

Základy matematické analýzy

Newtonova metoda

Pavel Hrabák¹, Tomáš Kalvoda², Ivo Petr³

¹pavel.hrabak@fit.cvut.cz ²tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, ³ivo.petr@fit.cvut.cz,

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

4. března 2021
ZS 2020/2021



Hlavní body

1 Newtonova metoda

2 Newtonova metoda: záludnosti



Hlavní body

1 Newtonova metoda

2 Newtonova metoda: záludnosti



Ilustrační příklad $\sqrt[3]{c}$

Příklad.

Vypočtete **třetí odmocninu** z kladného reálného čísla c .



Ilustrační příklad $\sqrt[3]{c}$

Příklad.

Vypočtete **třetí odmocninu** z kladného reálného čísla c .

- Jak zadání vyřešit máme-li k dispozici kalkulátor umožňující pouze sčítat, násobit a dělit čísla?



Ilustrační příklad $\sqrt[3]{c}$

Příklad.

Vypočtete **třetí odmocninu** z kladného reálného čísla c .

- Jak zadání vyřešit máme-li k dispozici kalkulátor umožňující pouze sčítat, násobit a dělit čísla?
- Třetí odmocnina patří mezi často používané funkce, najdete ji i ve většině jednoduchých kapesních kalkulátorů.



Analýza problému

- Buď $c > 0$. Označme hledanou třetí odmocninu symbolem x , tj. $x = \sqrt[3]{c}$.
Ekvivalentně to znamená řešit rovnici $x^3 = c$.



Analýza problému

- Buď $c > 0$. Označme hledanou třetí odmocninu symbolem x , tj. $x = \sqrt[3]{c}$. Ekvivalentně to znamená řešit rovnici $x^3 = c$.
- Označíme-li $f(x) := x^3 - c$, je námi hledané číslo x **řešením rovnice**

$$f(x) = 0.$$



Analýza problému

- Buď $c > 0$. Označme hledanou třetí odmocninu symbolem x , tj. $x = \sqrt[3]{c}$. Ekvivalentně to znamená řešit rovnici $x^3 = c$.
- Označíme-li $f(x) := x^3 - c$, je námi hledané číslo x **řešením rovnice**

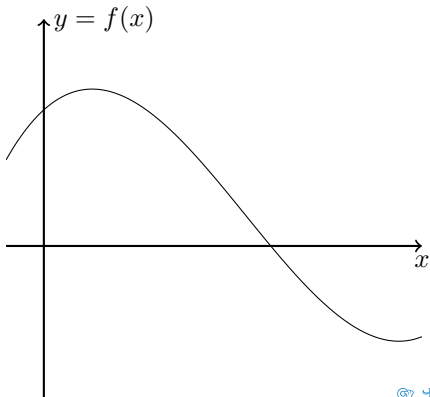
$$f(x) = 0.$$

- Tuto bychom se mohli pokusit řešit nám již známou metodou půlení intervalu (jaké dva počáteční body byste zvolili?). Nyní si však ukážeme další způsob, tzv. **Newtonovu metodu**.



Newtonova metoda: myšlenka

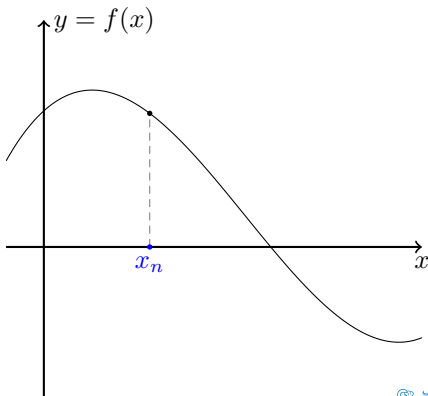
Myšlenka Newtonovy metody spočívá v konstrukci posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ aproximující řešení rovnice $f(x) = 0$. Konstrukce posloupnosti je následující:



Newtonova metoda: myšlenka

Myšlenka Newtonovy metody spočívá v konstrukci posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ aproximující řešení rovnice $f(x) = 0$. Konstrukce posloupnosti je následující:

- 1 Je dáno x_n .

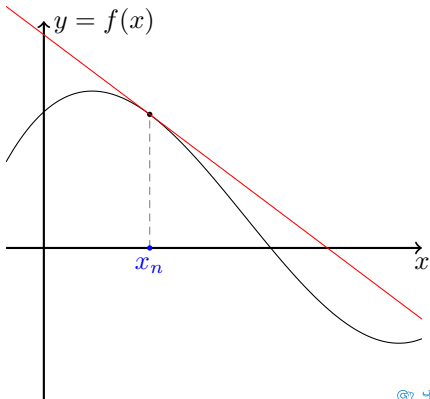


Newtonova metoda: myšlenka

Myšlenka Newtonovy metody spočívá v konstrukci posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ aproximující řešení rovnice $f(x) = 0$. Konstrukce posloupnosti je následující:

- 1 Je dáno x_n .
- 2 Sestroj tečnu funkce f v bodě x_n ,

$$y = f(x_n) + f'(x_n) \cdot (x - x_n).$$



Newtonova metoda: myšlenka

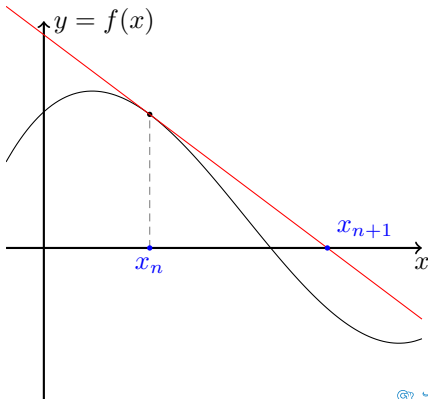
Myšlenka Newtonovy metody spočívá v konstrukci posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ aproximující řešení rovnice $f(x) = 0$. Konstrukce posloupnosti je následující:

- 1 Je dáno x_n .
- 2 Sestroj tečnu funkce f v bodě x_n ,

$$y = f(x_n) + f'(x_n) \cdot (x - x_n).$$

- 3 Průsečík tečny s osou x necht' je další člen posloupnosti,

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$



Newtonova metoda: myšlenka

Myšlenka Newtonovy metody spočívá v konstrukci posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ aproximující řešení rovnice $f(x) = 0$. Konstrukce posloupnosti je následující:

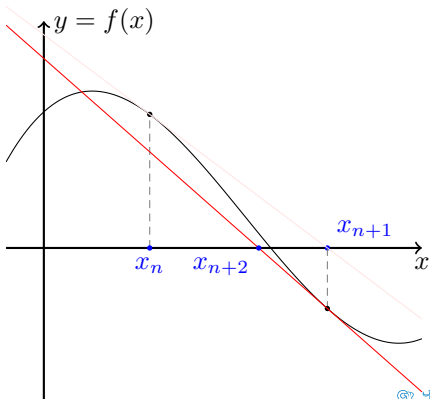
- 1 Je dáno x_n .
- 2 Sestroj tečnu funkce f v bodě x_n ,

$$y = f(x_n) + f'(x_n) \cdot (x - x_n).$$

- 3 Průsečík tečny s osou x necht' je další člen posloupnosti,

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

- 4 Opakuj s x_{n+1} místo x_n .



Newtonova myšlenka: otázky

Z předchozího obrázku se může zdát, že vše je jasné. Avšak:

Poznámka (Otázky):

- Jak zvolit první člen posloupnosti? Závísí výsledek metody na této volbě?
- Má rovnice $f(x) = 0$ vůbec řešení?
- Konverguje takto zkonstruovaná posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$?
- Co když $f'(x_n) = 0$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$?



Newtonova myšlenka: otázky

Z předchozího obrázku se může zdát, že vše je jasné. Avšak:

Poznámka (Otázky):

- Jak zvolit první člen posloupnosti? Záleží výsledek metody na této volbě?
- Má rovnice $f(x) = 0$ vůbec řešení?
- Konverguje takto zkonstruovaná posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$?
- Co když $f'(x_n) = 0$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$?

Odpovědi na tyto otázky se v obecném případě nebudeme zabývat. Vraťme se k našemu konkrétnímu případu s třetí odmocninou, kde uvidíme jak na některé z nich odpovědět.



Příklad $\sqrt[3]{c}$ Newtonova metoda pro $f(x) = x^3 - c$

Je dáno $c > 0$ a funkce $f(x) = x^3 - c$. Newtonova metoda tudíž dává rekurentní vztah

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - c}{3x_n^2} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}.$$



Příklad $\sqrt[3]{c}$ Newtonova metoda pro $f(x) = x^3 - c$

Je dáno $c > 0$ a funkce $f(x) = x^3 - c$. Newtonova metoda tudíž dává rekurentní vztah

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - c}{3x_n^2} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}.$$

V našem případě si lze snadno všimnout, že:

- Funkce f je prostá, $f((0, +\infty)) = (-c, +\infty)$ a tudíž **existuje právě jedno** kladné řešení rovnice $f(x) = 0$.



Příklad $\sqrt[3]{c}$ Newtonova metoda pro $f(x) = x^3 - c$

Je dáno $c > 0$ a funkce $f(x) = x^3 - c$. Newtonova metoda tudíž dává rekurentní vztah

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - c}{3x_n^2} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}.$$

V našem případě si lze snadno všimnout, že:

- Funkce f je prostá, $f((0, +\infty)) = (-c, +\infty)$ a tudíž **existuje právě jedno** kladné řešení rovnice $f(x) = 0$.
- Konverguje-li posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ke konečné kladné limitě a , potom

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2} \right) = \frac{2}{3}a + \frac{c}{3a^2}.$$

Tudíž a je hledané řešení,

$$a^3 = c, \quad \text{neboli} \quad f(a) = 0.$$



Příklad $\sqrt[3]{c}$ **Věta (Vlastnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$):**

Bud' $c > 0$ a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost kladných reálných čísel splňující rekurentní vztah

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}, \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Potom tato posloupnost konverguje ke konečné kladné limitě.



Příklad $\sqrt[3]{c}$ **Věta (Vlastnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$):**

Bud' $c > 0$ a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost kladných reálných čísel splňující rekurentní vztah

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}, \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Potom tato posloupnost konverguje ke konečné kladné limitě.

Důkaz.

Položme $g(x) := \frac{2}{3}x + \frac{c}{3x^2}$ pro $x > 0$. Vyšetřením průběhu zjistíme, že $g(x) \geq \sqrt[3]{c}$, kde rovnost nastává právě tehdy, když $x = \sqrt[3]{c}$. Tudíž:

Příklad $\sqrt[3]{c}$ **Věta (Vlastnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$):**

Bud' $c > 0$ a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost kladných reálných čísel splňující rekurentní vztah

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}, \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Potom tato posloupnost konverguje ke konečné kladné limitě.

Důkaz.

Položme $g(x) := \frac{2}{3}x + \frac{c}{3x^2}$ pro $x > 0$. Vyšetřením průběhu zjistíme, že $g(x) \geq \sqrt[3]{c}$, kde rovnost nastává právě tehdy, když $x = \sqrt[3]{c}$. Tudíž:

- Pokud $x_1 = \sqrt[3]{c}$, potom $x_n = \sqrt[3]{c}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Příklad $\sqrt[3]{c}$ Věta (Vlastnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$):

Bud' $c > 0$ a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost kladných reálných čísel splňující rekurentní vztah

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}, \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Potom tato posloupnost konverguje ke konečné kladné limitě.

Důkaz.

Položme $g(x) := \frac{2}{3}x + \frac{c}{3x^2}$ pro $x > 0$. Vyšetřením průběhu zjistíme, že $g(x) \geq \sqrt[3]{c}$, kde rovnost nastává právě tehdy, když $x = \sqrt[3]{c}$. Tudíž:

- Pokud $x_1 = \sqrt[3]{c}$, potom $x_n = \sqrt[3]{c}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.
- Pokud $x_1 > \sqrt[3]{c}$, potom $x_n > \sqrt[3]{c}$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Navíc posloupnost (x_n) je ostře klesající:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{c - x_n^3}{3x_n^2} < 0,$$

a zdola omezená číslem $\sqrt[3]{c}$. Tudíž je konvergentní s konečnou limitou.

Příklad $\sqrt[3]{c}$ Věta (Vlastnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$):

Bud' $c > 0$ a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost kladných reálných čísel splňující rekurentní vztah

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}, \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Potom tato posloupnost konverguje ke konečné kladné limitě.

Důkaz.

Položme $g(x) := \frac{2}{3}x + \frac{c}{3x^2}$ pro $x > 0$. Vyšetřením průběhu zjistíme, že $g(x) \geq \sqrt[3]{c}$, kde rovnost nastává právě tehdy, když $x = \sqrt[3]{c}$. Tudíž:

- Pokud $x_1 = \sqrt[3]{c}$, potom $x_n = \sqrt[3]{c}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.
- Pokud $x_1 > \sqrt[3]{c}$, potom $x_n > \sqrt[3]{c}$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Navíc posloupnost (x_n) je ostře klesající:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{c - x_n^3}{3x_n^2} < 0,$$

a zdola omezená číslem $\sqrt[3]{c}$. Tudíž je konvergentní s konečnou limitou.

- Pokud $0 < x_1 < \sqrt[3]{c}$, pak $x_2 > \sqrt[3]{c}$ a můžeme použít předchozí bod. □

Věta (Odhad chyby):

Je-li $c > 1$ a $x_1 > \sqrt[3]{c}$, potom

$$x_{n+1} - \sqrt[3]{c} \leq (x_n - \sqrt[3]{c})^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

a

$$x_{n+1} - \sqrt[3]{c} \leq 2(x_{n+1} - x_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Důkaz.

Vynecháme. □



Věta (Odhad chyby):

Je-li $c > 1$ a $x_1 > \sqrt[3]{c}$, potom

$$x_{n+1} - \sqrt[3]{c} \leq (x_n - \sqrt[3]{c})^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

a

$$x_{n+1} - \sqrt[3]{c} \leq 2(x_{n+1} - x_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Důkaz.

Vynecháme. □

Poznámka:

- Z první části tvrzení plyne: je-li chyba n -tého členu například 10^{-5} , pak chyba dalšího členu je již pouze 10^{-10} (tzv. kvadratická konvergence)!

Věta (Odhad chyby):

Je-li $c > 1$ a $x_1 > \sqrt[3]{c}$, potom

$$x_{n+1} - \sqrt[3]{c} \leq (x_n - \sqrt[3]{c})^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

a

$$x_{n+1} - \sqrt[3]{c} \leq 2(x_{n+1} - x_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Důkaz.

Vynecháme. □

Poznámka:

- Z první části tvrzení plyne: je-li chyba n -tého členu například 10^{-5} , pak chyba dalšího členu je již pouze 10^{-10} (tzv. kvadratická konvergence)!
- Toto je pro praktické účely **velmi** důležitý výsledek. Pomocí dvou naposledy vypočtených členů posloupnosti můžeme odhadnout chybu mezi posledním členem a skutečnou hodnotou $\sqrt[3]{c}$ (tu neznáme!) a tím **dodržet požadovanou přesnost**.

Ilustrace iterace ($\sqrt[3]{7}$, 36 cifer)

Člen posloupnosti	Hodnota
x_1	7.0
x_2	4.71428571428571428571428571428571429
x_3	3.24784642966461148279330097511915694
x_4	2.38643130490037593935668895758001112
x_5	2.00066641679591817635777458039226767
x_6	1.91672239561208699369932626267864600
x_7	1.91293867672049370288664833049651171
x_8	1.91293118280174664702280424145842154
x_9	1.91293118277238910119956738659641893
x_{10}	1.91293118277238910119911683954876030
$\sqrt[3]{7}$	1.91293118277238910119911683954876028



Ilustrace iterace ($\sqrt[3]{7}$, 36 cifer)

Člen posloupnosti	Hodnota
x_1	7.0
x_2	4.71428571428571428571428571428571429
x_3	3.24784642966461148279330097511915694
x_4	2.38643130490037593935668895758001112
x_5	2.00066641679591817635777458039226767
x_6	1.91672239561208699369932626267864600
x_7	1.91293867672049370288664833049651171
x_8	1.91293118280174664702280424145842154
x_9	1.91293118277238910119956738659641893
x_{10}	1.91293118277238910119911683954876030
$\sqrt[3]{7}$	1.91293118277238910119911683954876028



Hlavní body

1 Newtonova metoda

2 Newtonova metoda: záludnosti

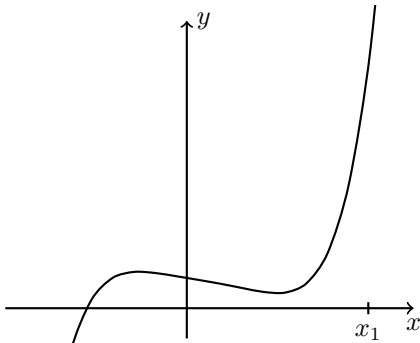


Příklad.

Zkoumejme chování Newtonovy metody aplikované na $p(x) = x^5 - x^4 - x + 2$ s počátečním bodem $x_1 = 2$.

Rekurentní vzorec Newtonovy metody v tomto případě zní

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 - x_n^4 - x_n + 2}{5x_n^4 - 4x_n^3 - 1}.$$

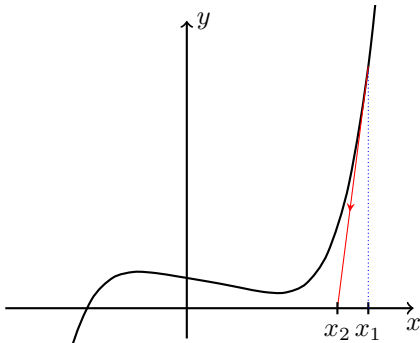


Příklad.

Zkoumejme chování Newtonovy metody aplikované na $p(x) = x^5 - x^4 - x + 2$ s počátečním bodem $x_1 = 2$.

Rekurentní vzorec Newtonovy metody v tomto případě zní

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 - x_n^4 - x_n + 2}{5x_n^4 - 4x_n^3 - 1}.$$

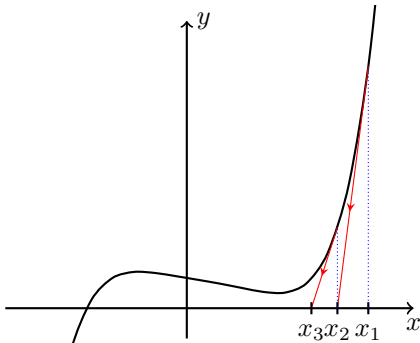


Příklad.

Zkoumejme chování Newtonovy metody aplikované na $p(x) = x^5 - x^4 - x + 2$ s počátečním bodem $x_1 = 2$.

Rekurentní vzorec Newtonovy metody v tomto případě zní

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 - x_n^4 - x_n + 2}{5x_n^4 - 4x_n^3 - 1}.$$

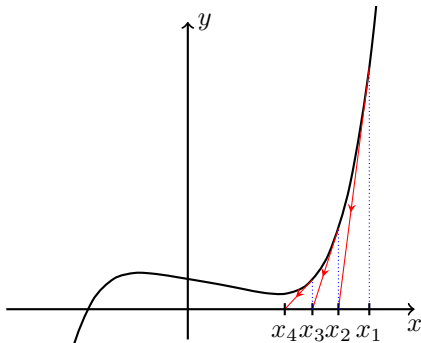


Příklad.

Zkoumejme chování Newtonovy metody aplikované na $p(x) = x^5 - x^4 - x + 2$ s počátečním bodem $x_1 = 2$.

Rekurentní vzorec Newtonovy metody v tomto případě zní

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 - x_n^4 - x_n + 2}{5x_n^4 - 4x_n^3 - 1}.$$

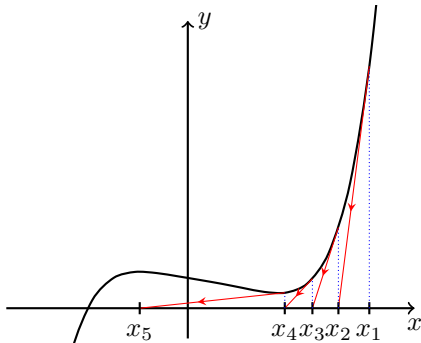


Příklad.

Zkoumejme chování Newtonovy metody aplikované na $p(x) = x^5 - x^4 - x + 2$ s počátečním bodem $x_1 = 2$.

Rekurentní vzorec Newtonovy metody v tomto případě zní

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 - x_n^4 - x_n + 2}{5x_n^4 - 4x_n^3 - 1}.$$



Příklad.

Zkoumejme chování Newtonovy metody aplikované na $p(x) = x^5 - x^4 - x + 2$ s počátečním bodem $x_1 = 2$.

Rekurentní vzorec Newtonovy metody v tomto případě zní

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 - x_n^4 - x_n + 2}{5x_n^4 - 4x_n^3 - 1}.$$

n	x_n
1	2.
2	1.6595744680851063
3	1.3729685700681316
4	1.0686067391904803
5	-0.5293373794223353
6	169.52057927559713
7	135.65665311569666

