Základy matematické analýzy

Riemannův integrál

Pavel Hrabák[1], Tomáš Kalvoda[2], Ivo Petr[3]

[1]pavel.hrabak@fit.cvut.cz [2]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [3]ivo.petr@fit.cvut.cz,

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

4. března 2021
ZS 2020/2021

Hlavní body

Hlavní body

Připomenutí: minimum a maximum množiny

Poznámka:

Buď $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $\alpha \in M$ nazveme

- **maximem** množiny M právě když pro všechna $x \in M$ platí $x \leq \alpha$.
- **minimem** množiny M právě když pro všechna $x \in M$ platí $\alpha \leq x$.

Maximum, resp. minimum, množiny M značíme $\max M$, resp. $\min M$.

Připomenutí: minimum a maximum množiny

Poznámka:

Buď $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $\alpha \in M$ nazveme

- **maximem** množiny M právě když pro všechna $x \in M$ platí $x \leq \alpha$.
- **minimem** množiny M právě když pro všechna $x \in M$ platí $\alpha \leq x$.

Maximum, resp. minimum, množiny M značíme $\max M$, resp. $\min M$.

Poznámka:

Některé množiny $M \subset \mathbb{R}$ nemusí mít minimum ani maximum. Například otevřený interval $M = (0, 1)$. Čísla 0 a 1 nejsou minimem/maximem, neboť $0, 1 \notin M$.

Infimum množiny $A \subset \mathbb{R}$

Definice:

Buď A neprázdná zdola omezená podmnožina množiny reálných čísel. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazveme **infimem** množiny A, značíme $\inf A$, právě když

1. pro každé $x \in A$ platí $\alpha \leq x$, (α je **dolní závora** A)
2. pokud $\beta \in \mathbb{R}$ také splňuje předchozí bod, pak $\beta \leq \alpha$. (α je největší dolní závora A)

Pokud množina A není zdola omezená, pak klademe $\inf A := -\infty$. Pro prázdnou množinu klademe $\inf \emptyset := +\infty$.

Infimum množiny $A \subset \mathbb{R}$

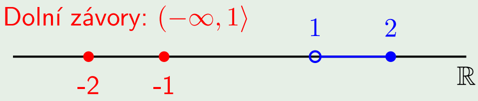
Definice:

Buď A neprázdná zdola omezená podmnožina množiny reálných čísel. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazveme **infimem** množiny A, značíme $\inf A$, právě když

1. pro každé $x \in A$ platí $\alpha \leq x$, (α je **dolní závora** A)
2. pokud $\beta \in \mathbb{R}$ také splňuje předchozí bod, pak $\beta \leq \alpha$. (α je největší dolní závora A)

Pokud množina A není zdola omezená, pak klademe $\inf A := -\infty$. Pro prázdnou množinu klademe $\inf \emptyset := +\infty$.

Příklad ($\inf(1, 2\rangle = 1$).



Největší dolní závora: 1

Supremum množiny $A \subset \mathbb{R}$

Definice:

Buď A neprázdná shora omezená podmnožina množiny reálných čísel. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazveme **supremem** množiny A, značíme $\sup A$, právě když

1. pro každé $x \in A$ platí $x \le \alpha$, (α je **horní závora** A)
2. pokud $\beta \in \mathbb{R}$ také splňuje předchozí bod, pak $\alpha \le \beta$. (α je nejmenší horní závora A)

Pokud množina A není shora omezená, pak klademe $\sup A := +\infty$. Pro prázdnou množinu klademe $\sup \emptyset := -\infty$.

Supremum množiny $A \subset \mathbb{R}$

Definice:

Buď A neprázdná shora omezená podmnožina množiny reálných čísel. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazveme **supremem** množiny A, značíme $\sup A$, právě když

1. pro každé $x \in A$ platí $x \le \alpha$, (α je **horní závora** A)
2. pokud $\beta \in \mathbb{R}$ také splňuje předchozí bod, pak $\alpha \le \beta$. (α je nejmenší horní závora A)

Pokud množina A není shora omezená, pak klademe $\sup A := +\infty$. Pro prázdnou množinu klademe $\sup \emptyset := -\infty$.

Věta:

Buď A podmnožina množiny reálných čísel. Potom existuje její infimum ($\inf A$) a supremum ($\sup A$).

Supremum množiny $A \subset \mathbb{R}$

Definice:

Buď A neprázdná shora omezená podmnožina množiny reálných čísel. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazveme **supremem** množiny A, značíme $\sup A$, právě když

1. pro každé $x \in A$ platí $x \leq \alpha$, (α je **horní závora** A)
2. pokud $\beta \in \mathbb{R}$ také splňuje předchozí bod, pak $\alpha \leq \beta$.
   (α je nejmenší horní závora A)

Pokud množina A není shora omezená, pak klademe $\sup A := +\infty$. Pro prázdnou množinu klademe $\sup \emptyset := -\infty$.

Věta:

Buď A podmnožina množiny reálných čísel. Potom existuje její infimum ($\inf A$) a supremum ($\sup A$).

Důkaz.

Vynecháváme, plyne z Axiomu úplnosti množiny reálných čísel. □

Infimum a supremum: příklady

Příklad.

Pro interval $J = (-2, 1\rangle$ platí

$$\max J = 1, \qquad \sup J = 1, \qquad \min J \text{ neexistuje}, \qquad \inf J = -2.$$

Značení

Pro $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a množinu $M \subset D_f$ klademe

$$\inf_M f = \inf_{x \in M} f(x) := \inf\{f(x) \mid x \in M\},$$
$$\sup_M f = \sup_{x \in M} f(x) := \sup\{f(x) \mid x \in M\}.$$

Značení

Pro $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a množinu $M \subset D_f$ klademe

$$\inf_M f = \inf_{x \in M} f(x) := \inf\{f(x) \mid x \in M\},$$
$$\sup_M f = \sup_{x \in M} f(x) := \sup\{f(x) \mid x \in M\}.$$

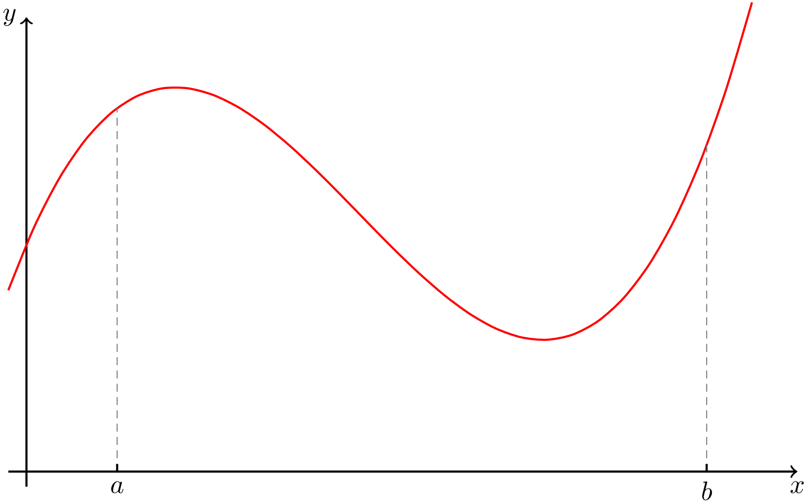
Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá funkce a $M \subset D_f$ uzavřený omezený interval. Potom klademe

$$\max_M f = \max_{x \in M} f(x) := \max\{f(x) \mid x \in M\},$$
$$\min_M f = \min_{x \in M} f(x) := \min\{f(x) \mid x \in M\}.$$

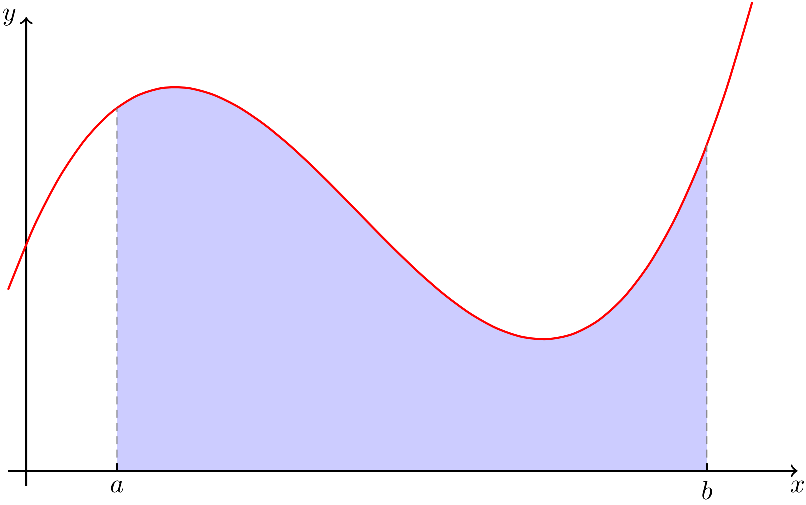
Připomeňme, že tato $\min$ a $\max$ existují díky spojitosti f a uzavřenosti M.

Hlavní body

Motivace: Výpočet obsahu plochy pod grafem funkce



Motivace: Výpočet obsahu plochy pod grafem funkce



Dělení intervalu $\langle a, b \rangle$

Definice:

Buď dán interval $\langle a, b \rangle$. Konečnou množinu

$$\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

takovou, že

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

nazýváme **dělením intervalu** $\langle a, b \rangle$. Bodům x_k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, říkáme **dělící body intervalu** $\langle a, b \rangle$. Intervalu $\langle x_{k-1}, x_k \rangle$ říkáme k**-tý částečný interval** intervalu $\langle a, b \rangle$ při dělení σ. Číslo

$$\nu(\sigma) := \max\{\Delta_k \mid k = 1, 2, \ldots, n\}, \quad \text{kde} \quad \Delta_k := x_k - x_{k-1},\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

nazýváme **normou dělení** σ.

Příklad dělení

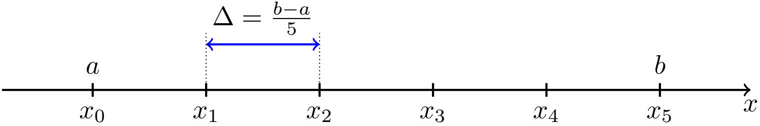
Příklad (Ekvidistantní dělení).

Pro interval $\langle a, b\rangle$ a $n \in \mathbb{N}$ položme $\Delta := \frac{b-a}{n}$ a

$$x_i := a + i \cdot \Delta, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Tedy

$$\sigma = \big\{a,\, a+\Delta,\, a+2\Delta, \ldots,\, a+(n-1)\Delta,\, a+n\Delta = b\big\}.$$



Horní a dolní součet

Buďte funkce f definovaná a omezená na intervalu $J = \langle a, b \rangle$ a $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ dělení intervalu J. Označme

$$M_i(\sigma, f) := \sup_{\langle x_{i-1}, x_i \rangle} f \quad \text{a} \quad m_i(\sigma, f) := \inf_{\langle x_{i-1}, x_i \rangle} f.$$

pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$.

Horní a dolní součet

Buďte funkce f definovaná a omezená na intervalu $J = \langle a, b\rangle$ a $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ dělení intervalu J. Označme

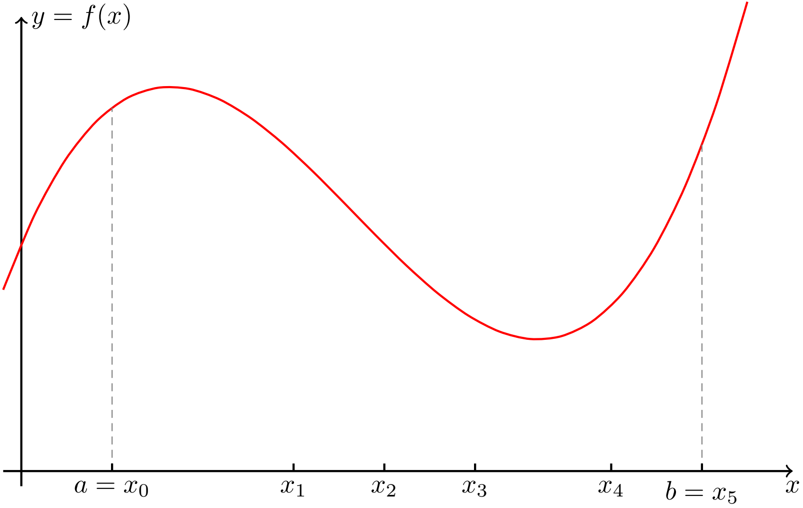
$$M_i(\sigma, f) := \sup_{\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f \quad \text{a} \quad m_i(\sigma, f) := \inf_{\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f.$$

pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$.

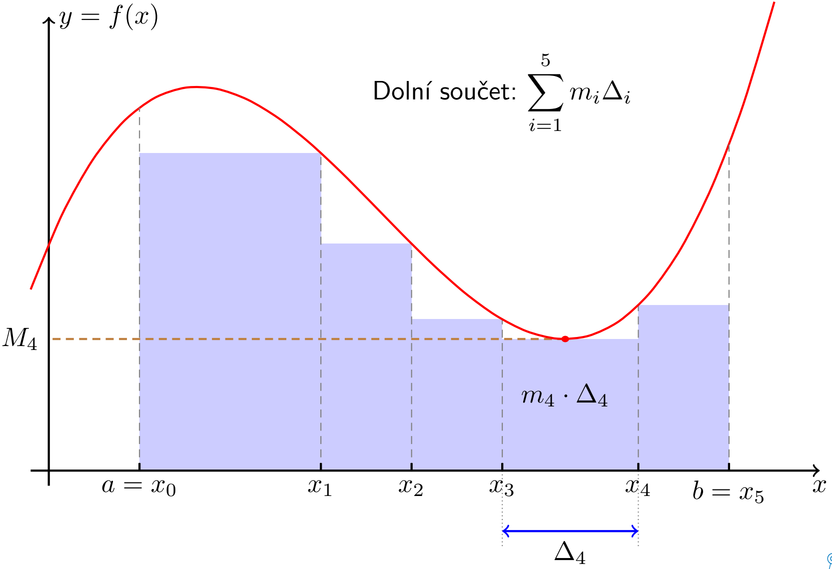
Potom součty

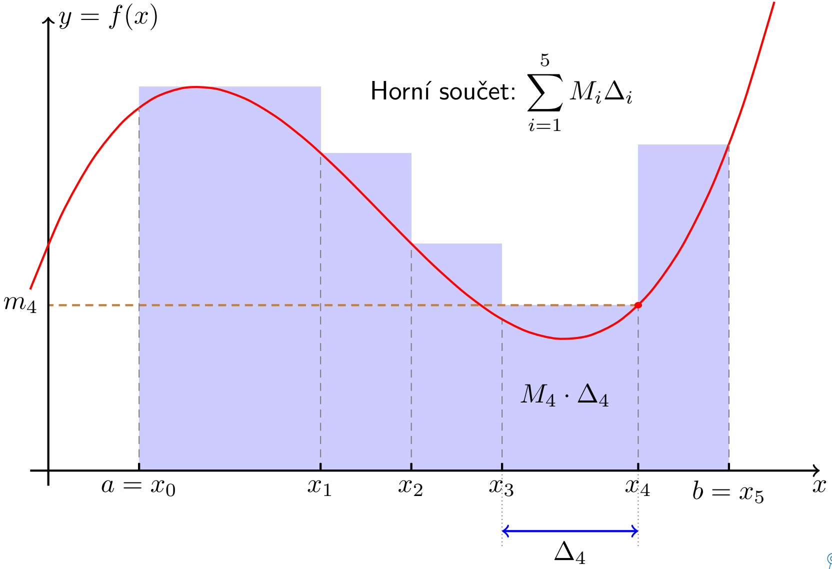
$$S(\sigma, f) := \sum_{i=1}^{n} M_i(\sigma, f)\Delta_i \quad \text{a} \quad s(\sigma, f) := \sum_{i=1}^{n} m_i(\sigma, f)\Delta_i$$

nazýváme **horním**, resp. **dolním**, **součtem funkce** f při dělení σ.



$y = f(x)$
$a = x_0$
x_1
x_2
x_3
x_4
$b = x_5$
x


$y = f(x)$
Dolní součet: $\sum_{i=1}^{5} m_i \Delta_i$
M_4
$m_4 \cdot \Delta_4$
$a = x_0$
x_1
x_2
x_3
x_4
$b = x_5$
x
Δ_4



$y = f(x)$
Horní součet: $\sum_{i=1}^{5} M_i \Delta_i$
m_4
$M_4 \cdot \Delta_4$
$a = x_0$
x_1
x_2
x_3
x_4
$b = x_5$
x
Δ_4

Horní a dolní integrál

Pro funkci f definovanou a omezenou na uzavřeném intervalu $J = \langle a, b \rangle$ definujeme čísla

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf\{S(\sigma) | \sigma \text{ dělení } J\} \text{ a } \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\{s(\sigma) | \sigma \text{ dělení } J\}.$$

a nazýváme **horním**, resp. **dolním**, **integrálem** funkce f na intervalu J.

Horní a dolní integrál

Pro funkci f definovanou a omezenou na uzavřeném intervalu $J = \langle a, b \rangle$ definujeme čísla

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf\{S(\sigma) | \sigma \text{ dělení } J\} \text{ a } \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\{s(\sigma) | \sigma \text{ dělení } J\}.$$

a nazýváme **horním**, resp. **dolním**, **integrálem** funkce f na intervalu J.

Definice:

Pokud pro funkci f definovanou a omezenou na uzavřeném intervalu J platí

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R},$$

pak jejich společnou hodnotu nazýváme **Riemannovým integrálem funkce f na intervalu** J a toto číslo značíme symboly

$$\int_a^b f, \quad \text{případně} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Postačující podmínka pro existenci Riemannova integrálu

Posloupnost dělení σ_n nazveme **normální**, pokud pro její normy platí

$$\lim_{n\to\infty} \nu(\sigma_n) = 0.$$

Postačující podmínka pro existenci Riemannova integrálu

Posloupnost dělení σ_n nazveme **normální**, pokud pro její normy platí

$$\lim_{n\to\infty} \nu(\sigma_n) = 0.$$

Věta (Postačující podmínka pro existenci Riemannova integrálu):

Buď f spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom existuje její Riemannův integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Postačující podmínka pro existenci Riemannova integrálu

Posloupnost dělení σ_n nazveme **normální**, pokud pro její normy platí

$$\lim_{n\to\infty} \nu(\sigma_n) = 0.$$

Věta (Postačující podmínka pro existenci Riemannova integrálu):

Buď f spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom existuje její Riemannův integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$.
Pokud je navíc $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ normální posloupnost dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ potom limity

$$\lim_{n\to\infty} s(\sigma_n, f) \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} S(\sigma_n, f)$$

existují, a jsou rovny Riemannově integrálu funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Definice:

Pro funkci f spojitou na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a dělení $\sigma = \{x_0 = a,\, x_1, \ldots, x_n = b\}$ tohoto intervalu definujeme **integrální součet funkce f při dělení** σ předpisem

$$\mathcal{J}(\sigma) \equiv \mathcal{J}(\sigma, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i,$$

kde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ a α_i patří do intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Definice:

Pro funkci f spojitou na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a dělení $\sigma = \{x_0 = a,\, x_1, \ldots, x_n = b\}$ tohoto intervalu definujeme **integrální součet funkce** f **při dělení** σ předpisem

$$\mathcal{J}(\sigma) \equiv \mathcal{J}(\sigma, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i,$$

kde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ a α_i patří do intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Vztah mezi dolním a horním součtem a integrálním součtem funkce f při dělení σ je dán nerovnostmi

$$s(\sigma) \leq \mathcal{J}(\sigma) \leq S(\sigma).$$

Definice:

Pro funkci f spojitou na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a dělení $\sigma = \{x_0 = a,\, x_1, \ldots, x_n = b\}$ tohoto intervalu definujeme **integrální součet funkce** f **při dělení** σ předpisem

$$\mathcal{J}(\sigma) \equiv \mathcal{J}(\sigma, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i,$$

kde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ a α_i patří do intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Vztah mezi dolním a horním součtem a integrálním součtem funkce f při dělení σ je dán nerovnostmi

$$s(\sigma) \leq \mathcal{J}(\sigma) \leq S(\sigma).$$

Riemannův integrál funkce f spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$ lze tedy počítat i jako limitu z integrálních součtů

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(\sigma_n),$$

kde $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná normální posloupnost dělení.

Příklady

Příklad.

Vypočtěte integrál z konstantní funkce $f(x) = c$ na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Příklady

Příklad.

Vypočtěte integrál z konstantní funkce $f(x) = c$ na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Pro libovolné dělení σ intervalu $\langle a, b\rangle$ platí

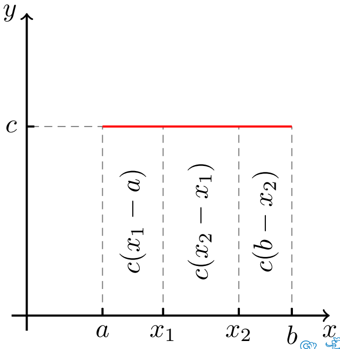
$$s(\sigma) = S(\sigma) = \mathcal{J}(\sigma) = c(b-a).$$

Takže pro libovolnou normální posloupnost (σ_n) dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} s(\sigma_n) = \lim_{n\to\infty} S(\sigma_n) = c(b-a).$$

Riemannův integrál funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ je pak

$$\int_a^b f = c(b-a).$$



Příklad.

Vypočtěte Riemannův integrál funkce $f(x) = x$ na intervalu $J = \langle 0, 1 \rangle$.

Příklad.

Vypočtěte Riemannův integrál funkce $f(x) = x$ na intervalu $J = \langle 0, 1 \rangle$.

Zvolme normální posloupnost $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ ekvidistantních dělení intervalu J.

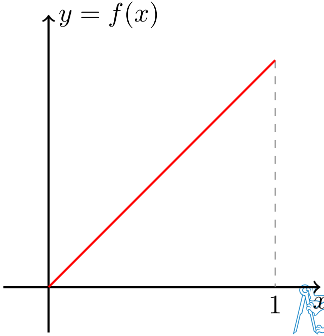
$$\sigma_n = \left\{ 0 = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)} = 1 \right\}, \quad x_i^{(n)} = i \cdot \frac{1}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Pro dolní součet při dělení σ_n dostáváme

$$s(\sigma_n) = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^{(n)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

Tudíž

$$\int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} s(\sigma_n) = \frac{1}{2}.$$



Příklad.

Vypočtěte Riemannův integrál funkce $f(x) = x$ na intervalu $J = \langle 0, 1 \rangle$.

Zvolme normální posloupnost $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ ekvidistantních dělení intervalu J.

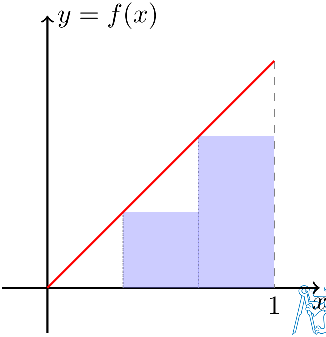
$$\sigma_n = \left\{0 = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)} = 1\right\}, \quad x_i^{(n)} = i \cdot \frac{1}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Pro dolní součet při dělení σ_n dostáváme

$$s(\sigma_n) = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^{(n)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

Tudíž

$$\int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} s(\sigma_n) = \frac{1}{2}.$$



Příklad.

Vypočtěte Riemannův integrál funkce $f(x) = x$ na intervalu $J = \langle 0, 1 \rangle$.

Zvolme normální posloupnost $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ ekvidistantních dělení intervalu J.

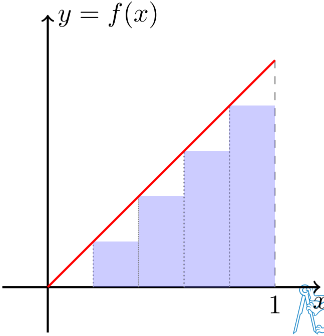
$$\sigma_n = \left\{ 0 = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)} = 1 \right\}, \quad x_i^{(n)} = i \cdot \frac{1}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Pro dolní součet při dělení σ_n dostáváme

$$s(\sigma_n) = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^{(n)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

Tudíž

$$\int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} s(\sigma_n) = \frac{1}{2}.$$



Příklad.

Vypočtěte Riemannův integrál funkce $f(x) = x$ na intervalu $J = \langle 0, 1 \rangle$.

Zvolme normální posloupnost $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ ekvidistantních dělení intervalu J.

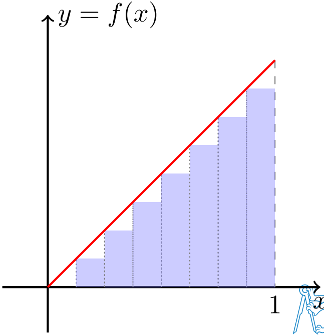
$$\sigma_n = \left\{ 0 = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)} = 1 \right\}, \quad x_i^{(n)} = i \cdot \frac{1}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Pro dolní součet při dělení σ_n dostáváme

$$s(\sigma_n) = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^{(n)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

Tudíž

$$\int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} s(\sigma_n) = \frac{1}{2}.$$



Příklad.

Vypočtěte Riemannův integrál funkce $f(x) = x$ na intervalu $J = \langle 0, 1 \rangle$.

Zvolme normální posloupnost $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ ekvidistantních dělení intervalu J.

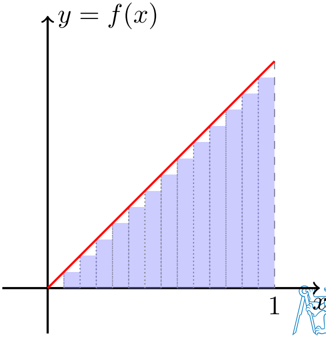
$$\sigma_n = \left\{0 = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)} = 1\right\}, \quad x_i^{(n)} = i \cdot \frac{1}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Pro dolní součet při dělení σ_n dostáváme

$$s(\sigma_n) = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^{(n)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

Tudíž

$$\int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} s(\sigma_n) = \frac{1}{2}.$$



Hlavní body

Linearita integrálu

Věta (Aditivita integrálu):

Nechť f a g jsou spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom pro Riemannův integrál funkce $f + g$ (která je také automaticky spojitá na $\langle a, b\rangle$) platí

$$\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Linearita integrálu

Věta (Aditivita integrálu):

Nechť f a g jsou spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom pro Riemannův integrál funkce $f+g$ (která je také automaticky spojitá na $\langle a, b\rangle$) platí

$$\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta (Multiplikativita integrálu):

Nechť f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a $c \in \mathbb{R}$ je konstanta. Potom pro Riemannův integrál funkce cf platí

$$\int_a^b (cf)(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Chování v mezích

Věta (Aditivita integrálu v mezích):

Riemannův integrál funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ existuje, právě když pro každé $c \in (a, b)$ existují Riemannovy integrály funkce f na intervalech $\langle a, c\rangle$ a $\langle c, b\rangle$. V takovém případě navíc platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Chování v mezích

Věta (Aditivita integrálu v mezích):

Riemannův integrál funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ existuje, právě když pro každé $c \in (a, b)$ existují Riemannovy integrály funkce f na intervalech $\langle a, c\rangle$ a $\langle c, b\rangle$. V takovém případě navíc platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta (Nerovnosti mezi integrály):

Nechť jsou f a g spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť platí nerovnost $f(x) \le g(x)$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$. Potom pro jejich Riemannovy integrály platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Newtonova formule

Poznámka:

Následující věta odhaluje vztah mezi určitým (Riemannův) a neurčitým (primitivní funkce) integrálem. Umožnuje nám počítat Riemannův integrál bez explicitního použití limitní definice.

Newtonova formule

Poznámka:

Následující věta odhaluje vztah mezi určitým (Riemannův) a neurčitým (primitivní funkce) integrálem. Umožnuje nám počítat Riemannův integrál bez explicitního použití limitní definice.

Věta (Newtonova formule):

Nechť f je funkce spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ s primitivní funkcí F. Pak platí rovnost

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) =: \Big[F(x)\Big]_a^b.$$

Důkaz.

Uvažme $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Použijeme Lagrangeovu větu o přírustku funkce na funkci F a intervaly $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ postupně pro $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} \Big(F(x_i) - F(x_{i-1})\Big) = \sum_{i=1}^{n} F'(\alpha_i)(x_i - x_{i-1}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i,$$

kde $\alpha_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Důkaz.

Uvažme $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Použijeme Lagrangeovu větu o přírustku funkce na funkci F a intervaly $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ postupně pro $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} \Big(F(x_i) - F(x_{i-1}) \Big) = \sum_{i=1}^{n} F'(\alpha_i)(x_i - x_{i-1}) = \\ = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i,$$

kde $\alpha_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.Takže

$$F(b) - F(a) = \mathcal{J}(\sigma).$$

Uvážíme-li nyní libovolnou normální posloupnost dělení (σ_n) pak

$$F(b) - F(a) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(\sigma_n) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \qquad \square$$

Příklady

Příklad.

Pro $a < b$ vypočtěte integrál

$$\int_a^b e^x \, \mathrm{d}x.$$

Příklady

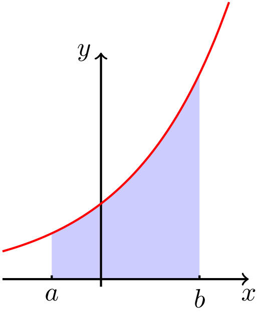
Příklad.

Pro $a < b$ vypočtěte integrál

$$\int_a^b e^x \, dx.$$

Primitivní funkcí k e^x je funkce e^x. Pak

$$\int_a^b e^x dx = \Big[e^x\Big]_a^b = e^b - e^a.$$



Příklad.

Spočítejte integrál

$$\int_0^\pi \sin x \, \mathrm{d}x.$$

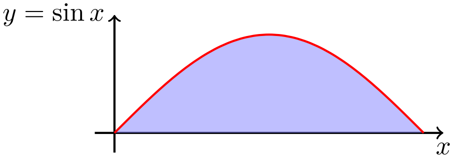
Příklad.

Spočítejte integrál
$$\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x.$$

Primitivní funkcí k funkci $\sin x$ je funkce $-\cos x$. Proto

$$\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x = \Big[-\cos x\Big]_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

Plocha jednoho „hrbu“ grafu funkce $\sin$ je tedy 2 (v daných jednotkách plochy).



Hlavní body

Per partes pro určitý integrál

Věta:

Nechť f a g jsou funkce spojité na $\langle a, b\rangle$, f má spojitou derivaci na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť G je primitivní funkce k funkci g na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \big[f(x)G(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\mathrm{d}x.$$

Per partes pro určitý integrál

Věta:

Nechť f a g jsou funkce spojité na $\langle a, b\rangle$, f má spojitou derivaci na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť G je primitivní funkce k funkci g na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \big[f(x)G(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\mathrm{d}x.$$

Důkaz.

Funkce fG je primitivní funkcí k funkci $f'G + fg$ na intervalu (a, b) a spojitá na $\langle a, b\rangle$. Předpoklady spojitosti na intervalu $\langle a, b\rangle$ zaručují existenci integrálů $\int_a^b f'G$ a $\int_a^b fg$. Použijeme-li linearitu integrálu a Newtonovu formuli, dostáváme

$$\int_a^b f'(x)G(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (fG)'(x)\,\mathrm{d}x = \big[f(x)G(x)\big]_a^b. \qquad \square$$

Příklad.

Vypočtěte
$$\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x.$$

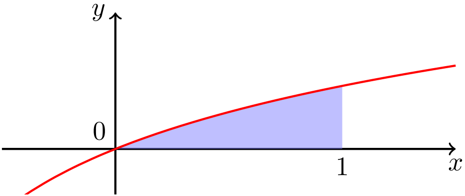
Příklad.

Vypočtěte

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x.$$

Derivujeme $\ln(1+x)$ a integrujeme 1,

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = \Big[x\ln(1+x)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \ln(2) - \Big[x - \ln|1+x|\Big]_0^1 = 2\ln(2) - 1.$$



Substituce v určitém integrálu

Poznámka:

Zavádíme následující značení

- $$\int_a^a f := 0,$$
- pro $a > b$ klademe $\int_a^b f := -\int_b^a f$.

Věta (O substituci I):

Nechť pro funkce f a φ platí

1. φ a její derivace φ' jsou spojité na $\langle \alpha, \beta \rangle$,
2. f je spojitá na $\varphi\big(\langle \alpha, \beta \rangle\big)$.

Potom

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t) \mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) \mathrm{d}x.$$

Podobně můžeme formulovat i druhou větu o substituci, kterou známe pro neurčitý integrál.

Příklad.

Vypočtěte integrál
$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{2}+e^{-x}}\mathrm{d}x.$$

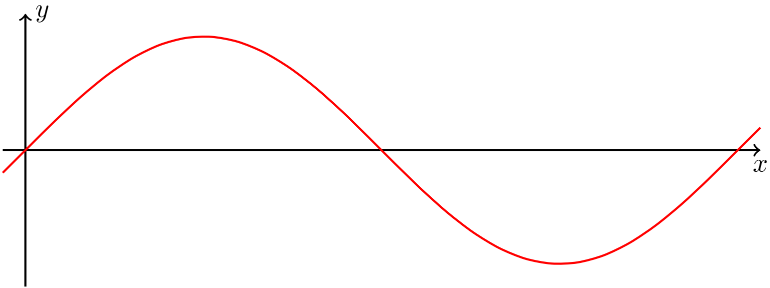
Použijeme substituci $y=\varphi(x)=\frac{1}{2}+e^{-x}$. Potom
$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{2}+e^{-x}}\mathrm{d}x = -\int_{3/2}^{1}\frac{1}{y}\mathrm{d}y = \Big[\ln|y|\Big]_1^{3/2} = \ln\frac{3}{2}.$$

Hlavní body

Poznámka:

Určitý integrál interpretujeme jako obsah plochy mezi grafem funkce a osou x. Ovšem tento obsah se počítá i se znaménkem:

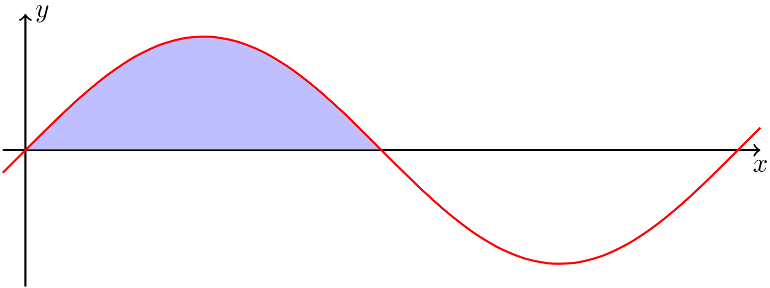
$$\int_0^{\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = 2, \quad \int_0^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = -2.$$



Poznámka:

Určitý integrál interpretujeme jako obsah plochy mezi grafem funkce a osou x. Ovšem tento obsah se počítá i se znaménkem:

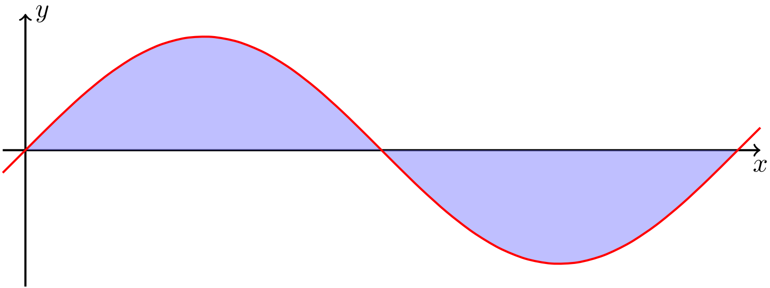
$$\int_0^\pi \sin(x)\mathrm{d}x = 2, \quad \int_0^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \int_\pi^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = -2.$$



Poznámka:

Určitý integrál interpretujeme jako obsah plochy mezi grafem funkce a osou x. Ovšem tento obsah se počítá i se znaménkem:

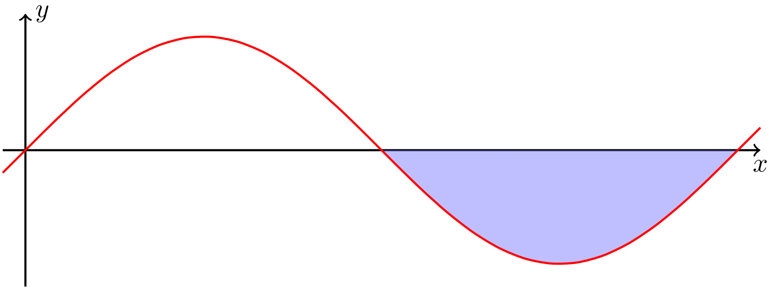
$$\int_0^\pi \sin(x)\mathrm{d}x = 2, \quad \int_0^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \int_\pi^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = -2.$$



Poznámka:

Určitý integrál interpretujeme jako obsah plochy mezi grafem funkce a osou x. Ovšem tento obsah se počítá i se znaménkem:

$$\int_0^\pi \sin(x)\mathrm{d}x = 2, \quad \int_0^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \int_\pi^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = -2.$$



Nespojité funkce

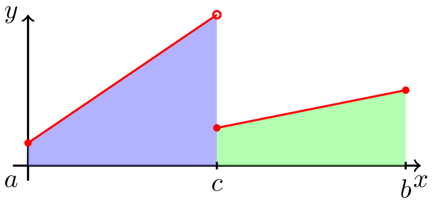
Poznámka:

Předpokládejme, že pro funkci f na intervalu $\langle a, b\rangle$ platí

- existuje $c \in (a, b)$ tak, že f je spojitá na $\langle a, c)$ i $(c, b\rangle$,
- existují jednostranné limity funkce f v bodě c.

Potom můžeme počítat její Riemannův integrál následujícím způsobem

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$



Příklad.

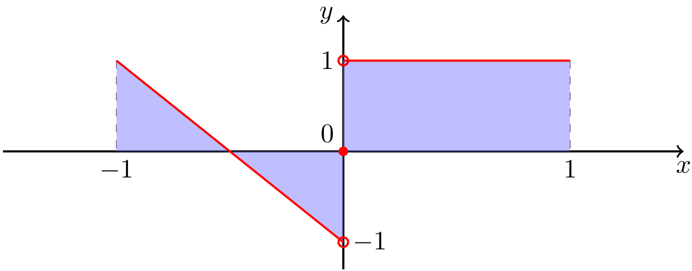
Vypočtěte integrál $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$, kde $f(x) = |x| - x + \operatorname{sgn}(x)$.

Funkce f není spojitá v bodě 0:

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to 0_-} f(x) = -1.$$

Takže

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (-2x-1)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} 1\mathrm{d}x = -\Big[x^2 + x\Big]_{-1}^{0} + 1 = 1.$$



Zobecněný Riemannův integrál

Definice:

Nechť f je funkce definovaná na intervalu $\langle a, b)$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ a $b \in (a, +\infty\rangle$, která je Riemannovsky integrabilní na intervalu $\langle a, c\rangle$ pro každé $c \in (a, b)$. Pokud existuje konečná limita

$$\lim_{c \to b_-} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

pak její hodnotu značíme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

nazýváme **zobecněným Riemannovým integrálem** funkce f na intervalu $\langle a, b)$ a říkáme, že integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

Zobecněný Riemannův integrál

Definice:

Nechť f je funkce definovaná na intervalu $\langle a, b)$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ a $b \in (a, +\infty\rangle$, která je Riemannovsky integrabilní na intervalu $\langle a, c\rangle$ pro každé $c \in (a, b)$. Pokud existuje konečná limita

$$\lim_{c \to b_-} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

pak její hodnotu značíme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

nazýváme **zobecněným Riemannovým integrálem** funkce f na intervalu $\langle a, b)$ a říkáme, že integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

- Pokud $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ konverguje, tak lze ukázat, že i $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. V takovém případě říkáme, že f má **absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál** na $\langle a, b)$.

Zobecněný Riemannův integrál

Definice:

Nechť f je funkce definovaná na intervalu $\langle a, b)$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ a $b \in (a, +\infty\rangle$, která je Riemannovsky integrabilní na intervalu $\langle a, c\rangle$ pro každé $c \in (a, b)$. Pokud existuje konečná limita

$$\lim_{c \to b_-} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

pak její hodnotu značíme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

nazýváme **zobecněným Riemannovým integrálem** funkce f na intervalu $\langle a, b)$ a říkáme, že integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

- Pokud $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ konverguje, tak lze ukázat, že i $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. V takovém případě říkáme, že f má **absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál** na $\langle a, b)$.
- Analogicky definujeme předchozí pojmy pro interval $(a, b\rangle$.

Zobecněný Riemannův integrál

- Předchozí definice je zajímavá, především, když $b = +\infty$, anebo když funkci v bodě b nejde spojitě dodefinovat.

Zobecněný Riemannův integrál

- Předchozí definice je zajímavá, především, když $b = +\infty$, anebo když funkci v bodě b nejde spojitě dodefinovat.

- Platí tedy např.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = \lim_{c \to +\infty} \int_1^c \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = \lim_{c \to +\infty} \left(-\frac{1}{c} + \frac{1}{1} \right) = 1$$

Zobecněný Riemannův integrál

- Předchozí definice je zajímavá, především, když $b = +\infty$, anebo když funkci v bodě b nejde spojitě dodefinovat.

- Platí tedy např.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = \lim_{c \to +\infty} \int_1^c \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = \lim_{c \to +\infty} \left(-\frac{1}{c} + \frac{1}{1} \right) = 1$$

a

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \lim_{c \to 0_+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \lim_{c \to 0_+} \left(2 - 2\sqrt{c}\right) = 2.$$

Zobecněný Riemannův integrál

- Předchozí definice je zajímavá, především, když $b = +\infty$, anebo když funkci v bodě b nejde spojitě dodefinovat.
- Platí tedy např.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = \lim_{c \to +\infty} \int_1^c \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x = \lim_{c \to +\infty} \left(-\frac{1}{c} + \frac{1}{1} \right) = 1$$

a

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \lim_{c \to 0_+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \lim_{c \to 0_+} \left(2 - 2\sqrt{c} \right) = 2.$$

- Dále se můžeme zabývat situací, kdy chceme dát smysl $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$. Zde se omezíme pouze na absolutně konvergentní případy pro spojité funkce.

Zobecněný Riemannův integrál

Definice:

Buď f spojitá funkce definovaná na $\mathbb{R}$. Pokud existuje konečná limita

$$\lim_{c \to +\infty} \int_{-c}^{c} |f(x)| \, \mathrm{d}x,$$

pak tuto její hodnotu značíme $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, \mathrm{d}x$ a o f říkáme, že má **absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál na $\mathbb{R}$**.

Zobecněný Riemannův integrál

Definice:

Buď f spojitá funkce definovaná na $\mathbb{R}$. Pokud existuje konečná limita

$$\lim_{c\to+\infty}\int_{-c}^{c}|f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

pak tuto její hodnotu značíme $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x$ a o f říkáme, že má **absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál na** $\mathbb{R}$.

- Pokud má funkce absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál na $\mathbb{R}$, pak i limita

$$\lim_{c\to+\infty}\int_{-c}^{c}f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{existuje a značíme ji} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

  Tuto hodnotu pak nazýváme **zobecněným Riemannovým interálem f na** $\mathbb{R}$.

Zobecněný Riemannův integrál

Definice:

Buď f spojitá funkce definovaná na $\mathbb{R}$. Pokud existuje konečná limita

$$\lim_{c \to +\infty} \int_{-c}^{c} |f(x)| \, \mathrm{d}x,$$

pak tuto její hodnotu značíme $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, \mathrm{d}x$ a o f říkáme, že má **absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál na** $\mathbb{R}$.

- Pokud má funkce absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál na $\mathbb{R}$, pak i limita

  $$\lim_{c \to +\infty} \int_{-c}^{c} f(x) \, \mathrm{d}x \quad \text{existuje a značíme ji} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x.$$

  Tuto hodnotu pak nazýváme **zobecněným Riemannovým interálem f na** $\mathbb{R}$.
- Absolutní konvergence zajišťuje, že hodnota zobecněného Riemannova integrálu nezávisí na způsobu jakým meze „posíláme“ do nekonečna.

Hlavní body

Využití symetrií funkce při integraci

Věta:

Nechť f je funkce spojitá na uvažovaných intervalech.

1. Je-li f sudá funkce na $\langle -a, a\rangle$, pak
$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$
2. Je-li f lichá funkce na $\langle -a, a\rangle$, pak
$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$
3. Je-li f periodická na $\mathbb{R}$ s periodou T, pak pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí
$$\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{b}^{b+T} f(x)\mathrm{d}x.$$

Důkaz.

1. Pomocí substituce $y = -x$ dostáváme
$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{0} f(-y)(-1)\mathrm{d}y = \int_{0}^{a} f(y)\mathrm{d}y.$$
2. Stejným způsobem jako v prvním bodě odvodíme
$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = -\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$
3. Pomocí substituce $y = x + T$ a periodicity f snadno nahlédneme, že

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x + \int_{b}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a+T}^{b+T} f(y)\mathrm{d}y + \int_{b}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x =$$
$$= \int_{b}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a+T}^{b+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{b}^{b+T} f(x)\mathrm{d}x.$$

□

Příklad.

Vypočítejte integrály

$$\int_{-2}^{2}(x^3+3x^2-x)\mathrm{d}x, \quad \int_{-1}^{1} xe^{x^2}\mathrm{d}x, \quad \int_{0}^{2\pi}|\sin x|\mathrm{d}x.$$

$$\int_{-2}^{2}(x^3+3x^2-x)\mathrm{d}x = 3\cdot 2\int_0^2 x^2\mathrm{d}x = 3\cdot 2\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 16.$$

$$\int_{-1}^{1} xe^{-x^2}\mathrm{d}x = 0.$$

V posledním případě je integrand funkce periodická s periodou π a navíc sudá, proto

$$\int_0^{2\pi}|\sin x|\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}|\sin x|\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x = 2\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = 4.$$