Základy matematické analýzy

Příklady a Landauova notace

Pavel Hrabák[1], Tomáš Kalvoda[2], Ivo Petr[3]

[1]pavel.hrabak@fit.cvut.cz [2]tomas.kalvoda@fit.cvut.cz, [3]ivo.petr@fit.cvut.cz,

Katedra aplikované matematiky
Fakulta informačních technologií
České vysoké učení technické v Praze

4. března 2021
ZS 2020/2021

Hlavní body

1. Obsahy plošných útvarů
2. Úvod do Landauovy symboliky
3. Odhadování rychlosti růstu součtů

Hlavní body

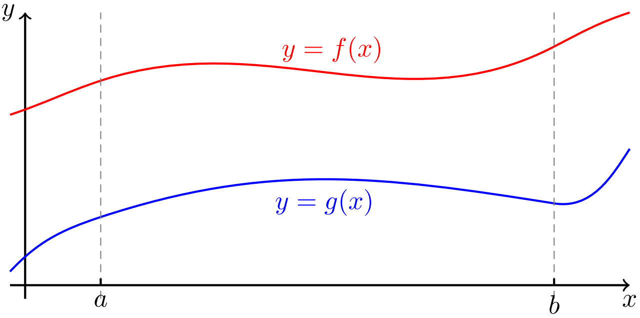
1. Obsahy plošných útvarů
2. Úvod do Landauovy symboliky
3. Odhadování rychlosti růstu součtů

Plocha útvaru ohraničeného dvěma funkcemi

Věta:

Nechť f a g jsou funkce spojité na $\langle a, b\rangle$ takové, že $f(x) \geq g(x)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$. Pak obsah plochy P ohraničené přímkami $x = a$ a $x = b$ a grafy funkcí f a g je rovna

$$P = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

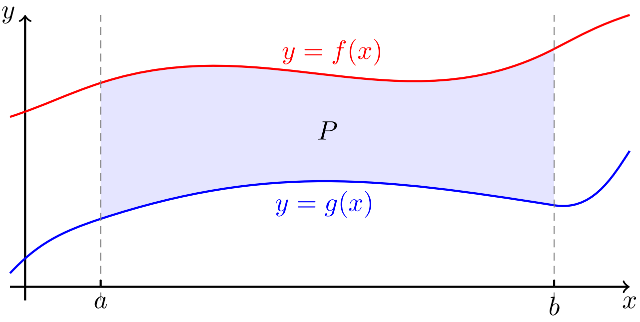


Plocha útvaru ohraničeného dvěma funkcemi

Věta:

Nechť f a g jsou funkce spojité na $\langle a, b\rangle$ takové, že $f(x) \geq g(x)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$. Pak obsah plochy P ohraničené přímkami $x = a$ a $x = b$ a grafy funkcí f a g je rovna

$$P = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$



Příklad

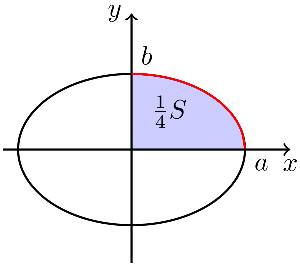
Příklad.

Vypočtěte obsah S elipsy s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b.

Příklad

Příklad.

Vypočtěte obsah S elipsy s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b.

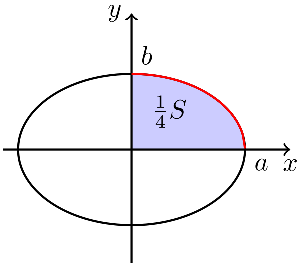


Příklad

Příklad.

Vypočtěte obsah S elipsy s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b.

Rovnice elipsy zní $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Vrchní oblouk elipsy je popsán funkcí $f(x) = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$, $D_f = \langle 0, a \rangle$.



Příklad

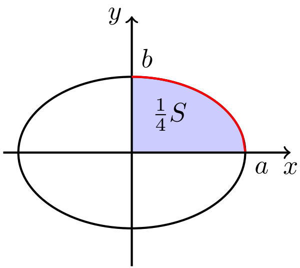
Příklad.

Vypočtěte obsah S elipsy s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b.

Rovnice elipsy zní $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Vrchní oblouk elipsy je popsán funkcí $f(x) = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$, $D_f = \langle 0, a \rangle$.

Tudíž, použijeme-li substituci $x = a \sin t$,

$$\frac{1}{4}S = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x = b\int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\mathrm{d}x =$$
$$= b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2(t)} \cdot a\cos(t)\mathrm{d}t =$$
$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}ab.$$



Dostáváme $S = \pi ab$.

Příklad

Příklad.

Spočítejte obsah plochy ohraničené křivkami $y = x^3$ a $y = x$.

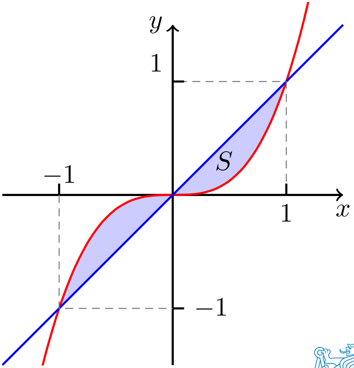
Příklad

Příklad.

Spočítejte obsah plochy ohraničené křivkami $y = x^3$ a $y = x$.

Nejprve nalezneme průsečíky grafů. Řešením rovnice $x^3 = x$ jsou $x = -1$, $x = 1$ a $x = 0$. Dostáváme proto průsečíky

$$(-1,-1),\ (1,1) \text{ a } (0,0).$$



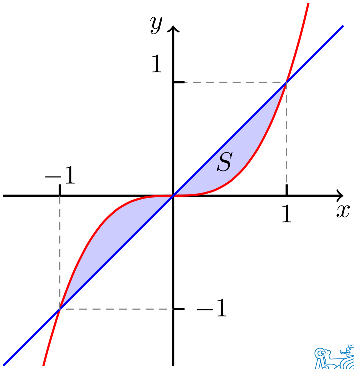
Příklad

Příklad.

Spočítejte obsah plochy ohraničené křivkami $y = x^3$ a $y = x$.

Nejprve nalezneme průsečíky grafů. Řešením rovnice $x^3 = x$ jsou $x = -1$, $x = 1$ a $x = 0$. Dostáváme proto průsečíky

$$(-1, -1),\ (1, 1) \text{ a } (0, 0).$$



Z náčrtku (resp. průběhu) je pak patrné, že obsah plochy je

$$S = 2\int_0^1 (x - x^3)\mathrm{d}x = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

Příklad

Příklad.

Nalezněte obsah plochy ohraničené křivkami

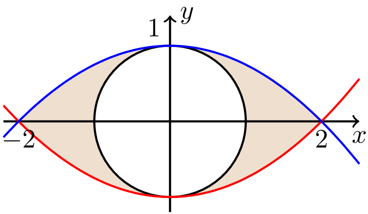
$$y = \frac{1}{4}x^2 - 1, \quad y = 1 - \frac{1}{4}x^2, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Příklad

Příklad.

Nalezněte obsah plochy ohraničené křivkami

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 1, \quad y = 1 - \frac{1}{4}x^2, \quad x^2 + y^2 = 1.$$



Obsah útvaru bez vyjmuté kružnice je

$$\int_{-2}^{2} \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right) - \left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right) \mathrm{d}x =$$

$$2\int_0^2 2 - \frac{1}{2}x^2 \mathrm{d}x = 2\left[2x - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{16}{3}.$$

Takže plocha našeho útvaru je

$$S = \frac{16}{3} - \pi.$$

Hlavní body

Landauova symbolika

Definice:

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou číselné posloupnosti. Řekneme, že

- $a_n \sim b_n$, právě když existuje posloupnost $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1 \quad \text{a} \quad a_n = \alpha_n b_n \quad \text{pro každé } n \geq n_0.$$

Landauova symbolika

Definice:

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou číselné posloupnosti. Řekneme, že

- $a_n \sim b_n$, právě když existuje posloupnost $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1 \quad \text{a} \quad a_n = \alpha_n b_n \quad \text{pro každé } n \geq n_0.$$

- $a_n = \mathcal{O}(b_n)$, právě když existuje konstanta $c > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|a_n| \leq c|b_n| \quad \text{pro všechna } n \geq n_0.$$

Landauova symbolika

Definice:

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou číselné posloupnosti. Řekneme, že

- $a_n \sim b_n$, právě když existuje posloupnost $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že
$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1 \quad \text{a} \quad a_n = \alpha_n b_n \quad \text{pro každé } n \geq n_0.$$
- $a_n = \mathcal{O}(b_n)$, právě když existuje konstanta $c > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že
$$|a_n| \leq c|b_n| \quad \text{pro všechna } n \geq n_0.$$

- $a_n \sim b_n$: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ se pro velká n chovají stejně, jsou **asymptoticky ekvivalentní**.
- $a_n = \mathcal{O}(b_n)$: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **asymptoticky omezená** posloupností $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.

Landauova symbolika

- Existují další symboly porovnávající další charakteristiky chování dvou posloupností. Podrobněji se jimi budete zabývat v BI-ZDM.

Landauova symbolika

- Existují další symboly porovnávající další charakteristiky chování dvou posloupností. Podrobněji se jimi budete zabývat v BI-ZDM.

Poznámka:

Pokud $b_n > 0$ pak lze definici přeformulovat do praktického tvaru

$$a_n \sim b_n \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$

$$a_n = \mathcal{O}(b_n) \quad \Leftrightarrow \quad \text{posloupnost } \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty} \text{ je omezená.}$$

Poznamenejme, že pokud existuje konečná limita $\lim a_n/b_n$, pak je posloupnost $(a_n/b_n)_{n=1}^{\infty}$ omezená.

Příklady

Příklad.

Platí

$$\begin{aligned} n^2 + \frac{1}{2}n - 1 \sim n^2, \\ 2n = \mathcal{O}(n^2), \\ n = \mathcal{O}(n^2), \\ 4n^2 = \mathcal{O}(n^2). \end{aligned}$$

Příklady

Příklad.

Platí

$$
\begin{aligned}
n^2 + \frac{1}{2}n - 1 &\sim n^2, \\
2n &= \mathcal{O}(n^2), \\
n &= \mathcal{O}(n^2), \\
4n^2 &= \mathcal{O}(n^2).
\end{aligned}
$$

- Zápis $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ není příliš šťastný. Lepší je ho chápat ve smyslu $a_n \in \mathcal{O}(b_n)$. Historicky se však ujal a používá se.

Příklady

Příklad.

Platí

$$\begin{aligned} n^2 + \frac{1}{2}n - 1 &\sim n^2, \\ 2n &= \mathcal{O}(n^2), \\ n &= \mathcal{O}(n^2), \\ 4n^2 &= \mathcal{O}(n^2). \end{aligned}$$

- Zápis $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ není příliš šťastný. Lepší je ho chápat ve smyslu $a_n \in \mathcal{O}(b_n)$. Historicky se však ujal a používá se.
- Například pokud $a_n = \mathcal{O}(n)$ a současně $b_n = \mathcal{O}(n)$, neplyne odtud, že $a_n = b_n$.

Příklady

Příklad.

Platí

$$
\begin{aligned}
n^2 + \frac{1}{2}n - 1 &\sim n^2, \\
2n &= \mathcal{O}(n^2), \\
n &= \mathcal{O}(n^2), \\
4n^2 &= \mathcal{O}(n^2).
\end{aligned}
$$

- Zápis $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ není příliš šťastný. Lepší je ho chápat ve smyslu $a_n \in \mathcal{O}(b_n)$. Historicky se však ujal a používá se.
- Například pokud $a_n = \mathcal{O}(n)$ a současně $b_n = \mathcal{O}(n)$, neplyne odtud, že $a_n = b_n$.
- Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je omezená, právě když $a_n = \mathcal{O}(1)$.

Hlavní body

Připomenutí známých součtů

Součty známých posloupností:

Připomenutí známých součtů

Součty známých posloupností:

- **aritmetická posloupnost** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tj. $a_n = a_1 + (n-1)d$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_1 + d \sum_{k=1}^{n} (k-1) = a_1 n + d \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Připomenutí známých součtů

Součty známých posloupností:

- **aritmetická posloupnost** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tj. $a_n = a_1 + (n-1)d$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_1 + d \sum_{k=1}^{n} (k-1) = a_1 n + d \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

- **geometrická posloupnost** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tj. $a_n = a_1 q^{n-1}$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1.$$

Připomenutí známých součtů

Součty známých posloupností:

- **aritmetická posloupnost** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tj. $a_n = a_1 + (n-1)d$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_1 + d \sum_{k=1}^{n} (k-1) = a_1 n + d \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

- **geometrická posloupnost** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, tj. $a_n = a_1 q^{n-1}$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_1 q^{k-1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1.$$

- Dále známe součty některých číselných řad. Například víme, že:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} = e^2, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \pi^{2k} = \cos(\pi) = -1, \quad \text{atp.}$$

Sčítání členů posloupností

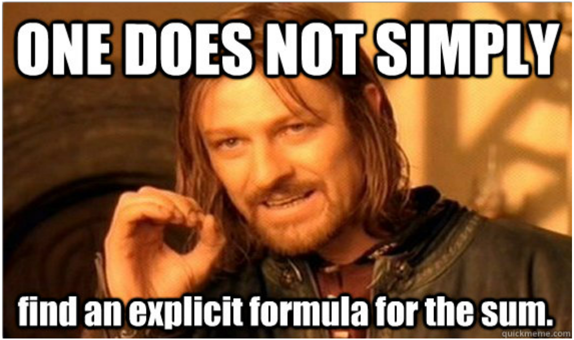
- Hledání explicitního vzorce pro daný součet je obecně komplikovaná a často neřešitelná úloha.

Sčítání členů posloupností

- Hledání explicitního vzorce pro daný součet je obecně komplikovaná a často neřešitelná úloha.
- Často nás ale přesný součet ani nezajímá, jde nám pouze o typické chování pro velká n. Tedy o tzv. asymptotické chování součtů.

Sčítání členů posloupností

- Hledání explicitního vzorce pro daný součet je obecně komplikovaná a často neřešitelná úloha.
- Často nás ale přesný součet ani nezajímá, jde nám pouze o typické chování pro velká n. Tedy o tzv. asymptotické chování součtů.



Odhadování rychlosti růstu různých součtů

Věta:

Nechť f je spojitá funkce na $\langle 1, +\infty)$ a $n \in \mathbb{N}$.

1. Je-li f klesající, pak

$$f(n) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Odhadování rychlosti růstu různých součtů

Věta:

Nechť f je spojitá funkce na $\langle 1, +\infty)$ a $n \in \mathbb{N}$.

1. Je-li f klesající, pak

$$f(n) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Je-li f rostoucí, pak

$$f(1) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(n) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Odhadování rychlosti růstu různých součtů

Důkaz pro f klesající.

Buď $k \in \mathbb{N}$, pak pro každé $x \in \langle k, k+1 \rangle$ platí $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$.

Odhadování rychlosti růstu různých součtů

Důkaz pro f klesající.

Buď $k \in \mathbb{N}$, pak pro každé $x \in \langle k, k+1 \rangle$ platí $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$.
Z věty o nerovnosti mezi integrály dostaneme nerovnost

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)\mathrm{d}x \leq \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_k^{k+1} f(k)\mathrm{d}x = f(k).$$

Odhadování rychlosti růstu různých součtů

Důkaz pro f klesající.

Buď $k \in \mathbb{N}$, pak pro každé $x \in \langle k, k+1 \rangle$ platí $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$.
Z věty o nerovnosti mezi integrály dostaneme nerovnost

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)\mathrm{d}x \leq \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_k^{k+1} f(k)\mathrm{d}x = f(k).$$

Sečtením nerovností pro $k = 1, 2, \ldots, n-1$ dostaneme

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Odhadování rychlosti růstu různých součtů

Důkaz pro f klesající.

Buď $k \in \mathbb{N}$, pak pro každé $x \in \langle k, k+1 \rangle$ platí $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$.
Z věty o nerovnosti mezi integrály dostaneme nerovnost

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)\mathrm{d}x \leq \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \leq \int_k^{k+1} f(k)\mathrm{d}x = f(k).$$

Sečtením nerovností pro $k = 1, 2, \ldots, n-1$ dostaneme

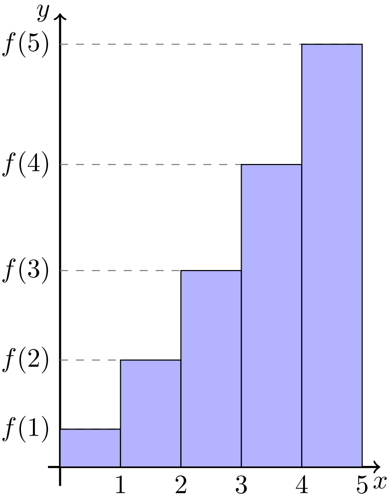
$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

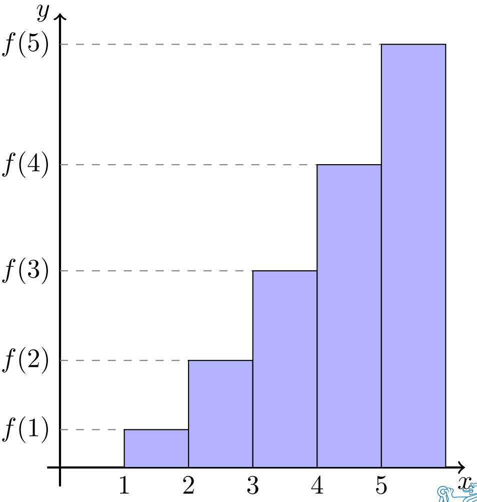
Odtud

$$f(n) + \int_1^n f(x)\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_1^n f(x)\mathrm{d}x.$$

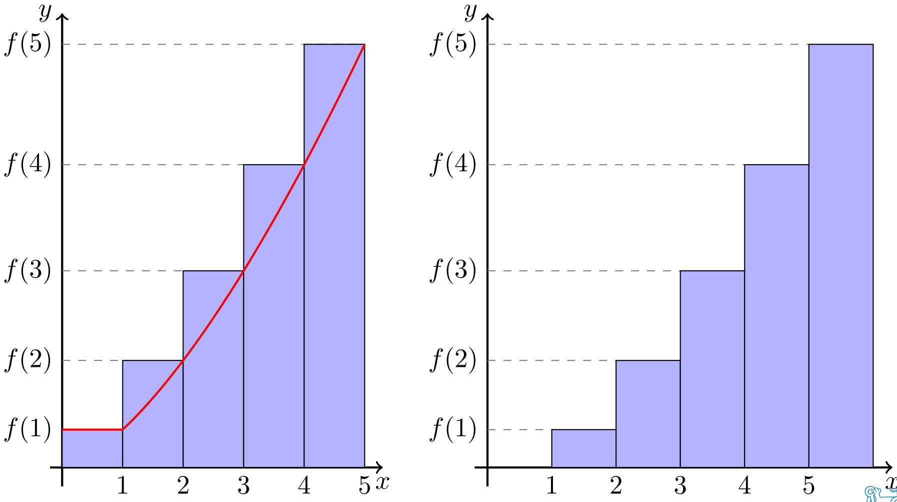
$\square$

Geometrická interpretace odhadu

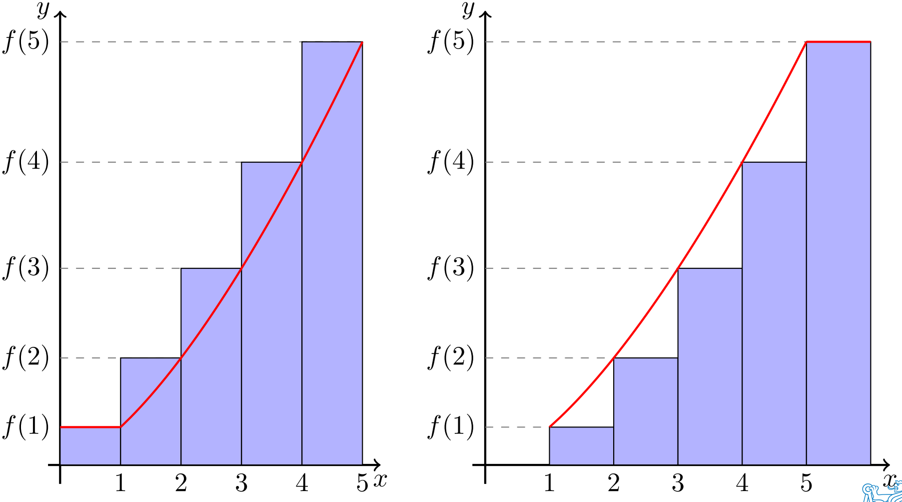




Geometrická interpretace odhadu



Geometrická interpretace odhadu



Příklad.

Pomocí odhadu odhadněte rychlost růstu posloupnosti

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Příklad.

Pomocí odhadu odhadněte rychlost růstu posloupnosti

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nyní $f(x) = x^2$ je rostoucí na $\langle 1, +\infty)$ a proto pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 + \int_1^n x^2 \, \mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} k^2 \leq n^2 + \int_1^n x^2 \mathrm{d}x.$$

Příklad.

Pomocí odhadu odhadněte rychlost růstu posloupnosti

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nyní $f(x) = x^2$ je rostoucí na $\langle 1, +\infty)$ a proto pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 + \int_1^n x^2 \, dx \le \sum_{k=1}^{n} k^2 \le n^2 + \int_1^n x^2 dx.$$

Tudíž

$$\frac{1}{3}n^3 + \frac{2}{3} \le a_n \le \frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}.$$

Příklad.

Pomocí odhadu odhadněte rychlost růstu posloupnosti

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nyní $f(x) = x^2$ je rostoucí na $\langle 1, +\infty)$ a proto pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$1 + \int_1^n x^2 \, \mathrm{d}x \le \sum_{k=1}^{n} k^2 \le n^2 + \int_1^n x^2 \mathrm{d}x.$$

Tudíž

$$\frac{1}{3}n^3 + \frac{2}{3} \le a_n \le \frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}.$$

Pro velká n je největším členem $\frac{1}{3}n^3$, přesněji

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{3}n^3} = 1, \quad \text{tj.} \quad a_n \sim \frac{1}{3}n^3.$$

Příklad.

Určete rychlost růstu posloupnosti $(n!)_{n=1}^{\infty}$.

Příklad.

Určete rychlost růstu posloupnosti $(n!)_{n=1}^{\infty}$.

Využijme šikovné úpravy

$$\ln n! = \sum_{k=1}^{n} \ln k.$$

Funkce $f(x) = \ln x$ je rostoucí na $\langle 1, +\infty)$ a proto

$$0 + \int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x \le \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \le \ln(n) + \int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

Primitivní funkcí F k funkci f je funkce $F(x) = x\ln(x) - x + C$, tudíž

$$n\ln(n) - n + 1 \le \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \le \ln(n) + n\ln(n) - n + 1.$$

Odlogaritmováním (monotonie e^x) poslední nerovnosti pak dostáváme

$$e^{n\ln(n)-n+1} \leq n! \leq e^{\ln(n)+n\ln(n)-n+1}$$

a po úpravě

$$e \cdot \frac{n^n}{e^n} \leq n! \leq en \cdot \frac{n^n}{e^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Neboli $n! = \mathcal{O}(n^{n+1}/e^n)$.

Odlogaritmováním (monotonie e^x) poslední nerovnosti pak dostáváme

$$e^{n\ln(n)-n+1} \leq n! \leq e^{\ln(n)+n\ln(n)-n+1}$$

a po úpravě

$$e\cdot\frac{n^n}{e^n} \leq n! \leq en\cdot\frac{n^n}{e^n}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Neboli $n! = \mathcal{O}(n^{n+1}/e^n)$.

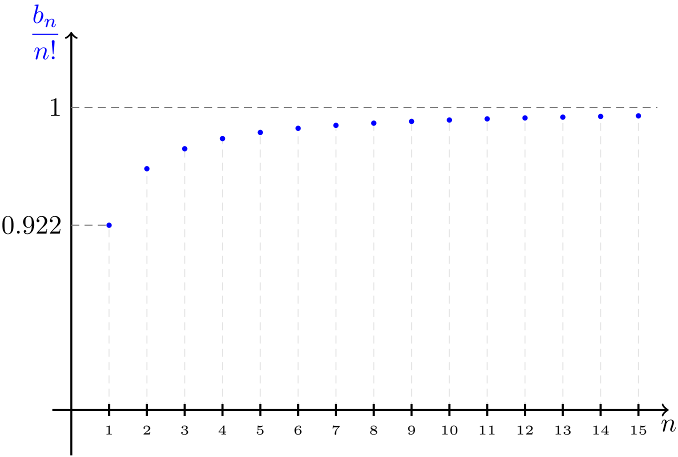
Poznámka:

Tento odhad už je pro většinu aplikací dostatečný. Lze ho však ještě dále zlepšovat. Všimněte, že na rozdíl od předchozího příkladu nám nyní nedává posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ takovou, že

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{b_n} = 1.$$

Získání takovéto posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ vyžaduje další práci. Pro úplnost uveďme, že tuto vlastnost má například (tzv. **Stirlingův vzorec**)

$$b_n = \sqrt{2\pi n}\cdot\frac{n^n}{e^n} \sim n!.$$



$$b_n = \sqrt{2\pi n} \cdot \frac{n^n}{e^n}$$

Harmonická čísla

Příklad.

Již víme, že

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Odhadněme nyní **jak rychle** se $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ blíží k nekonečnu s rostoucím n.

Harmonická čísla

Příklad.

Již víme, že

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Odhadněme nyní **jak rychle** se $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ blíží k nekonečnu s rostoucím n.

Podle předchozí věty, pro $f(x) = \frac{1}{x}$ klesající na $\langle 1, +\infty)$ dostáváme odhad

$$\frac{1}{n} + \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \;\le\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Po integraci

$$\frac{1}{n} + \ln(n) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le 1 + \ln(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Harmonická čísla: znovu a podrobněji

Poznámka:

Opět máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} = 1, \quad \text{tj.} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n.$$

Dále si povšimněte, že

$$\frac{1}{n} \ \leq \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \ \leq \ 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

O posloupnosti $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right)$ lze ukázat, že je klesající a tudíž má limitu.

Tato limita se označuje γ a nazývá se **Eulerova–Mascheroniova konstanta**. Její přibližná hodnota je $\gamma = 0{,}577218\ldots$

Příklad.

Kolikrát se zavolá funkce `doSomething()` v následujícím příkladě?

```
for (i = 0; i < n; i++) {
  j = 1;
  while ( j < i ) {
    doSomething();
    j = j * 2;
  }
}
```

Příklad.

Kolikrát se zavolá funkce `doSomething()` v následujícím příkladě?

```
for (i = 0; i < n; i++) {
  j = 1;
  while ( j < i ) {
    doSomething();
    j = j * 2;
  }
}
```

- Přesný počet volání: $\sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil$.

Příklad.

Kolikrát se zavolá funkce `doSomething()` v následujícím příkladě?

```
for (i = 0; i < n; i++) {
  j = 1;
  while ( j < i ) {
    doSomething();
    j = j * 2;
  }
}
```

- Přesný počet volání: $\sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil$.
- Hrubý odhad:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \leq \sum_{i=1}^{n-1} \big(\log_2 i + 1 \big) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \big(\log_2 (n-1) + 1 \big) =$$

$$= (n-1)\big(1 + \log_2 (n-1)\big) \leq n(1 + \log_2 n) = \mathcal{O}(n \log_2 n).$$

- Jemný odhad: jistě platí

$$\sum_{i=1}^{n-1} \log_2 i \leq \sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \leq \sum_{i=1}^{n-1} 1 + \log_2 i$$

- Jemný odhad: jistě platí

$$\sum_{i=1}^{n-1} \log_2 i \leq \sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \leq \sum_{i=1}^{n-1} 1 + \log_2 i$$

a tudíž

$$0 + \int_1^{n-1} \log_2 x \, \mathrm{d}x \leq \sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \leq 1 + \log_2(n-1) + \int_1^{n-1} \big(1 + \log_2 x\big) \, \mathrm{d}x.$$

- Jemný odhad: jistě platí

$$\sum_{i=1}^{n-1} \log_2 i \leq \sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \leq \sum_{i=1}^{n-1} 1 + \log_2 i$$

a tudíž

$$0 + \int_1^{n-1} \log_2 x \, \mathrm{d}x \leq \sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \leq 1 + \log_2(n-1) + \int_1^{n-1} \big(1 + \log_2 x\big) \, \mathrm{d}x.$$

Protože ale

$$\int_1^{n-1} \log_2 x \, \mathrm{d}x = (n-1) \log_2(n-1) - \frac{n-1}{\ln 2},$$

- Jemný odhad: jistě platí

$$\sum_{i=1}^{n-1} \log_2 i \leq \sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \leq \sum_{i=1}^{n-1} 1 + \log_2 i$$

a tudíž

$$0 + \int_1^{n-1} \log_2 x \,\mathrm{d}x \leq \sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \leq 1 + \log_2(n-1) + \int_1^{n-1} \big(1 + \log_2 x\big) \,\mathrm{d}x.$$

Protože ale

$$\int_1^{n-1} \log_2 x \,\mathrm{d}x = (n-1)\log_2(n-1) - \frac{n-1}{\ln 2},$$

dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lceil \log_2 i \rceil \sim n \log_2 n.$$

Integrální kritérium

Z předcházejících odhadů sum pomocí integrálů je patrné, že platí následující věta.

Integrální kritérium

Z předcházejících odhadů sum pomocí integrálů je patrné, že platí následující věta.

Věta:

Buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ číselná řada s kladnými členy. Nechť existuje spojitá a monotónní funkce definovaná na $\langle 0, +\infty)$ taková, že $f(n) = a_n$ pro každé n. Potom:

Integrální kritérium

Z předcházejících odhadů sum pomocí integrálů je patrné, že platí následující věta.

Věta:

Buď $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ číselná řada s kladnými členy. Nechť existuje spojitá a monotónní funkce definovaná na $\langle 0, +\infty)$ taková, že $f(n) = a_n$ pro každé n. Potom:

- Pokud integrál $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, pak číselná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Integrální kritérium

Z předcházejících odhadů sum pomocí integrálů je patrné, že platí následující věta.

Věta:

Buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ číselná řada s kladnými členy. Nechť existuje spojitá a monotónní funkce definovaná na $\langle 0, +\infty)$ taková, že $f(n) = a_n$ pro každé n. Potom:

- Pokud integrál $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, pak číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
- Pokud integrál $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje, pak číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Příklad.

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}$ konverguje pro $\alpha < -1$ a diverguje pro $\alpha \geq -1$.

Příklad.

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}$ konverguje pro $\alpha < -1$ a diverguje pro $\alpha \geq -1$.

Protože

$$\int_1^n x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1},\ \alpha \neq -1, \quad \text{a} \quad \int_1^n x^{-1}\mathrm{d}x = \ln n$$

platí

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^n x^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{-1-\alpha}, \quad \alpha < -1,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^n x^{\alpha}\mathrm{d}x = +\infty, \quad \alpha \geq -1.$$