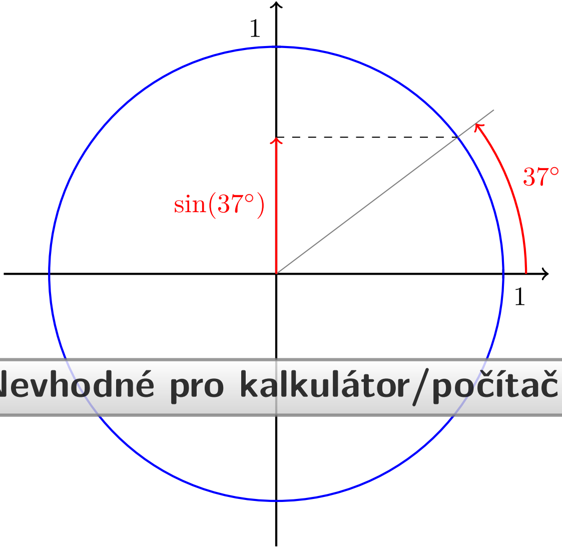
Odpověď: Geometrická konstrukce



Odpověď: Geometrická konstrukce



Odpověď: Geometrická konstrukce



Nevhodné pro kalkulátor/počítač!

Hlavní body

Co je to polynom?

Definice (Polynom):

Reálnou funkci reálné proměnné $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazveme **polynomem**, právě když existují nezáporné celé číslo $n \in \mathbb{N}_0$ a reálná čísla $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ taková, že rovnost

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

platí pro všechna reálná $x \in \mathbb{R}$.

Co je to polynom?

Definice (Polynom):

Reálnou funkci reálné proměnné $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazveme **polynomem**, právě když existují nezáporné celé číslo $n \in \mathbb{N}_0$ a reálná čísla $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ taková, že rovnost

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

platí pro všechna reálná $x \in \mathbb{R}$.

Definice (Terminologie):

1. Je-li $a_n \neq 0$, nazýváme číslo n **stupněm polynomu** p.
2. Jsou-li všechny koeficienty a_k, $k = 0, \ldots, n$ nulové, nazýváme p **nulovým polynomem** a jeho stupeň nedefinujeme.

Příklady polynomů

Notoricky známými příklady polynomů jsou:

Příklady polynomů

Notoricky známými příklady polynomů jsou:

1. **Lineární** funkce $f(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$ parametry) je polynomem nejvýše prvního stupně.

Příklady polynomů

Notoricky známými příklady polynomů jsou:

1. **Lineární** funkce $f(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$ parametry) je polynomem nejvýše prvního stupně.
2. **Kvadratická** funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ parametry) je polynomem druhého stupně.

Příklady polynomů

Notoricky známými příklady polynomů jsou:

1. **Lineární** funkce $f(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$ parametry) je polynomem nejvýše prvního stupně.
2. **Kvadratická** funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ parametry) je polynomem druhého stupně.

Vyhodnocování polynomů

K vyhodnocení funkční hodnoty polynomu stačí operace sčítání (odčítání) a násobení.

Tečna funkce jakožto lineární aproximace

1. Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak rovnice její **tečny v bodě** a má tvar
$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$
Je to přímka nejvíce připomínající funkci f v okolí bodu a.

Tečna funkce jakožto lineární aproximace

1. Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak rovnice její **tečny v bodě** a má tvar
$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$
Je to přímka nejvíce připomínající funkci f v okolí bodu a.

2. Tečnu také můžeme chápat jako graf lineární funkce
$$g(x) := f(a) + f'(a)(x - a).$$
Pro funkce f a g platí
$$g(a) = f(a), \quad g'(a) = f'(a).$$
(Mají stejnou funkční hodnotu a stejný „sklon“ v bodě a.)

Tečna funkce jakožto lineární aproximace

1. Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak rovnice její **tečny v bodě** a má tvar
$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$
Je to přímka nejvíce připomínající funkci f v okolí bodu a.

2. Tečnu také můžeme chápat jako graf lineární funkce
$$g(x) := f(a) + f'(a)(x - a).$$
Pro funkce f a g platí
$$g(a) = f(a), \quad g'(a) = f'(a).$$
(Mají stejnou funkční hodnotu a stejný „sklon" v bodě a.)

Tj. **funkce** f a její **tečna v bodě** a mají stejnou 0. a 1. derivaci v bodě a.

Proč neuvažovat polynom vyššího stupně?

Nechť funkce f má konečné derivace v bodě a až do řádu $n \in \mathbb{N}$ včetně. Lze nalézt polynom p takový, že $p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ pro všechna $k = 0, 1, \ldots, n$?

Proč neuvažovat polynom vyššího stupně?

Nechť funkce f má konečné derivace v bodě a až do řádu $n \in \mathbb{N}$ včetně. Lze nalézt polynom p takový, že $p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ pro všechna $k = 0, 1, \ldots, n$?

Odpověď je **kladná**. Hledejme polynom ve tvaru

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k.$$

$$\begin{aligned}
f(a) = p(a) = a_0 \qquad &\Longrightarrow \qquad a_0 = f(a) \\
f'(a) = p'(a) = a_1 \qquad &\Longrightarrow \qquad a_1 = f'(a) \\
f''(a) = p''(a) = 2a_2 \qquad &\Longrightarrow \qquad a_2 = \frac{1}{2} f''(a) \\
f^{(k)}(a) = p^{(k)}(a) = k!\, a_k \qquad &\Longrightarrow \qquad a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a),\ k = 0, 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

Proč neuvažovat polynom vyššího stupně?

Nechť funkce f má konečné derivace v bodě a až do řádu $n \in \mathbb{N}$ včetně. Lze nalézt polynom p takový, že $p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ pro všechna $k = 0, 1, \ldots, n$?

Odpověď je **kladná**. Hledejme polynom ve tvaru

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k.$$

$$\begin{aligned}
f(a) = p(a) = a_0 \quad &\Longrightarrow \quad a_0 = f(a)\\
f'(a) = p'(a) = a_1 \quad &\Longrightarrow \quad a_1 = f'(a)\\
f''(a) = p''(a) = 2a_2 \quad &\Longrightarrow \quad a_2 = \frac{1}{2} f''(a)\\
f^{(k)}(a) = p^{(k)}(a) = k!\, a_k \quad &\Longrightarrow \quad a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a),\ k = 0, 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

Uzavíráme, že hledaný polynom p požadovaných vlastností je tvaru

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Taylorův polynom

Věta:

Nechť reálná funkce reálné proměnné f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ konečnou n-tou derivaci. Potom existuje právě jeden polynom $T_{n,a}$ stupně nejvýše n takový, že

$$T_{n,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \text{ pro každé } k = 0, 1, \ldots, n.$$

Tento polynom má tvar

$$T_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

a nazýváme ho n-**tým Taylorovým polynomem funkce** f **v bodě** a.

Taylorův polynom

Věta:

Nechť reálná funkce reálné proměnné f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ konečnou n-tou derivaci. Potom existuje právě jeden polynom $T_{n,a}$ stupně nejvýše n takový, že

$$T_{n,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \text{ pro každé } k = 0, 1, \ldots, n.$$

Tento polynom má tvar

$$T_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

a nazýváme ho n-**tým Taylorovým polynomem funkce** f **v bodě** a.

Důkaz.

Existenci i jednoznačnost dokážeme podobnými úvahami jako na předchozím slidu. $\square$

Příklady nejjednodušších Taylorových polynomů

Exponenciála

Nalezněme n-tý Taylorův polynom funkce $f(x) = e^x$ v bodě 0.

Příklady nejjednodušších Taylorových polynomů

Exponenciála

Nalezněme n-tý Taylorův polynom funkce $f(x) = e^x$ v bodě 0.

Pro libovolné $k \in \mathbb{N}_0$ platí $f^{(k)}(x) = e^x$ a proto $f^{(k)}(0) = 1$. Dostáváme

$$T_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k.$$

Příklady nejjednodušších Taylorových polynomů

Exponenciála

Nalezněme n-tý Taylorův polynom funkce $f(x) = e^x$ v bodě 0.

Pro libovolné $k \in \mathbb{N}_0$ platí $f^{(k)}(x) = e^x$ a proto $f^{(k)}(0) = 1$. Dostáváme

$$T_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k.$$

Poznámka (Značení):

Pokud $a = 0$, budeme pro jednoduchost místo $T_{n,0}$ psát pouze T_n.

Příklad

Sinus

Nalezněme n-tý Taylorův polynom funkce $f(x) = \sin(x)$ v bodě 0.

Příklad

Sinus

Nalezněme n-tý Taylorův polynom funkce $f(x) = \sin(x)$ v bodě 0.

Derivace funkce f se cyklicky opakují, v závislosti na $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin(x) \quad \text{a} \quad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos(x).$$

Proto

$$f^{(2k)}(0) = 0 \quad \text{a} \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k.$$

Výsledkem pro $n = 2\ell$ nebo $n = 2\ell - 1$ platí

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j = \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Příklad

Sinus

Nalezněme n-tý Taylorův polynom funkce $f(x) = \sin(x)$ v bodě 0.

Derivace funkce f se cyklicky opakují, v závislosti na $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin(x) \quad \text{a} \quad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos(x).$$

Proto

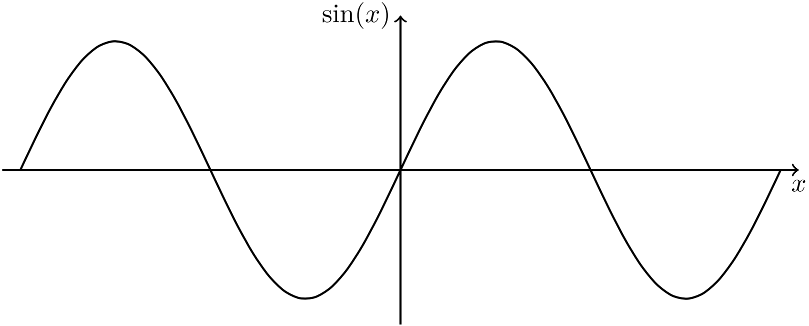
$$f^{(2k)}(0) = 0 \quad \text{a} \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k.$$

Výsledkem pro $n = 2\ell$ nebo $n = 2\ell - 1$ platí

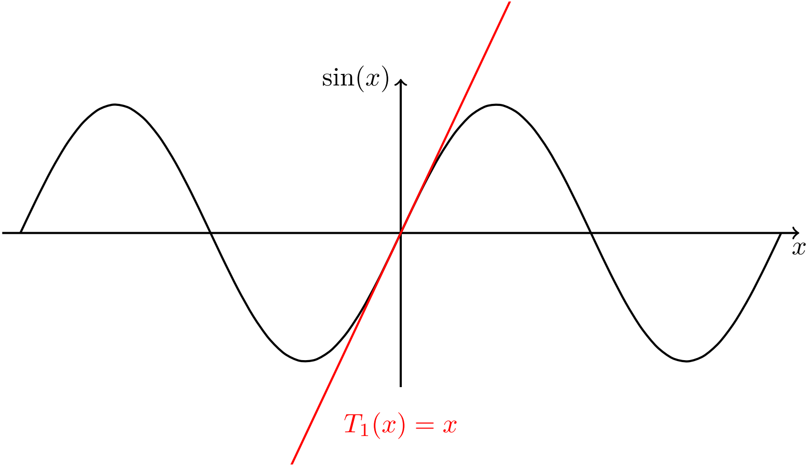
$$T_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j = \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Speciálně tedy platí $T_{2n} = T_{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ a ještě speciálněji třeba $T_{40} = T_{39}$.

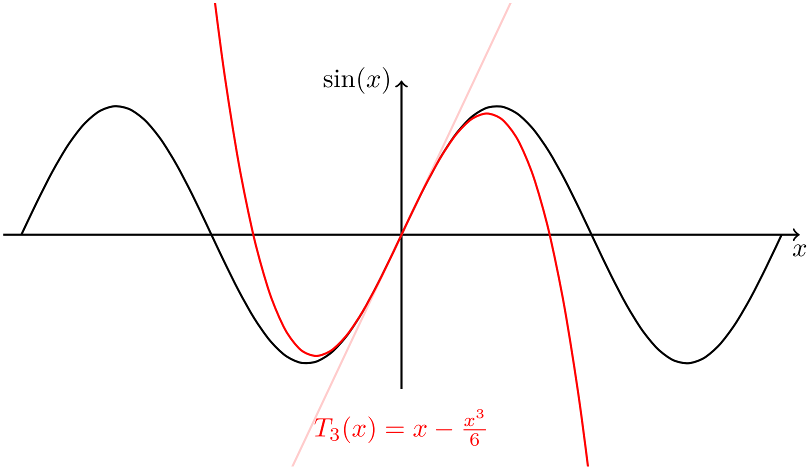
Taylorovy polynomy nízkého stupně: demonstrace



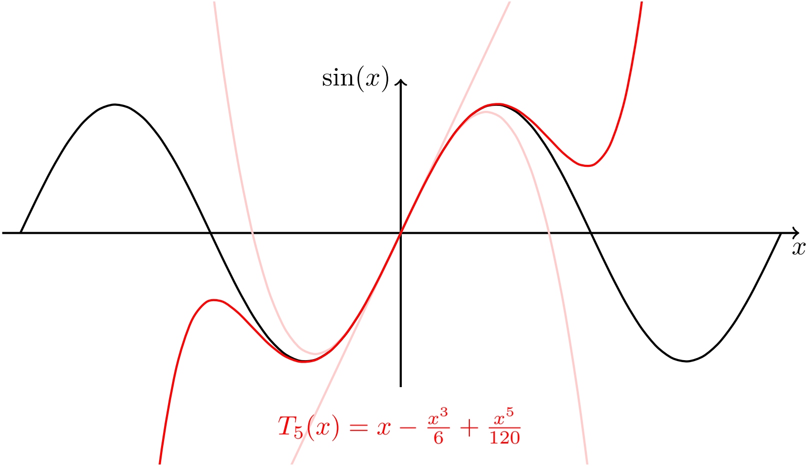
Taylorovy polynomy nízkého stupně: demonstrace



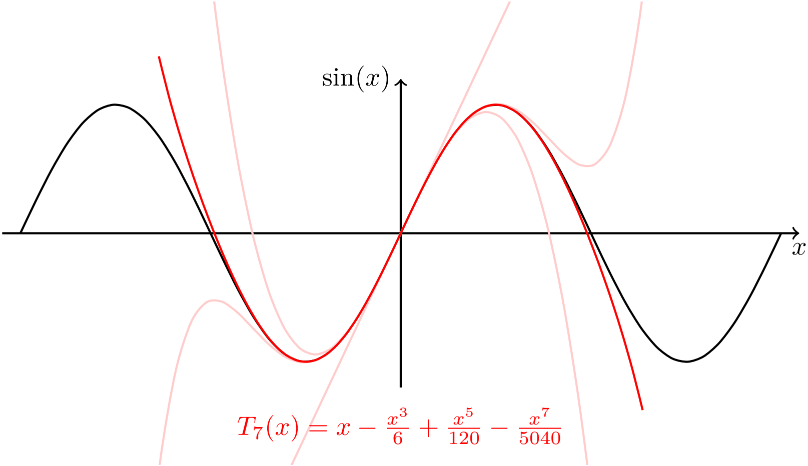
Taylorovy polynomy nízkého stupně: demonstrace



Taylorovy polynomy nízkého stupně: demonstrace



Taylorovy polynomy nízkého stupně: demonstrace



Hlavní body

Zbytek v Taylorově vzorci

Definice:

Nechť funkce f má v bodě a konečnou n-tou derivaci. Pro všechna přípustná x položme $R_{n,a}(x) := f(x) - T_{n,a}(x)$. Potom vztah

$$f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$$

nazýváme **Taylorovým vzorcem** a $R_{n,a}$ nazýváme n-**tým zbytkem** v Taylorově vzorci.

Zbytek v Taylorově vzorci

Definice:

Nechť funkce f má v bodě a konečnou n-tou derivaci. Pro všechna přípustná x položme $R_{n,a}(x) := f(x) - T_{n,a}(x)$. Potom vztah

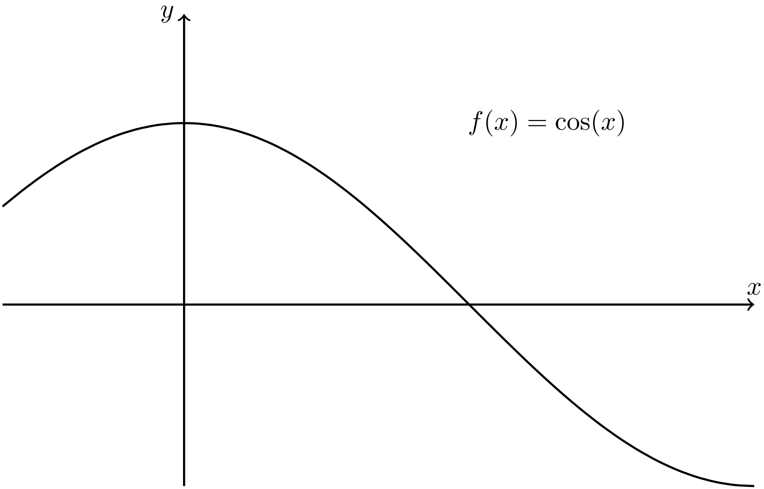
$$f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$$

nazýváme **Taylorovým vzorcem** a $R_{n,a}$ nazýváme n-**tým zbytkem** v Taylorově vzorci.

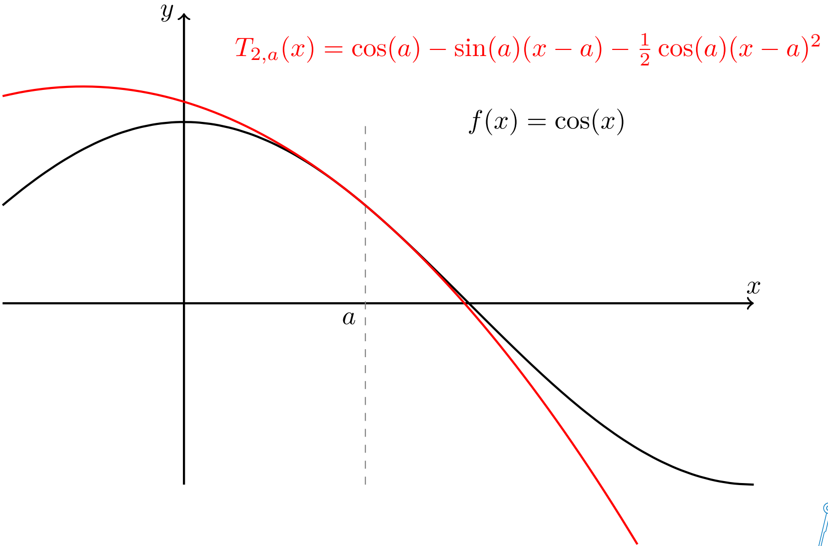
Poznámka (Značení):

V případě, že mluvíme o Taylorově polynomu v bodě $a = 0$ píšeme pro jednoduchost T_n místo $T_{n,0}$. Podobně v případě zbytku $R_n = R_{n,0}$ a Peanova zbytku (zaveden dále) $\omega_n = \omega_{n,0}$. Taylorův polynom pro $a = 0$ se také někdy nazývá **Maclaurinův polynom**.

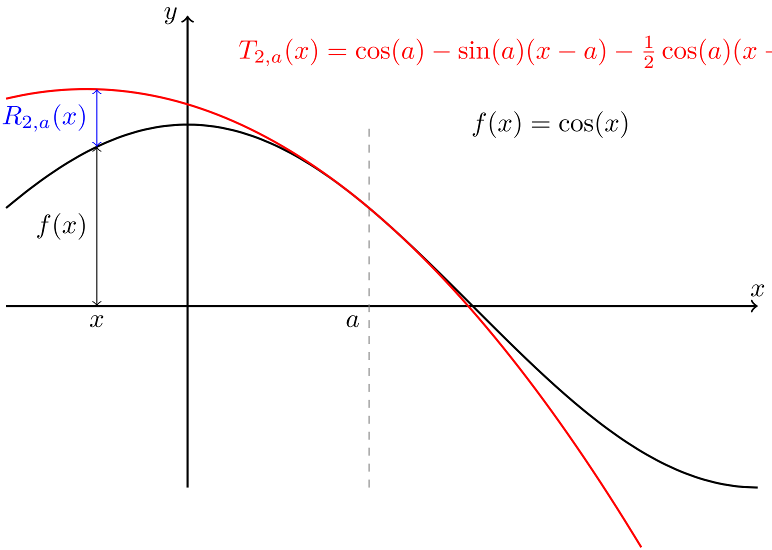
Zbytek v Taylorově vzorci



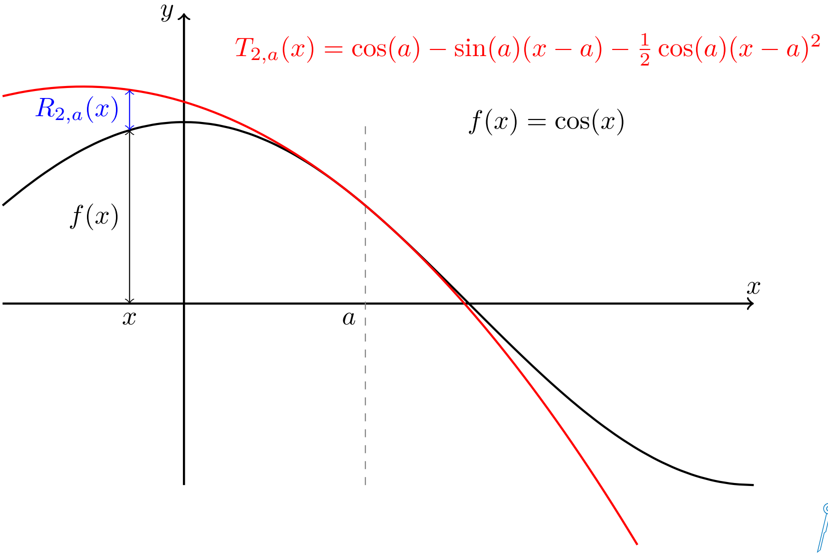
Zbytek v Taylorově vzorci



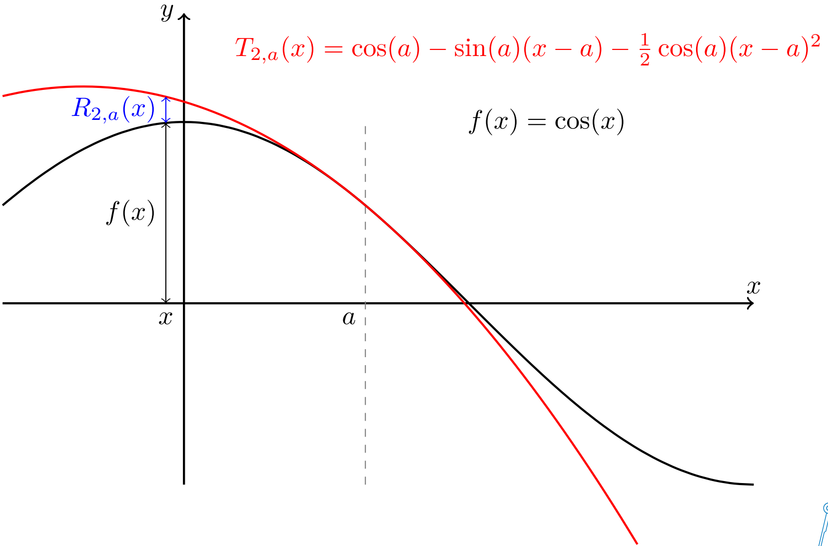
Zbytek v Taylorově vzorci



Zbytek v Taylorově vzorci



Zbytek v Taylorově vzorci



Chování zbytku

Věta:

Nechť funkce f má v jistém okolí H_a bodu a spojitou n-tou derivaci. Pak pro zbytek v Taylorově vzorci platí

$$\lim_{x \to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Chování zbytku

Věta:

Nechť funkce f má v jistém okolí H_a bodu a spojitou n-tou derivaci. Pak pro zbytek v Taylorově vzorci platí

$$\lim_{x \to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Důkaz.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a = 0$. Z definice zbytku a vlastností Taylorova polynomu plyne

$$R_n(0) = R_n'(0) = \cdots = R_n^{(n-1)}(0) = R_n^{(n)}(0) = 0.$$

Pro výpočet limity lze použít l'Hospitalovo pravidlo (zdůvodněte proč!). Potom

$$\lim_{x \to 0} \frac{R_n(x)}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{R_n'(x)}{nx^{n-1}} = \cdots = \lim_{x \to 0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n! \cdot x} = \lim_{x \to 0} \frac{R_n^{(n)}(x)}{n!} = 0. \qquad \square$$

Peanův tvar zbytku

Důsledek:

Za stejných předpokladů jako v předchozí větě lze Taylorův vzorec vyjádřit ve tvaru

$$f(x) = T_{n,a}(x) + \omega_{n,a}(x) \cdot (x-a)^n,$$

kde $\lim\limits_{x \to a} \omega_{n,a}(x) = 0$. Výraz $\omega_{n,a}(x) \cdot (x-a)^n$ se nazývá **Peanův tvar** zbytku.

Peanův tvar zbytku

Důsledek:

Za stejných předpokladů jako v předchozí větě lze Taylorův vzorec vyjádřit ve tvaru

$$f(x) = T_{n,a}(x) + \omega_{n,a}(x) \cdot (x-a)^n,$$

kde $\lim_{x \to a} \omega_{n,a}(x) = 0$. Výraz $\omega_{n,a}(x) \cdot (x-a)^n$ se nazývá **Peanův tvar** zbytku.

Důkaz.

Stačí položit $\omega_{n,a}(x) = \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n}$ a použít předchozí větu. □

„Taylorův polynom je nejlepší aproximace“

Přesný smysl tohoto výroku je obsažen v následující větě.

Věta (O nejlepší aproximaci):

Nechť funkce f má v jistém okolí bodu 0 konečnou n-tou derivaci a nechť Q je polynom stupně nejvýše n, různý od Taylorova polynomu T_n funkce f v bodě 0. Potom existuje okolí H_0 bodu 0 takové, že

$$|f(x) - T_n(x)| < |f(x) - Q(x)| \quad \text{pro každé } x \in H_0 \setminus \{0\}.$$

„Taylorův polynom je nejlepší aproximace“

Přesný smysl tohoto výroku je obsažen v následující větě.

Věta (O nejlepší aproximaci):

Nechť funkce f má v jistém okolí bodu 0 konečnou n-tou derivaci a nechť Q je polynom stupně nejvýše n, různý od Taylorova polynomu T_n funkce f v bodě 0. Potom existuje okolí H_0 bodu 0 takové, že

$$|f(x) - T_n(x)| < |f(x) - Q(x)| \quad \text{pro každé } x \in H_0 \smallsetminus \{0\}.$$

- Výraz $|f(x) - Q(x)|$ představuje absolutní velikost chyby pří aproximaci funkce f pomocí polynomu Q v bodě x.

„Taylorův polynom je nejlepší aproximace“

Přesný smysl tohoto výroku je obsažen v následující větě.

Věta (O nejlepší aproximaci):

Nechť funkce f má v jistém okolí bodu 0 konečnou n-tou derivaci a nechť Q je polynom stupně nejvýše n, různý od Taylorova polynomu T_n funkce f v bodě 0. Potom existuje okolí H_0 bodu 0 takové, že

$$|f(x) - T_n(x)| < |f(x) - Q(x)| \quad \text{pro každé } x \in H_0 \smallsetminus \{0\}.$$

- Výraz $|f(x) - Q(x)|$ představuje absolutní velikost chyby pří aproximaci funkce f pomocí polynomu Q v bodě x.
- Pokud $T_{n-1} \neq T_n$, pak pro jisté okolí H_0 podle předchozí věty platí

$$|f(x) - T_n(x)| < |f(x) - T_{n-1}(x)| \quad \text{pro každé } x \in H_0 \smallsetminus \{0\}.$$

Tedy, každý další Taylorův polynom (pokud existuje a je různý od předchozího) aproximuje funkci f lépe než předchozí.

Taylorova věta

Věta (Taylorova):

Nechť existuje okolí H_a bodu a takové, že funkce f v něm má konečnou $(n+1)$-ní derivaci. Pak zbytek v Taylorově vzorci $f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$ lze pro každé $x \in H_a$ zapsat ve tvaru

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

kde číslo ξ závisí na x a n a leží uvnitř intervalu s krajními body x a a. Tento tvar zbytku nazýváme **Lagrangeův**.

Poznámka:

Tato Věta nám dává velmi důležitou informaci o zbytku v Taylorově vzorci. Umožňuje **odhadovat** chybu aproximace původní funkce jejím Taylorovým polynomem.

Příklad: Přibližný výpočet

Určete, jaké chyby se dopustíme, když pro výpočet čísla $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$ použijeme hodnotu Taylorova polynomu funkce e^x třetího stupně v bodě 0 vyhodnoceného v bodě $x = \frac{1}{2}$,

$$T_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

Dosazením dostaneme funkční hodnotu Taylorova polynomu v $x = \frac{1}{2}$:

$$T_3\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{79}{48} = 1.6458\overline{3}.$$

Toto číslo nám samo o sobě nic neříká. Je nutné odhadnout chybu.

Příklad: Přibližný výpočet, pokračování

Podle **Taylorovy věty** platí ($f(x) = e^x$) rovnost

$$\sqrt{e} = T_3\left(\frac{1}{2}\right) + R_3\left(\frac{1}{2}\right),$$

kde zbytek je tvaru

$$R_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{\xi}}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 .$$

O čísle ξ pouze víme, že leží v intervalu $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Navíc umíme odhadnout velikost čísla e, platí nerovnost $e < 4$ (zdůvodněte!).

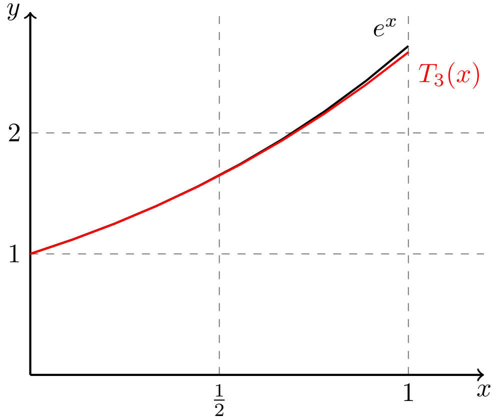
Celkem tedy

$$0 < R_3\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{4^{1/2}}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{192} = 0.005208\bar{3}.$$

Příklad: Přibližný výpočet, pokračování

Závěr

Číslo $\sqrt{e}$ leží v intervalu $\left(1.6458\overline{3},\ 1.651041\overline{6}\right)$.



Hlavní body

Příklad exponenciály

Připomenutí

Již jsme spočetli, že pro každé reálné x a přirozené n platí

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x).$$

Příklad exponenciály

Připomenutí

Již jsme spočetli, že pro každé reálné x a přirozené n platí

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x).$$

Dále známe tvar zbytku, lze ho vyjádřit jako

$$R_n(x) = \frac{e^{\xi_{n,x}}}{(n+1)!} x^{n+1},$$

kde $\xi_{n,x}$ leží mezi 0 a x, tudíž $\xi_{n,x} < |x|$. Z monotonie e^x pak plyne odhad

$$0 < e^{\xi_{n,x}} < e^{|x|}.$$

Horní odhad tedy nezávisí na n (v tomto případě)!

Příklad exponenciály

Pro dané pevné $x \in \mathbb{R}$ tedy platí

$$0 \leq |R_n(x)| < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x^n| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Příklad exponenciály

Pro dané pevné $x \in \mathbb{R}$ tedy platí

$$0 \leq |R_n(x)| < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x^n| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Věta o limitě sevřené posloupnosti zaručuje

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Příklad exponenciály

Pro dané pevné $x \in \mathbb{R}$ tedy platí

$$0 \leq |R_n(x)| < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x^n| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Věta o limitě sevřené posloupnosti zaručuje

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Závěr

Pro libovolné reálné x platí

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + R_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!},$$

což je vlastně způsob jakým jsme exponenciálu definovali.

Mocninná řada

Definice:

Nechť je dána posloupnost $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ a číslo $c \in \mathbb{R}$. Číselnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$$

závisející na reálném parametru x nazýváme **mocninnou řadou se středem v bodě** c.

Mocninná řada

Definice:

Nechť je dána posloupnost $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ a číslo $c \in \mathbb{R}$. Číselnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$$

závisející na reálném parametru x nazýváme **mocninnou řadou se středem v bodě** c.

Definice:

Nechť reálná funkce reálné proměnné f má v bodě $c \in \mathbb{R}$ konečné derivace všech řádů. Mocninnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k$$

potom nazýváme **Taylorovou řadou funkce** f **v bodě** c.

Mocninná řada

Poznámka:

Uvažme pro jednoduchost $c = 0$.

- Je-li například $x = 2$, pak máme číselnou řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k 2^k$,
- je-li $x = \frac{1}{3}$, pak máme číselnou řadu $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$.

Tímto způsobem je definována jistá funkce, která každému reálnému x přiřadí součet zadané číselné řady, pokud existuje. Jaký je definiční obor této funkce?

Poloměr konvergence

Věta:

Pokud existuje limita

$$L := \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|,$$

Poloměr konvergence

Věta:

Pokud existuje limita

$$L := \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|,$$

potom klademe

$$R := \begin{cases} \frac{1}{L}, & L \in \mathbb{R}, \\ +\infty, & L = 0, \\ 0, & L = +\infty \end{cases}$$

Poloměr konvergence

Věta:

Pokud existuje limita

$$L := \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|,$$

potom klademe

$$R := \begin{cases} \frac{1}{L}, & L \in \mathbb{R}, \\ +\infty, & L = 0, \\ 0, & L = +\infty \end{cases}$$

a tvrdíme, že mocninná řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$$

konverguje absolutně pro $x \in (c-R, c+R)$ a diverguje pro $|c-x| > R$.

Poloměr konvergence

Důkaz.

BÚNO $c = 0$. Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ dostáváme

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}x^{k+1}}{a_k x^k} \right| = \lim_{k\to\infty} |x| \cdot \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = |x| \cdot L.$$

Shrnujeme, že pokud

Poloměr konvergence

Důkaz.

BÚNO $c = 0$. Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ dostáváme

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}x^{k+1}}{a_k x^k} \right| = \lim_{k\to\infty} |x| \cdot \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = |x| \cdot L.$$

Shrnujeme, že pokud

- $|x| \cdot L < 1$, tedy $|x| < R$, pak podle d'Alembertova kritéria zkoumaná řada konverguje absolutně,

Poloměr konvergence

Důkaz.

BÚNO $c = 0$. Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ dostáváme

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}x^{k+1}}{a_k x^k} \right| = \lim_{k\to\infty} |x| \cdot \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = |x| \cdot L.$$

Shrnujeme, že pokud

- $|x| \cdot L < 1$, tedy $|x| < R$, pak podle d'Alembertova kritéria zkoumaná řada konverguje absolutně,
- $|x| \cdot L > 1$, tedy $|x| > R$, pak podle podílového kritéria je $\lim\limits_{k\to\infty} |a_k x^k| = +\infty$. Tudíž nemůže být splněna nutná podmínka konvergence zkoumané řady (tj. neplatí $\lim\limits_{n\to\infty} a_k x^k = 0$). □

Uveďme dále několik základních vlastností týkajících se mocninné řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad \exists L = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|, \quad R = \frac{1}{L}. \tag{1}$$

- Číslo R nazýváme **poloměrem konvergence** mocninné řady (1).

Uveďme dále několik základních vlastností týkajících se mocninné řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad \exists L = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|, \quad R = \frac{1}{L}. \tag{1}$$

- Číslo R nazýváme **poloměrem konvergence** mocninné řady (1).
- Předchozí věta říká, že tato mocninná řada (1) konverguje pro $|x| < R$ a diverguje pro $|x| > R$. **Neříká nic** o konvergenci pro $x = R$ a $x = -R$.

Uveďme dále několik základních vlastností týkajících se mocninné řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad \exists L = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|, \quad R = \frac{1}{L}. \tag{1}$$

- Číslo R nazýváme **poloměrem konvergence** mocninné řady (1).
- Předchozí věta říká, že tato mocninná řada (1) konverguje pro $|x| < R$ a diverguje pro $|x| > R$. **Neříká nic** o konvergenci pro $x = R$ a $x = -R$.
- Každá mocninná řada se chová tímto způsobem. Platí totiž následující

Věta (Cauchy-Hadamard):

Ke každé mocninné řadě tvaru (1) existuje $R \in \langle 0, +\infty\rangle$ takové, že řada absolutně konverguje pro $|x| < R$ a diverguje pro $|x| > R$.

Uveďme dále několik základních vlastností týkajících se mocninné řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad \exists L = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|, \quad R = \frac{1}{L}. \tag{1}$$

- Číslo R nazýváme **poloměrem konvergence** mocninné řady (1).
- Předchozí věta říká, že tato mocninná řada (1) konverguje pro $|x| < R$ a diverguje pro $|x| > R$. **Neříká nic** o konvergenci pro $x = R$ a $x = -R$.
- Každá mocninná řada se chová tímto způsobem. Platí totiž následující

Věta (Cauchy-Hadamard):

Ke každé mocninné řadě tvaru (1) existuje $R \in \langle 0, +\infty\rangle$ takové, že řada absolutně konverguje pro $|x| < R$ a diverguje pro $|x| > R$.

- Poloměr konvergence ale vždy **nemusí** jít spočítat pomocí limity podílů uvedených v předešlé větě (tato limita nemusí existovat).

Příklad.

Rozeberme všechny tyto poznatky na příkladu funkce $f(x) = \frac{1}{1-x}$ a její Taylorově řadě v bodě 0,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

Příklad.

Rozeberme všechny tyto poznatky na příkladu funkce $f(x) = \frac{1}{1-x}$ a její Taylorově řadě v bodě 0,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

- Platí $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$, $x \neq 1$, $k \in \mathbb{N}$. Proto $f^{(k)}(0) = k!$.

Příklad.

Rozeberme všechny tyto poznatky na příkladu funkce $f(x) = \frac{1}{1-x}$ a její Taylorově řadě v bodě 0,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

- Platí $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$, $x \neq 1$, $k \in \mathbb{N}$. Proto $f^{(k)}(0) = k!$.
- Pro poloměr konvergence máme

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{1}{1} \right| = 1 = \frac{1}{R}.$$

Dále pro $x = \pm 1$ jsou řady $\sum_{k=0}^{\infty} (\pm 1)^k$ divergentní.

Příklad.

Rozeberme všechny tyto poznatky na příkladu funkce $f(x) = \frac{1}{1-x}$ a její Taylorově řadě v bodě 0,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

- Platí $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$, $x \neq 1$, $k \in \mathbb{N}$. Proto $f^{(k)}(0) = k!$.
- Pro poloměr konvergence máme

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{1}{1} \right| = 1 = \frac{1}{R}.$$

  Dále pro $x = \pm 1$ jsou řady $\sum_{k=0}^{\infty} (\pm 1)^k$ divergentní.
- Řada konverguje absolutně pro $x \in (-1, 1)$ a diverguje pro všechna ostatní x.

Příklad.

Rozeberme všechny tyto poznatky na příkladu funkce $f(x) = \frac{1}{1-x}$ a její Taylorově řadě v bodě 0,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

- Platí $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$, $x \neq 1$, $k \in \mathbb{N}$. Proto $f^{(k)}(0) = k!$.
- Pro poloměr konvergence máme

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{1}{1}\right| = 1 = \frac{1}{R}.$$

  Dále pro $x = \pm 1$ jsou řady $\sum_{k=0}^{\infty} (\pm 1)^k$ divergentní.
- Řada konverguje absolutně pro $x \in (-1, 1)$ a diverguje pro všechna ostatní x.
- Rovnost

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

  platí pro $x \in (-1, 1)$. Řadu v tomto případě umíme přímo sečíst, není potřeba vyšetřovat zbytek v Taylorově vzorci.

Podobně máme následující dvojice funkce – Taylorova řada.

Podobně máme následující dvojice funkce – Taylorova řada.

e^x	$=$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$=$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$=$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$	$x \in \mathbb{R}$
$\ln(1+x)$	$=$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^{k}$	$x \in (-1, 1\rangle$
$\operatorname{arctg} x$	$=$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$	$x \in \langle -1, 1\rangle$

Podobně máme následující dvojice funkce – Taylorova řada.

e^x	$=$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$=$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$=$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$	$x \in \mathbb{R}$
$\ln(1+x)$	$=$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$	$x \in (-1, 1\rangle$
$\operatorname{arctg} x$	$=$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$	$x \in \langle -1, 1\rangle$

Atp.

Hlavní body

Příklad: Aproximace funkce $\sin$

Příklad.

Nalezněte vzorec pro výpočet hodnoty funkce $\sin$ pro všechna reálná x s přesností 10^{-7}.

Příklad: Aproximace funkce $\sin$

Příklad.

Nalezněte vzorec pro výpočet hodnoty funkce $\sin$ pro všechna reálná x s přesností 10^{-7}.

Díky periodicitě a symetriím funkce $f = \sin$ stačí nalézt vzorec s požadovanou přesností pro x z intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$.

Příklad: Aproximace funkce $\sin$

Příklad.

Nalezněte vzorec pro výpočet hodnoty funkce $\sin$ pro všechna reálná x s přesností 10^{-7}.

Díky periodicitě a symetriím funkce $f = \sin$ stačí nalézt vzorec s požadovanou přesností pro x z intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$.

Podle Taylorovy věty pro $(2n+2)$-hý Taylorův polynom se středem v 0 platí

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \underbrace{\frac{f^{(2n+3)}(\xi_{n,x})}{(2n+3)!} x^{2n+3}}_{R_{2n+2}(x)}.$$

Příklad: Aproximace funkce $\sin$

Příklad.

Nalezněte vzorec pro výpočet hodnoty funkce $\sin$ pro všechna reálná x s přesností 10^{-7}.

Díky periodicitě a symetriím funkce $f = \sin$ stačí nalézt vzorec s požadovanou přesností pro x z intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$.

Podle Taylorovy věty pro $(2n+2)$-hý Taylorův polynom se středem v 0 platí

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \underbrace{\frac{f^{(2n+3)}(\xi_{n,x})}{(2n+3)!} x^{2n+3}}_{R_{2n+2}(x)}.$$

Indexy u symbolu $\xi_{n,x}$ nám připomínají, že tento závisí na x a n.

Protože derivace lichého řádu funkce $\sin$ je – až na střídající se znaménko – funkce $\cos$, můžeme zbytek pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ odhadnout:

$$\left|R_{2n+2}(x)\right| \leq \frac{1}{(2n+3)!}|x|^{2n+3} < \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+3}}{(2n+3)!} =: a_n.$$

Protože derivace lichého řádu funkce $\sin$ je – až na střídající se znaménko – funkce $\cos$, můžeme zbytek pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ odhadnout:

$$\left|R_{2n+2}(x)\right| \leq \frac{1}{(2n+3)!}|x|^{2n+3} < \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+3}}{(2n+3)!} =: a_n.$$

n	a_n
1	$8.0 \cdot 10^{-2}$
2	$4.7 \cdot 10^{-3}$
3	$1.6 \cdot 10^{-4}$
4	$3.6 \cdot 10^{-6}$
5	$5.7 \cdot 10^{-8}$
6	$6.7 \cdot 10^{-10}$

Protože derivace lichého řádu funkce $\sin$ je – až na střídající se znaménko – funkce $\cos$, můžeme zbytek pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ odhadnout:

$$\left|R_{2n+2}(x)\right| \leq \frac{1}{(2n+3)!}|x|^{2n+3} < \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+3}}{(2n+3)!} =: a_n.$$

n	a_n
1	$8.0 \cdot 10^{-2}$
2	$4.7 \cdot 10^{-3}$
3	$1.6 \cdot 10^{-4}$
4	$3.6 \cdot 10^{-6}$
5	$5.7 \cdot 10^{-8}$
6	$6.7 \cdot 10^{-10}$

Závěr

Pro každé $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ se hodnota $\sin(x)$ liší od výrazu

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}$$

nejvýše o 10^{-7}.