Základy matematické analýzy

Tomáš Kalvoda[1]

KAM FIT ČVUT

Daniel Vašata[2]

KAM FIT ČVUT

Zimní semestr 2019/2020, 16. ledna 2021

[1] tomas.kalvoda@fit.cvut.cz
[2] daniel.vasata@fit.cvut.cz

Vysázeno pomocí LaTeX
Zdroj připraven pomocí WooWoo verze 0.2.10
zdrojový kód a hlášení chyb
Tomáš Kalvoda, KAM FIT ČVUT, 2017–2019

Obsah

1 Úvod

Tento dokument doplňuje slidy k přednášce předmětu Základy matematické analýzy (BI-ZMA). Slidy slouží primárně jako doplněk k prezentaci a příliš se nehodí ke studiu či tisku. Slidy zejména neobsahují vysvětlující komentáře přednášejícího a mohou být proto bez těchto podpůrných informací nejasné až matoucí. V tomto textu je uvedeno vše co na slidech, navíc s dalšími dodatečnými informacemi.

Na tomto místě je vhodné seznámit čtenáře s historií výuky matematické analýzy na FIT. Předmět BI-ZMA byl po zrodu fakulty nejprve vyučován pod vedením prof. Ing. Edity Pelantové, CSc. (KM FJFI). Poté předmět převzali Ing. Tomáš Kalvoda, PhD. a doc. RNDr. Jaroslav Milota, CSc. V aktuálním semestru je druhým přednášejícím Ing. Pavel Hrabák, Ph.D. a třetím přednášejícím Ing. Ivo Petr, Ph.D. Tento text, a pojetí přednášky vůbec, jsou výsledkem tohoto postupného vývoje.

Pro větší přehlednost a zvýraznění logické struktury látky je tento text standardně členěn do definic, vět, důkazů a příkladů. Definice a věty jsou číslovány průběžně v celém dokumentu. Připomeňme čtenáři význam takto označených částí textu.

- *Definice* ukotvuje definovaný pojem. V celém textu má od tohoto okamžiku daný pojem jednoznačný význam (porovnejte s definicí funkce ve zdrojovém kódu).
- *Věta* (případně *Tvrzení*, *Důsledek*, *Lemma*) obsahuje tvrzení o již dříve definovaných pojmech.
- *Důkaz* je argument postavený na logických pravidlech zaručující pravdivost dané věty (tvrzení, důsledku či lemmatu). Jde v podstatě o certifikát pravdivosti.

Rovnice a obrázky jsou v textu číslovány v rámci kapitol. Odkaz na rovnici poznáte podle závorek, např. (2.1) je první číslovaná rovnice v druhé kapitole. Konec důkazu označujeme symbolem $\square$. Na konci tohoto dokumentu je čtenáři k dispozici seznam používaných symbolů se stručným vysvětlením významu, rejstřík pojmů pro pohodlnější vyhledávání a seznam zajímavých odkazů na literaturu.

Informace týkající se organizace předmětu, jako například podmínky získání zápočtu a složení zkoušky, jsou uvedeny na oficiálních stránkách předmětu BI-ZMA. Studentům je dále k dispozici elektronická cvičebnice příkladů MARAST.

Pokud laskavý čtenář v textu objeví nejasnosti či chyby, nechť je prosím hlásí jednomu z autorů emailem (tomas.kalvoda@fit.cvut.cz). Alternativně k tomuto účelu můžete využít BI-ZMA repozitář na fakultním gitlabu.

2 Základní pojmy

V tomto kurzu předpokládáme, že čtenář je již seznámen se základními způsoby zadání množin (výčtem, vlastností), množinovými operacemi (průnik, sjednocení, rozdíl a doplněk) a orientuje se mezi číselnými množinami (přirozená, celá, racionální a reálná čísla – těm se ale v této kapitole budeme věnovat znovu a podrobněji). Dále na straně čtenáře předpokládáme znalost vlastností elementárních funkcí (polynomiální, racionální, mocninné, exponenciální, logaritmické a trigonometrické). V neposlední řadě též vyžadujeme znalost základních kombinatorických vztahů, to jest definici a kombinatorický význam faktoriálu, kombinačního čísla, či binomické věty.

Pokud si čtenář v některých z těchto zmíněných partiích není jistý, může si znalosti osvěžit například v prázdninovém Přípravném kurzu matematiky (BI-PKM), nebo s pomocí své oblíbené učebnice středoškolské matematiky.

O Matematické analýze bylo napsáno již mnoho učebnic, skript a knih s rozmanitými přístupy k problematice a různé úrovně. Případným zájemcům o další studium, či alternativní způsob výkladu, lze doporučit publikace [1] a [2]. Ze zahraniční literatury by našeho čtenáře mohly zaujmout knížky [4] či [3]. Tyto učebnice ovšem pokrývají podstatně více látky než tento text. Zájemce o motivačně bohatý text pokrývající i historické detaily lze doporučit vynikající knížku [5].

2.1 Množina reálných čísel

Nejprve se budeme zabývat množinou reálných čísel, která v našem výkladu matematické analýzy představuje ústřední pojem. V průběhu semestru budeme totiž studovat

- reálné číselné posloupnosti,
- reálné číselné řady,
- reálné funkce jedné reálné proměnné.

Je tedy očividné, že znalost vlastností množiny reálných čísel budeme intenzivně využívat. Množinu reálných čísel nejprve představíme jako přirozené rozšíření množiny racionálních čísel.

Přirozená, celá a racionální čísla

Označme $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ množinu přirozených čísel, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ množinu celých čísel a $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \text{ a } p, q \text{ jsou nesoudělná}\right\}$ množinu racionálních čísel. Na těchto množinách, které jsou v množinovém vztahu $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, umíme přirozeně sčítat a násobit, přičemž všechny tři množiny jsou vůči těmto operacím *uzavřené*[1]. Tyto operace dále pro každé

[1]To znamená, že výsledek operace nad čísly z dané množiny je opět číslo z této množiny.

$a, b, c \in \mathbb{Q}$ (nebo $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$) splňují:

$$\begin{aligned} a + b &= b + a, & a \cdot b &= b \cdot a, && \text{(komutativita)}, \\ a + (b + c) &= (a + b) + c, & a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c, && \text{(asociativita)}, \\ a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c), & & && \text{(distributivita)}. \end{aligned}$$

V souladu se zažitou konvencí zavádíme přednost násobení před sčítáním a distributivitu proto bez nebezpečí nedorozumnění můžeme zkráceně zapsat také bez uzávorkovaní na pravé straně, tedy

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Poznámka 2.1: Priorita operací je v programovacích jazycích známa pod termínem *operator precedence*. Viz např. prioritu operátorů v jazyce C. Uvědomte si, že bez zavedení této konvence například výraz $3 \cdot 5 + 7$ nemá smysl – nelze ho jednoznačně interpretovat. Tento postřeh není vázán pouze na sčítání a násobení reálných čísel.

Inverzními (opačnými) operacemi ke sčítání a násobení jsou odčítání a dělení nenulovým číslem. Vůči nim však nejsou všechny výše uvedené množiny uzavřené. Jak už víme, přirozená čísla můžeme bez omezení pouze sčítat a násobit aniž bychom množinu přirozených čísel opustili. Celá čísla můžeme bez omezení navíc odčítat a racionální čísla odčítat a dělit jakýmkoli nenulovým racionálním číslem. Znamená to tedy, že v $\mathbb{Z}$ můžeme (jednoznačně) řešit rovnice typu

$$a + x = b, \quad a, b \in \mathbb{Z},$$

pro neznámou $x \in \mathbb{Z}$. Toto nelze říct o množině přirozených čísel (rovnice $x + 5 = 3$ pro neznámou x nemá mezi přirozenými čísly řešení). Podobně v $\mathbb{Q}$ můžeme řešit rovnice typu

$$q \cdot x = p, \quad p, q \in \mathbb{Q}, \ q \neq 0,$$

pro neznámou $x \in \mathbb{Q}$. Toto tvrzení ale neplatí o celých číslech (rovnice $4x = 5$ nemá celočíselné řešení x).

Poznámka 2.2 (Co to všechno znamená?)**:** Za tímto rozšiřováním číselných množin je možné vidět praktickou potřebu popisu stále sofistikovanějších reálných situací. Přirozená čísla nám postačí k popisu počtu stejných objektů (deset krav, jeden vlk atp.). V jejich rámci už ale snadno nevyjádříme např. koncept „dluhu“. Tento problém odstraňují celá čísla. Pomocí celých čísel ale nejsme jednoduše schopni popisovat části celků (půl koláče, tři pětiny senátu atp.). Tento nedostatek odstraňují racionální čísla. S jejich pomocí můžeme snadno pracovat se zlomky (částmi) celků.

Podívejme se nyní podrobněji na algebraickou[2] strukturu racionálních čísel. Mezi racionálními čísly existují čísla 0 (nula) a 1 (jedna) splňující

$$a + 0 = a \quad \text{a} \quad a \cdot 1 = a,$$

pro každé $a \in \mathbb{Q}$. Dále ke každému $a \in \mathbb{Q}$ existuje číslo $-a \in \mathbb{Q}$ splňující $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Podobně, ke každému nenulovému číslu $a \in \mathbb{Q}$ existuje číslo $a^{-1} \in \mathbb{Q}$ splňující $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

V předchozích odstavcích jsme si ukázali, že množina racionálních čísel spolu s operacemi sčítání a násobení splňuje asociativní, distributivní a komutativní zákony, existují v ní prvky 0 a 1

[2] Tj. co se sčítání/odčítání a násobení/dělení týče.

a opačné, resp. inverzní, prvky popsané výše. To znamená, že racionální čísla spolu s operacemi sčítání a násobení tvoří tzv. **číselné těleso**[3].

Otázka 1: Tvoří přirozená čísla spolu s operacemi sčítání a násobení těleso? A jak je tomu v případě celých čísel?

Uspořádání racionálních čísel

Vraťme se zpět k racionálním číslům. Vedle výše zmíněných algebraických vlastností mají racionální čísla další zajímavé vlastnosti. Racionální čísla lze porovnávat podle velikosti. Jsou-li a, b racionální čísla, pak zápisem $a < b$ vyjadřujeme, že číslo a je (ostře) menší než číslo b, a tuto vlastnost definujeme jako

$$a < b, \quad \text{právě když} \quad 0 < b - a, \tag{2.1}$$

přičemž pro racionální číslo $c = b - a$ zapsané v základním tvaru jako $c = \frac{p}{q}$ platí $c > 0$, právě když $p, q \in \mathbb{N}$ (čitatel i jmenovatel jsou kladná přirozená čísla). Takto zavedené porovnání (označované symbolem $<$) představuje relaci[4] (ostrého) „uspořádaní“ na $\mathbb{Q}$, která je „úplná“, tj. pro libovolná dvě různá racionální čísla a a b lze rozhodnout, zda li $a < b$ nebo $b < a$. Když $b < a$ tak říkáme, že a je (ostře) větší než b a zapisujeme $a > b$.

Relace uspořádání $<$ je svázána s operací sčítání a násobení známými středoškolskými pravidly pro počítání s nerovnicemi. Připomeňme, že pro každé $a, b, c \in \mathbb{Q}$ platí tvrzení

$$a < b \quad \Rightarrow \quad a + c < b + c,$$

a

$$a > 0 \wedge b > 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot b > 0. \tag{2.2}$$

Symbol $\Rightarrow$ označuje **implikaci**, která vyjadřuje: „Jestliže jsou splněny podmínky vlevo od šipky, pak platí tvrzení vpravo od šipky.“ Z těchto vlastností lze snadno odvodit další známé vztahy jako například

$$(a < b \wedge c > 0) \quad \Rightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c$$

a

$$(a < b \wedge c < 0) \quad \Rightarrow \quad a \cdot c > b \cdot c$$

platné pro každé racionální a, b, c. Vzpomeňte si na středoškolské úlohy na řešení nerovnic.

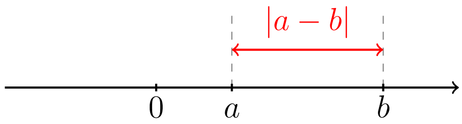
Otázka 2: Pomocí výše definovaného uspořádání $<$ na množině racionálních čísel (viz rovnici (2.1)) dokažte implikaci (2.2).

Poznámka 2.3: Pomocí uspořádání $<$ můžeme zavést také (neostré) uspořádání $a \leq b$, ekvivalentní platnosti $a < b$ nebo $a = b$. Pod $a \geq b$ máme pak přirozeně na mysli $b \leq a$.

Díky konceptu úplného uspořádání si můžeme racionální čísla geometricky představovat jako **body** na číselné ose, viz obrázek č. 2.1. Skutečně, protože umíme každé racionální číslo porovnat s každým jiným racionálním číslem, můžeme je tímto způsobem na přímce uspořádat. Bez tohoto úplného uspořádání bychom k takovémuto lineárnímu znázornění racionálních čísel neměli žádný důvod.

[3]Více se o číselných tělesech dozvíte v předmětu BI-LIN. Pro aplikace v počítačové bezpečnosti (kryptologii, šifrování) mají velký význam zvláště konečná tělesa. Tj. tělesa s konečným počtem prvků. $\mathbb{Q}$ je těleso s nekonečným počtem prvků.

[4]Pojem relace nebudeme v tento okamžik formálně zavádět, zmíníme se o něm později v kapitole o složitosti třídících algoritmů. Intuitivně ji chápame jako jistý vztah mezi dvěma objekty, v tomto případě racionálními čísly.



Obrázek 2.1: Číselná osa s body $a, b \in \mathbb{Q}$. Zde $a < b$ a tudíž $|a-b| = b-a$.

Vzdálenost racionálních čísel

Uspořádání racionálních čísel nám dále umožňuje definovat veledůležitý pojem vzdálenosti mezi racionálními čísly. **Vzdálenost** dvou racionálních čísel a a b definujeme pomocí absolutní hodnoty výrazem $|a-b|$, kde $|\cdot|$ je **absolutní hodnota** definovaná vztahem

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{pro } x \geq 0, \\ -x, & \text{pro } x < 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Tento zápis je třeba číst takto: hodnota $|x|$ je definována jako x pokud x je nezáporné a jako $-x$ pokud x je záporné. Způsob zápisu použitý v rovnici (2.3) je poměrně častý a ještě na něj několikrát narazíme. V oblíbeném programovacím jazyce Python bychom například psali

```
def abs(x):
  if x >= 0:
    return x
  elif x < 0:
    return -x
```

Z obecně známých vlastností[5] absolutní hodnoty připomeňme jenom veledůležitou **trojúhelníkovou nerovnost**

$$|a+b| \leq |a| + |b|, \tag{2.4}$$

platící pro každé racionální a, b.

Důkaz trojúhelníkové nerovnosti. Přímo z definice absolutní hodnoty (2.3) plynou nerovnosti $x \leq |x|$ a $-x \leq |x|$ platné pro libovolné $x \in \mathbb{R}$. Uvažme libovolné $a, b \in \mathbb{R}$. Pokud $a+b \geq 0$ potom $|a+b| = a+b \leq |a| + |b|$. Je-li $a+b < 0$ potom $|a+b| = -(a+b) = -a + (-b) \leq |a| + |b|$. □

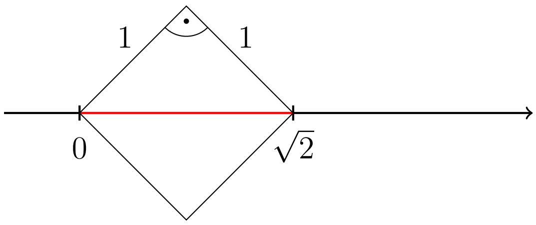
Neúplnost racionálních čísel

Jak již bylo zmíněno, racionální čísla obvykle graficky znázorňujeme jako body na tzv. **číselné ose**, tj. na přímce s vyznačeným počátkem odpovídajícím číslu 0. Na obrázku č. 2.1 je tímto způsobem znázorněno uspořádání dvou racionálních čísel a jejich vzdálenost.

V tomto geometrickém znázornění racionálních čísel je každému racionálnímu číslu přiřazen jeden bod na číselné ose. Opak však *neplatí.* Existují body na této idealizované přímce[6], které neodpovídají žádnému racionálnímu číslu. Pokud by číselná osa byla tvořena pouze racionálními čísly, byla by „děravá“. Ilustrujme toto tvrzení na následujícím příkladu.

[5] Např. snadno z definice odvoditelné $|-a| = |a|$, $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, atp.

[6] Pojem bodu na číselné ose zde chápeme intuitivně. Korektní matematická definice již ve skutečnosti využívá reálných čísel.



Obrázek 2.2: Bod na **číselné ose** odpovídající $\sqrt{2}$ lze zjevně zkonstruovat pomocí úhlopříčky čtverce o straně délky 1. Lze ho ale *popsat* pomocí racionálního čísla?

Příklad 2.4: Neexistuje kladné racionální řešení rovnice $x^2 = 2$. Graficky toto tvrzení odpovídá nemožnosti popsat bod odpovídající konci úhlopříčky čtverce o straně s velikostí 1 otočeného o $45°$ pomocí racionálního čísla, viz obrázek č. 2.2.

Dokažme toto tvrzení **sporem**. Předpokládejme opak, tj. že existují $p, q \in \mathbb{N}$, nesoudělná a splňující $(p/q)^2 = 2$. Pak p^2 $(= 2q^2)$ je nutně sudé číslo a tedy i p je sudé. Lze ho proto vyjádřit ve tvaru $p = 2k$, kde $k \in \mathbb{N}$. Potom ale $p^2 = 4k^2 = 2q^2$ a q^2 i q jsou sudá čísla. To ale znamená, že p, q jsou soudělná (obě jsou dělitelná číslem 2), což je ale spor s naším předpokladem nesoudělnosti p a q.

Axiom úplnosti

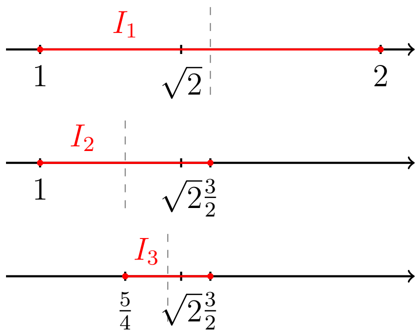
Nyní ukážeme jak obecně zformulovat požadavek „bezděrovosti“ číselné osy. Předpokládejme, že máme množinu $\mathbb{R}$, která obsahuje racionální čísla, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, a máme na ní definované operace násobení, sčítání, jejich inverze (odčítání a dělení) a také uspořádání $<$ a všechny tyto operace mají *stejné* vlastnosti, jako u racionálních čísel (tj. jedná se o **úplně uspořádané číselné těleso**, viz výše).

Pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, označme $\langle a, b\rangle := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ a nazvěme tuto množinu **uzavřeným intervalem** a body a, b koncovými body tohoto intervalu. **Délkou intervalu** $\langle a, b\rangle$ nazýváme číslo $|b - a|$, tj. vzdálenost jeho koncových bodů. Z vlastností absolutní hodnoty, které jsou stejné jako pro racionální čísla, plyne nerovnost $|x - y| \leq |b - a|$ platná pro každé $x, y \in \langle a, b\rangle$.

Předpokládejme nyní, že $\mathbb{R}$ již obsahuje kladné řešení rovnice $x^2 = 2$, které označíme $\sqrt{2}$. Pro $\sqrt{2}$ musí platit $\sqrt{2} \in \langle 1, 2\rangle = I_1$ (protože $a < 1$ implikuje $a^2 < a \cdot 1 < 1$ a $a > 2$ implikuje $a^2 > a \cdot 2 > 2$), tudíž pro $\sqrt{2}$ nemůže platit ani $\sqrt{2} < 1$ ani $\sqrt{2} > 2$). Rozpůlením I_1 podobným způsobem zjistíme, že $\sqrt{2} \in \langle 1, \frac{3}{2}\rangle = I_2$ (protože $a > 3/2$ implikuje $a^2 > 9/4 > 2$). Pokračujeme nadále půlením těchto uzavřených intervalů. Protože takto konstruované koncové body jsou vždy racionální čísla a $\sqrt{2}$ racionální není, nikdy se nestane, že by po nějakém dělení byl bod $\sqrt{2}$ koncovým bodem intervalu, a postup tak lze libovolně opakovat. Dostáváme tudíž intervaly I_n, $n \in \mathbb{N}$, uvnitř kterých musí ležet $\sqrt{2}$. Pro tyto intervaly platí inkluze $I_{n+1} \subset I_n$ a délka intervalu I_n je $\frac{1}{2^{n-1}}$. Tudíž $\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n$ je nejvýše jednoprvková množina. Opravdu, pro každé 2 různé body, mezi nimiž je nutně vzdálenost $d > 0$, existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že délka intervalu I_m je menší než d, a nemohou tedy oba současně patřit do I_m a tedy ani do průniku. Náš požadavek $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ v tomto případě znamená, že

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = \left\{\sqrt{2}\right\}.$$

Grafickou ilustraci konstrukce těchto intervalů lze nalézt na obrázku č. 2.3.



Obrázek 2.3: Ilustrace ke konstrukci intervalů I_1, I_2 a I_3 obsahujících $\sqrt{2}$ s racionálními koncovými body.

Obecný požadavek aby množina $\mathbb{R}$ „neměla díry“ můžeme nyní přesně formulovat jako tzv. **axiom úplnosti**: *Každý systém uzavřených a do sebe se vnořujících intervalů, jejichž délky jsou libovolně malé, má neprázdný průnik.* Podrobněji, pokud jsou I_n, $n = \mathbb{N}$, uzavřené intervaly splňující

1. $I_n \supset I_{n+1}$ pro libovolné $n = \mathbb{N}$,
2. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje přirozené n tak, že délka I_n je menší než ε,

pak

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset. \tag{2.5}$$

Jak již bylo zmíněno v odstavci výše, v průniku v rovnici (2.5) může ležet nejvýše jeden bod.

Lze ukázat, že taková množina $\mathbb{R}$, která je úplným uspořádaným tělesem splňujícím axiom úplnosti, existuje a nazýváme ji množinou **reálných čísel**. Samotná konstrukce množiny reálných čísel jde daleko nad rámec tohoto kurzu a nebudeme se jí zde zabývat.

Je důležité si uvědomit, že axiom úplnosti je to jediné, co odlišuje reálná čísla od racionálních. Jak bylo ukázáno výše, racionální čísla tento axiom nesplňují. Algebraicky (vzhledem k $+$ a $\cdot$) mají jinak tyto množiny shodné vlastnosti. Pro úplnost dodejme, že reálná čísla také znázorňujeme jako body na číselné ose, přičemž nyní již každému bodu na této ose odpovídá právě jedno reálné číslo. Z tohoto důvodu někdy číselnou osu nazýváme **reálnou osou**.

Reálná čísla: shrnutí vlastností

Pro úplnost shrňme a zdůrazněme vlastnosti množiny $\mathbb{R}$ a operací sčítání $+$, násobení $\cdot$ a uspořádání $<$:

- asociativní zákony,
- komutativní zákony,
- distributivní zákony,
- existence nuly a jedničky,
- opačné prvky,

- inverzní prvky,
- úplné uspořádání,
- axiom úplnosti.

Okolí bodu a rozšířená reálná osa

Výše v textu jsme definovali pojem uzavřeného intervalu. Tuto definici nyní zopakujme a rozšiřme i o další typy **intervalů**.

Nechť pro $a, b \in \mathbb{R}$ platí $a < b$. Potom definujeme,

$$\begin{aligned}
&\text{otevřený interval:} && (a,b) := \big\{x \in \mathbb{R} \,\big|\, a < x < b\big\},\\
&\text{uzavřený interval:} && \langle a,b\rangle := \big\{x \in \mathbb{R} \,\big|\, a \leq x \leq b\big\},\\
&\text{polootevřený (polouzavřený) interval:} && \langle a,b) := \big\{x \in \mathbb{R} \,\big|\, a \leq x < b\big\},\\
&\text{polootevřený (polouzavřený) interval:} && (a,b\rangle := \big\{x \in \mathbb{R} \,\big|\, a < x \leq b\big\}.
\end{aligned}$$

Dále definujeme **neomezené intervaly**

$$\begin{aligned}
(a,+\infty) &:= \big\{x \in \mathbb{R} \,\big|\, a < x\big\},\\
\langle a,+\infty) &:= \big\{x \in \mathbb{R} \,\big|\, a \leq x\big\},\\
(-\infty,b) &:= \big\{x \in \mathbb{R} \,\big|\, x < b\big\},\\
(-\infty,b\rangle &:= \big\{x \in \mathbb{R} \,\big|\, x \leq b\big\}.
\end{aligned}$$

Ve všech těchto intervalech je a tzv. **počáteční bod** a b tzv. **koncový bod** intervalu. O bodech a a b souhrnně mluvíme jako o **krajních bodech** daných intervalů.

Pro neomezené intervaly s krajním bodem 0 navíc občas používáme speciální značení:

$$\mathbb{R}^+ = (0,+\infty), \quad \mathbb{R}^- = (-\infty,0), \quad \mathbb{R}_0^+ = \langle 0,+\infty), \quad \mathbb{R}_0^- = (-\infty,0\rangle,$$

tedy pořadě kladná, záporná, nezáporná a nekladná reálná čísla.

Poznámka 2.5: V předchozích odstavcích jsme o některých podmnožinách reálné osy mluvili jako o „neomezených“. Tento pojem je zřejmě intuitivně uchopitelný, ale pro úplnost uveďme i jeho formální definici.

- Množinu $A \subset \mathbb{R}$ nazýváme **omezenou**, právě když existuje konstanta $K > 0$ taková, že pro každé $x \in A$ platí nerovnost $|x| < K$.
- Množinu $A \subset \mathbb{R}$ nazýváme **neomezenou**, právě když není omezená. Tedy pro každé $K > 0$ existuje $x \in A$ splňující $|x| \geq K$.

Například množina $\mathbb{N}$ je neomezená. Naproti tomu množina $\{\sin(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ je omezená (nalezněte vhodnou konstantu K).

Otázka 3: Které z následujících množin jsou omezené a které neomezené?

a. $\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$,

b. $\{\operatorname{tg} x \mid x \in (-\pi/4, \pi/4)\}$,

c. $\{\text{tg } x \mid x \in (-\pi/4, \pi/2)\}$,

d. $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) = 0\}$.

Dalším důležitým pojmem je **okolí** bodu, které budeme později intenzivně využívat.

Definice 2.6 (Okolí / *neighborhood*)**:** Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Otevřený interval $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ nazýváme **okolím bodu** a **o poloměru** ε a značíme $H_a(\varepsilon)$. Někdy též o této množině mluvíme jako o ε-okolí bodu a.

Je-li $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$, pak $x \in H_a(\varepsilon)$ platí právě, když $|x - a| < \varepsilon$. Bod x tedy patří do okolí $H_a(\varepsilon)$ bodu $a \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když jeho vzdálenost od a je menší než ε. O parametru ε se z očividných důvodů často mluví jako o **poloměru** a o bodu a jako o **středu** okolí $H_a(\varepsilon)$.

Výše zavedená okolí $H_a(\varepsilon)$ též často nazýváme oboustranná, tyto množiny se totiž „rozprostírají“ na obě strany od bodu a, tedy okolo bodu a (odtud by měla být patrná motivace pro volbu názvu „okolí“). Dále zavádíme tzv. jednostranná okolí bodu $a \in \mathbb{R}$.

Definice 2.7 (Jednostranné okolí)**:** Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$. Polouzavřený interval $\langle a, a + \varepsilon)$, resp. $(a - \varepsilon, a\rangle$, nazýváme **pravým**, resp. **levým**, ε okolím bodu a a značíme ho $H_a^+(\varepsilon)$, resp. $H_a^-(\varepsilon)$.

Dále je často výhodné pracovat se symboly $+\infty$ a $-\infty$ podobným způsobem jako s reálnými čísly. V následující definici proto o tyto prvky množinu reálných čísel rozšíříme.

Definice 2.8: Množinu $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ nazýváme **rozšířenou množinou reálných čísel** (případně též rozšířenou reálnou osou).

Prvky množiny $\mathbb{R}$ umíme porovnávavat pomocí nerovnosti $<$. Toto uspořádání můžeme rozšířit i na množinu $\overline{\mathbb{R}}$ přirozeným způsobem pomocí vztahů

$$-\infty < x < +\infty$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Definice operací sčítání a násobení na $\overline{\mathbb{R}}$ necháme na později (viz sekci 3.5).

Pro další výklad (zejména o limitách posloupností a funkcí) je vhodné definovat i okolí těchto nových bodů $+\infty$ a $-\infty$.

Definice 2.9: Nechť $c \in \mathbb{R}$. Otevřený interval $(c,\ +\infty)$, resp. $(-\infty, c)$, nazýváme okolím bodu $+\infty$, resp. $-\infty$, v $\mathbb{R}$ a značíme $H_{+\infty}(c)$, resp. $H_{-\infty}(c)$.

Okolí bodu a máme tedy definované pro libovolné $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Všimněte si, že toto okolí je vždy podmnožinou $\mathbb{R}$. Není-li u okolí bodu a třeba specifikovat jeho velikost, tj. zadávat konkrétní hodnotu ε případně c, píšeme zkráceně H_a.

Příklad 2.10: Procvičme si výše zavedené názvosloví,

- interval $(-1, 1)$ je okolím bodu 0 s poloměrem 1, jedná se o $H_0(1)$,
- interval $\langle -1, 1\rangle$ není okolím bodu 0,
- interval $(-1, 2)$ není okolím bodu 0, jedná se ovšem o okolí bodu $1/2$ s poloměrem $3/2$,
- interval $(10, +\infty)$ je okolím bodu $+\infty$, jedná se o $H_{+\infty}(10)$,
- interval $(-\infty, 1\rangle$ není okolím bodu $+\infty$ ani $-\infty$,
- interval $\langle 2, 3)$ je pravým okolím bodu 2, jedná se o $H_2^+(1)$.

Laskavý čtenář si v tento okamžik jistě rád vymyslí další příklady.

2.2 Zobrazení

Ve velké části předmětu BI-ZMA se budeme zabývat vlastnostmi funkcí. Zobrazení patří mezi ústřední matematické objekty. Funkce, posloupnosti, pole (v programátorském smyslu), matice, permutace, binární operace, to vše jsou příklady zobrazení.

Začněme nejprve několika motivačními příklady konceptu zobrazení.

Příklad 2.11: Data v počítači jsou uložena v binární formě. Jedním ze způsobů jak zakódovat (nejen) znaky latinské abecedy je ASCII[7] tabulka. Každému celému číslu v rozsahu 0 až 127 (sedm bitů) je *přiřazen* jistý znak. Nekompletní ilustrační ukázka je uvedena v tabulce č. 2.2.

Příklad 2.12: Buď x libovolné nezáporné reálné číslo. Rovnice $z^2 = x$ má právě jedno nezáporné řešení z. Toto řešení označme symbolem $\sqrt{x}$ a nazvěme ho druhou odmocninou z x.

Rozeberme odstavec výše podrobněji. Dá-li nám nepřítel (uživatel) nezáporné kladné číslo x, pak abychom mu vrátili $\sqrt{x}$, musíme vyřešit rovnici $z^2 = x$ s nezápornou neznámou z. V předchozím odstavci se tvrdí, že toto řešení existuje a je dáno jednoznačně (je právě jedno).

- Jednoznačnost dokážeme snadno sporem: předpokládejme, že máme dvě nezáporná a vzájemně různá z_1, z_2 splňující $z_1^2 = x$ a $z_2^2 = x$. Potom nutně platí $z_1^2 - z_2^2 = x - x = 0$. Pomocí známého algebraického vztahu odtud plyne rovnost $(z_1 - z_2)(z_1 + z_2) = 0$. Protože ale (dle našich předpokladů) $z_1 + z_2 \neq 0$ můžeme tuto rovnost upravit a získat rovnost $z_1 - z_2 = 0$, čili $z_1 = z_2$. Což je spor (předpokládali jsme $z_1 \neq z_2$).

- Existence: prozatím odložíme (není triviální, viz větu č. 5.41).

Úvodním odstavcem tohoto příkladu je tedy hodnota $\sqrt{x}$ dobře definována. Intuitivně si představujeme, že na vstup x se *zobrazí* na výstup $\sqrt{x}$.

Konkrétně například $\sqrt{4} = 2$, protože $2^2 = 4$. Z výše uvedeného také plyne, že i pro π existuje jisté číslo $\sqrt{\pi}$ splňující $\left(\sqrt{\pi}\right)^2 = \pi$. Jak vypočítat jeho hodnotu (v dané přesnosti) výše uvedená definice druhé odmocniny neřeší.

Definice zobrazení

Přistupme nyní k samotné definici zobrazení.

Definice 2.13 (zobrazení / *mapping*)**:** Nechť jsou dány dvě množiny A, B a předpokládejme, že ke každému prvku x z množiny A je jednoznačným způsobem přiřazen právě jeden prvek z množiny B, který označíme $f(x)$. Potom říkáme, že f je **zobrazení** množiny A do množiny B, a tento fakt značíme $f : A \to B$. Množinu A nazýváme **definičním oborem** zobrazení f a prvek $f(x)$ pro dané $x \in A$ nazýváme **hodnotou zobrazení f v bodě** x.

Pro explicitní zdůraznění faktu, že bod x je pomocí f zobrazen na bod $y = f(x)$, někdy používáme značení[8] $f : x \mapsto y$. V případě, že $y = f(x)$ pro jisté $x \in D_f$ také o x mluvíme jako o **vzoru prvku y při zobrazení f** a naopak o y jako o **obrazu prvku x při zobrazení f**. Definiční obor zobrazení $f : A \to B$ často značíme symbolem D_f, případně $D(f)$. Ilustrace k definici zobrazení je uvedena na obrázku č. 2.4.

[7] *American Standard Code for Information Interchange*

[8] Čili x je zobrazeno na y. Například druhou mocninu bychom takto zapsali jako $f : x \mapsto x^2$.

binární hodnota	hexedecimální hodnota	znak abecedy
100 0001	41	A
100 0010	42	B
100 0011	43	C
100 0100	44	D
100 0101	45	E
100 0110	46	F
100 0111	47	G
100 1000	48	H
100 1001	49	I
100 1010	4A	J
100 1011	4B	K
100 1100	4C	L
100 1101	4D	M
100 1110	4E	N
100 1111	4F	O
101 0000	50	P
101 0001	51	Q
101 0010	52	R
101 0011	53	S
101 0100	54	T
101 0101	55	U
101 0110	56	V
101 0111	57	W
101 1000	58	X
101 1001	59	Y
101 1010	5A	Z

Tabulka 2.2: Vybrané symboly abecedy a jejich kódy v binární a hexadecimální formě (další detaily o ASCII tabulce).

Poznámka 2.14 (zobrazení vs. hodnota zobrazení)**:** Rozlišování mezi zobrazením a hodnotou zobrazení je běžné i v programovacích jazycích. Například v Pythonu můžeme jediným příkazem vytvořit funkci f působící na svém argumentu předpisem $f(x) = x + 10$,

```
f = lambda x: x + 10
```

V proměnné f je nyní uložen objekt typu funkce, příkaz type(f) nám vrátí function. f má smysl samo o sobě (*an sich*). Teprve voláme-li funkci f na konkrétním argumentu, získáme funkční hodnotu. Například položíme-li x=3 po vyhodnocení f(x) dostaneme 13.

Poznámka 2.15 (Častý omyl)**:** Je-li $f : A \to B$ zobrazení, pak množina B nutně nemusí být jeho oborem hodnot. Tento pojem zavádíme níže v definici č. 2.17. Například sin většinou chápeme jako zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ale obor hodnot funkce sin je $\langle -1, 1 \rangle$, což jistě není celá reálná osa.

Rovnost mezi dvěma zobrazeními zavádíme následovně.

Definice 2.16: Máme-li dvě zobrazení $f : A \to B$ a $g : A \to B$ pak říkáme, že se **rovnají** a píšeme $f = g$, právě když pro každé $x \in A = D_f = D_g$ platí $f(x) = g(x)$.

Jinak řečeno, dvě zobrazení $A \to B$ se rovnají, právě když se rovnají jejich definiční obory (jakožto množiny) a ve všech bodech tohoto společného definičního oboru mají stejné funkční hodnoty.

Otázka 4: Mějme tři zobrazení f, g a h s definičními obory

$$D_f = \mathbb{R}, \quad D_g = \langle 0, +\infty), \quad D_h = \langle 0, +\infty)$$

dané předpisy

$$\begin{aligned} f(x) &= x, \quad x \in D_f, \\ g(x) &= x, \quad x \in D_g, \\ h(x) &= |x|, \quad x \in D_h. \end{aligned}$$

Která jsou si vzájemně rovna?

Obraz a vzor zobrazení

Zobrazení tedy zobrazuje prvky ze svého definičního oboru na jiné prvky ze svého oboru hodnot. Často bývá výhodné neuvažovat pouze o jednotlivých prvcích, ale rovnou o *množinách* prvků, které jsou zobrazovány, případně na které se zobrazuje. Proto zavádíme následující pojmy.

Definice 2.17: Nechť jsou dány dvě množiny A a B a zobrazení $f : A \to B$. Je-li $E \subset A$, pak množinu[9]

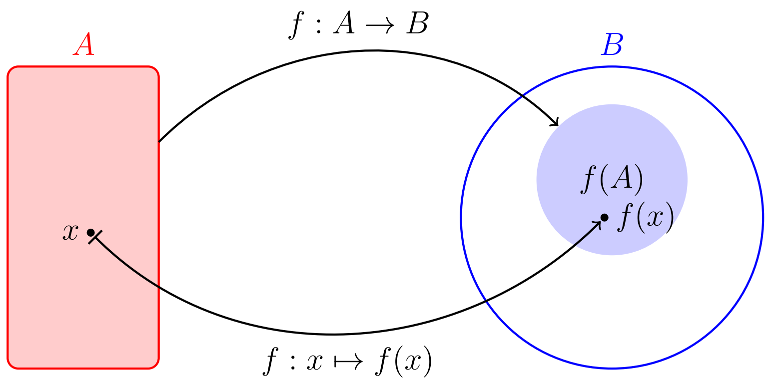
$$f(E) := \big\{ f(x) \in B \mid x \in E \big\}$$

nazveme **obrazem množiny** E **při zobrazení** f. Množinu $f(A)$ nazveme **oborem hodnot zobrazení** f. Je-li $G \subset B$, potom množinu

$$f^{-1}(G) := \big\{ x \in A \mid f(x) \in G \big\}$$

nazveme **vzorem množiny** G při zobrazení f.

[9] Množina $f(E)$ je tedy tvořena hodnotami zobrazení f ve všech bodech množiny E. Formálně lze také psát $f(E) = \big\{ y \in B \mid (\exists x \in E)\big(y = f(x)\big) \big\}$.



Obrázek 2.4: Zobrazení množiny A do množiny B. Oborem hodnot zobrazení f je množina $f(A)$, tj. obraz definičního oboru A při zobrazení f.

Symbol pro vzor množiny, $f^{-1}(G)$, je nutno chápat jako nedělitelný. Netvrdíme nic o existenci inverzního zobrazení (tj. f^{-1}, viz definici č. 2.26 níže). Všimněte si, že obrazem jednoprvkové množiny $\{x\}$ pro nějaké $x \in A$ je $f(\{x\}) = \{f(x)\}$ a tedy jednoprvková množina.

Příklad 2.18: Koncept obrazu množiny při zobrazení je často využívaný v programovacích jazycích podporujících funkcionální paradigma. Například množinu[10] všech druhých mocnin všech přirozených čísel mezi 0 a 5 v Pythonu vytvoříme příkazem[11]

```
[ n ** 2 for n in range(6) ]
```

Srovnejte tento zápis s matematičtějším zápisem[12]

$$\left\{n^2 \,\middle|\, n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\right\}.$$

Tato množina představuje obraz množiny $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ při zobrazení definovaným předpisem $f(n) = n^2$, $n \in D_f := \mathbb{N}$. Jedná se tedy o množinu $f(E)$. V jazyce Python tohoto faktu také můžeme využít následovně:

```
map(lambda x: x ** 2, range(6))
```

Tento zápis může být přehlednější, na rozdíl od konstrukce listu pomocí *for* cyklu.

Injekce, surjekce a bijekce

Podle dodatečných vlastností zobrazení vyčleňujeme následující tři důležité typy.

Definice 2.19 (Důležité typy zobrazení)**:** Zobrazení $f : A \to B$ je

- **prosté (injektivní)**, jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- **na (surjektivní)**, jestliže $f(A) = B$, to jest pro každé $y \in B$ existuje $x \in A$ splňující $f(x) = y$.

[10] Technicky list.
[11] Operátor ** v Pythonu představuje umocňování.
[12] Podobnost obou zápisů samozřejmě není náhodná, ale tvůrci Pythonu se matematickou syntaxí inspirovali.

- **vzájemně jednoznačné** (**bijektivní**), jestliže f je prosté a na.

Na obrázku č. 2.4 můžeme o prvních dvou typech zobrazení uvažovat také graficky takto: u *prostého* zobrazení nikdy „nemíří dvě šipky z různých bodů množiny A do jednoho bodu v množině B“, u zobrazení *na* pak „vede alespoň jedna šipka do každého bodu množiny B“. Pomocí kvantifikátorů lze tyto podmínky zapsat následovně:

$$\begin{aligned} f \text{ je prosté} \quad &\overset{\text{def}}{\iff} \quad (\forall x_1, x_2 \in A)\Big((x_1 \neq x_2) \Rightarrow \big(f(x_1) \neq f(x_2)\big)\Big), \\ f \text{ je na} \quad &\overset{\text{def}}{\iff} \quad (\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y). \end{aligned}$$

Při ověřování prostoty zobrazení častěji využíváme ekvivalentní formulaci[13]:

$$f \text{ je prosté} \quad \iff \quad (\forall x_1, x_2 \in A)\Big(\big(f(x_1) = f(x_2)\big) \Rightarrow (x_1 = x_2)\Big).$$

Příklad 2.20: Buď A libovolná množina. Zobrazení $\mathrm{id}_A : A \to A$ definované předpisem

$$\mathrm{id}_A(x) := x, \quad x \in A,$$

nazýváme **identické zobrazení**. Zobrazení id_A je injektivní, surjektivní a tedy i bijektivní.

Příklad 2.21: Zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definované předpisem $f(n) := n^2$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ je prosté, ale není na. Skutečně, splňují-li $n, m \in \mathbb{N}$ rovnost $f(n) = f(m)$, pak $n^2 = m^2$ a díky kladnosti i $n = m$. Zobrazení nemůže být na, protože například pro $m = 3$ neexistuje přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ splňující $n^2 = 3$.

Příklad 2.22: Mějme zobrazení $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definované předpisem[14] $f(m, n) := (m - n, m \cdot n)$. Toto zobrazení není prosté, protože například $f(1, 0) = (1, 0) = f(0, -1)$. Pokusme se ověřit surjektivitu, tedy zda pro libovolnou dvojici $(k, \ell) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ existuje dvojice $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ splňující $f(m, n) = (k, \ell)$, tedy

$$m - n = k \quad \text{a} \quad mn = \ell.$$

Vyjádřením m z první rovnice a dosazením do druhé dostáváme kvadratickou rovnici pro n,

$$n^2 + kn - \ell = 0.$$

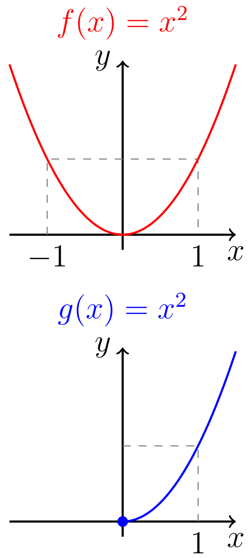
Tato má řešení $n_\pm = \frac{1}{2}\big(-k \pm \sqrt{k^2 + 4\ell}\big)$. Tento výraz není vždy celé číslo. Konkrétně například pokud zvolíme $(k, \ell) = (0, -1)$ dostaneme $n_\pm = \pm i$. Dvojice $(0, -1)$ tedy neleží v oboru hodnot zobrazení f, který tak není celá množina $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ a zobrazení tedy není na.

Zúžení a skládání zobrazení

Nyní se zaměříme na způsoby jak lze ze zobrazení vyrábět nová zobrazení. Ukážeme si nejprve operace zúžení a skládání.

Definice 2.23: Buď $f : A \to B$ a $M \subset A$. Zobrazení $g : M \to B$ definované předpisem $g(x) := f(x)$ pro každé $x \in M$ nazýváme **zúžením zobrazení** f **na množinu** M. Zapisujeme $g = f\big|_M$.

Příklad 2.24: Uvažme zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované pro každé $x \in \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = x^2$ a jeho zúžení $g = f\big|_{\mathbb{R}_0^+}$. Grafy těchto funkcí jsou znázorněny na obrázku č. 2.5.



Obrázek 2.5: Zde pro definiční obory platí $D_f = \mathbb{R}$ a $D_g = \langle 0, +\infty)$. Na průniku definičních oborů se funkční hodnoty rovnají a zobrazení g je proto zúžením zobrazení f.

Nová zobrazení můžeme také vytvářet pomocí operace skládání. Ovšem pouze pokud jsou zobrazení správného typu.

Definice 2.25: Nechť $E \subset B$ a nechť $f : A \to B$ a $g : E \to C$ jsou zobrazení. Označíme-li $D_{g \circ f} = f^{-1}(E) \subset A$, pak definujeme **složené zobrazení** $g \circ f : D_{g \circ f} \to C$ předpisem

$$(g \circ f)(x) := g\big(f(x)\big)$$

pro všechna $x \in D_{g \circ f}$.

O definičním oboru složeného zobrazení pouze víme, že $D_{g \circ f} \subset A$. V případě, že $f(A) \cap E = \emptyset$, nastane situace $D_{g \circ f} = \emptyset$. Názorně je tato situace uvedena na obrázku č. 2.6. O zobrazení g se často mluví jako o **vnějším** a o f jako o **vnitřním** zobrazení složeného zobrazení $g \circ f$.

Libovolná dvě zobrazní tedy nelze složit. Musíme zajistit, aby vnitřní zobrazení nevracelo hodnoty mimo definiční obor vnějšího zobrazení. Tento požadavek přesně vystihuje definice č. 2.25, pro názornost můžeme výraz pro $D_{g \circ f}$ rozepsat (zachovááváme značení z definice č. 2.25):

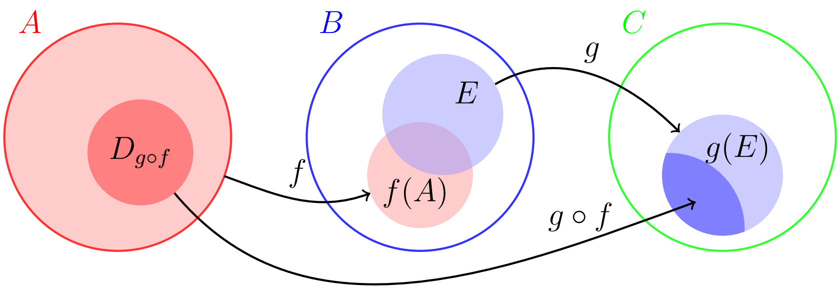
$$D_{g \circ f} = f^{-1}(E) = \{x \in A \mid f(x) \in E = D_g\}.$$

Inverzní zobrazení

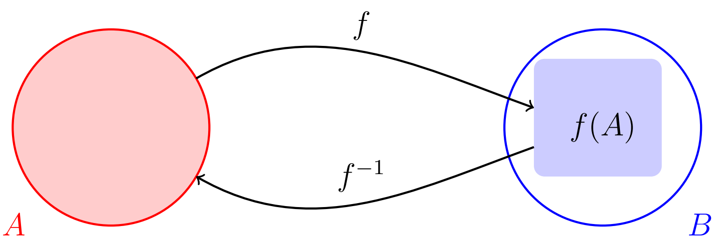
Přirozeně se nabízí otázka, jestli můžeme „změnit směr“ zobrazení $f : A \to B$. Přesněji, jestli zadanému prvku z oboru hodnot zobrazení f můžeme jednoznačně přiřadit nějaký prvek v definičním oboru $D_f = A$. To lze zřejmě pouze v případě, že každý prvek v oboru hodnot zobrazení f má právě jeden vzor, čili když zobrazení je *prosté*. Je-li tedy $f : A \to B$ prosté zobrazení, pak každému prvku x z oboru hodnot $f(A)$ lze přiřadit právě jedno y z množiny A tak, že $x = f(y)$. Takto získané zobrazení nazýváme inverzním a značíme f^{-1}.

[13]Vzpomeňte na větu obměněnou.

[14]Použili jsme přirozený zkrácený zápis $f(m, n)$ místo $f\big((m, n)\big)$.



Obrázek 2.6: Složené zobrazení.



Obrázek 2.7: Prosté zobrazení $f : A \to B$ a jeho inverze $f^{-1} : f(A) \to A$.

Definice 2.26: Je-li $f : A \to B$ prosté zobrazení, pak **inverzní** zobrazení $f^{-1} : f(A) \to A$ definujeme pro každé $x \in f(A)$ předpisem $f^{-1}(x) = y$, kde y je takový prvek A, že $x = f(y)$.

Z definice ihned plynou vztahy $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ a $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{f(A)}$, přičemž f^{-1} je jediné zobrazení, které tuto dvojici podmínek splňuje. K ilustraci tohoto pojmu také uvádíme obrázek č. 2.7.

Příklad 2.27: Uvažme zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definované předpisem[15]

$$f(n) = (-1)^n \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Toto zobrazení je prosté a na. Inverzní zobrazení $f^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ je dáno předpisem

$$f^{-1}(m) = \begin{cases} 2m, & m \geq 1, \\ 1 - 2m, & m \leq 0, \end{cases}$$

pro libovolné celočíselné m.

2.3 Reálná funkce reálné proměnné

Matematická analýza, kterou budeme v tomto kurzu studovat, spočívá převážně ve studiu *reálných funkcí reálné proměnné*. Intuitivně je takové funkce jednoznačný výsledek nějakého procesu, který lze měřit pomocí reálných čísel. Přitom výsledek procesu závisí na měnícím se vstupu, jehož hodnotu lze opět popsat pomocí reálných čísel. Jedná se tedy o speciální případ zobrazení.

[15] Pro reálné x označuje $\lfloor x \rfloor$ dolní celou část čísla x.

funkce	nerovnosti popisující definiční obor
$\frac{1}{x}$	$x \neq 0$
$\sqrt[2k]{x}$	$x \geq 0,\, k \in \mathbb{N}$
$\ln(x)$	$x > 0$
$\mathrm{tg}(x)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\, k \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{cotg}(x)$	$x \neq k\pi,\, k \in \mathbb{Z}$

Tabulka 2.4: Přirozené definiční obory některých elementárních funkcí.

Definice 2.28: Zobrazení $f : D_f \to \mathbb{R}$, kde $D_f \subset \mathbb{R}$, nazýváme **reálnou funkcí reálné proměnné**.

Poznámka 2.29: V celém kurzu BI-ZMA budeme termín *reálná funkce reálné proměnné* povětšinou zkracovat na termín **funkce**.

Reálná funkce reálné proměnné je často zadána tzv. *explicitně*. Tedy pomocí funkčního předpisu typu $f(x) = V(x)$, kde $V(x)$ je nějaký výraz v proměnné x. Např. $f(x) = x^2 + 1$. **Přirozeným definičním oborem** takto zadané funkce nazýváme množinu všech reálných x, pro které má výraz $V(x)$ smysl jakožto reálné číslo, a lze mu tedy jednoznačně přiřadit reálné číslo. Pokud je dán pouze funkční předpis bez dalších detailů, automaticky máme na mysli funkci definovanou na příslušném přirozeném definičním oboru. Pro připomenutí uvádíme tabulku č. 2.4 s přirozenými definičními obory několika známých funkcí.

Příklad 2.30: Pod funkcí f zadanou explicitně vzorcem $f(x) = \sqrt{x+1}$ si tedy představíme funkci $f : D_f \to \mathbb{R}$ určenou tímto předpisem na přirozeném definičním oboru, kterým je množina D_f takových $x \in \mathbb{R}$, že $\sqrt{x+1}$ má smysl a dává reálné číslo. Zřejmě tedy $D_f = \langle -1, +\infty)$.

Příklad 2.31: Uvažme předpis $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$. Přirozeným definičním oborem f je množina

$$D_f = \langle 0, 1) \cup (1, +\infty).$$

Podmínky na „smyslupnost" daného výrazu jsou totiž v tomto případě nenulovost jmenovatele a nezápornost argumentu odmocniny.

Protože jsou funkce zobrazeními, přenášíme na ně pojmy prostá, na a bijektivní. Také přenášíme zúžení funkce, skládání funkcí a inverzní funkce. Při výše zavedeném značení definičních oborů a oborů hodnot tak dostáváme známé vztahy pro složenou funkci $g \circ f$,

$$D_{g\circ f} = f^{-1}(D_g), \quad H_{g\circ f} = g(H_f \cap D_g),$$

a také pro inverzní funkci f^{-1} k prosté funkci f,

$$\begin{aligned} D_{f^{-1}} &= H_f, & H_{f^{-1}} &= D_f, \\ f^{-1} \circ f &= \mathrm{id}_{D_f}, & f \circ f^{-1} &= \mathrm{id}_{H_f}. \end{aligned}$$

Dále uvádíme několik příkladů demonstrujících právě zavedené pojmy.

Příklad 2.32: Určíme zda je následující funkce prostá, na, případně bijektivní.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Funkce f je prostá. Vskutku, předpokládejme, že existují $x_1 \neq x_2$ taková, že $f(x_1) = f(x_2)$. Protože $f(x)$ má stejné znaménko jako x, tak musí mít x_1 stejné znaménko jako x_2 a zjevně též musí být obě nenulová. Předpokládejme, že jsou obě kladná. Potom $1/x_1 = 1/x_2$ je ekvivalentní $x_2 = x_1$ a dostáváme spor s předpokladem $x_1 \neq x_2$. Analogicky postupujeme, pokud by byla obě záporná.

Funkce f je také na. Pro $y = 0$ platí $f(0) = 0$ a pro $y \neq 0$ platí $f(1/y) = y$, tedy ke každému $y \in \mathbb{R}$ najdeme bod x takový, že $f(x) = y$. Celkově je tedy f bijektivní.

Příklad 2.33: Uvažme funkce $f(x) = \sqrt{x}$ a $g(x) = \sqrt{|x|}$ jejichž přirozenými definičními obory jsou $D_f = \langle 0, +\infty)$ a $D_g = \mathbb{R}$. Funkce f je zúžením funkce g na množinu $\langle 0, +\infty)$. Platí tedy $f = g|_{\langle 0,+\infty)}$.

Funkce f je prostá a příslušná inverzní funkce f^{-1} má definiční obor $D_{f^{-1}} = \langle 0, +\infty)$ a pro každé $x \geq 0$ platí $f^{-1}(x) = x^2$. Funkce g prostá není, protože např. $g(-1) = g(1) = 1$.

Příklad 2.34: Uvažujme funkce $f(x) = x^2$ a $g(x) = \sqrt{x}$. Přirozenými definičními obory jsou $D_f = \mathbb{R}$ a $D_g = \langle 0, +\infty)$.

Složená funkce $g \circ f$ má definiční obor $D_{g \circ f} = f^{-1}\big(\langle 0, +\infty)\big) = \mathbb{R}$ a pro každé $x \in D_{g \circ f}$ platí $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x|$. Složená funkce $f \circ g$ má definiční obor $D_{f \circ g} = g^{-1}\big(\mathbb{R}\big) = \langle 0, +\infty)$ a pro každé $x \in D_{f \circ g}$ platí $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$. Je tedy zřejmé, že $f \circ g \neq g \circ f$. Pokud ale zúžíme f na $\langle 0, +\infty)$, dostaneme už prostou funkci, ke které je funkce g inverzní. Tj. $\left(f|_{\langle 0,+\infty)}\right)^{-1} = g$.

Typy monotonie funkce

Vyjma výše uvedených typů funkcí (prostá, na, bijektivní) rozeznáváme rostoucí a klesající funkce.

Definice 2.35: Funkci f definovanou na množině M nazýváme

- **rostoucí na množině** M, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \leq f(x_2)$,
- **klesající na množině** M, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) \geq f(x_2)$,
- **ostře rostoucí na množině** M, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) < f(x_2)$,
- **ostře klesající na množině** M, právě když pro každé $x_1, x_2 \in M$ splňující $x_1 < x_2$ platí $f(x_1) > f(x_2)$.

Pokud některý z výše zmíněných pojmů použijeme bez reference na množinu M, pak za M bereme celý definiční obor uvažované funkce. Například $f(x) = x^2$, $x \in D_f = \mathbb{R}$, je funkce rostoucí na $\langle 0, +\infty)$, ale nejedná se o rostoucí funkci. Funkce $g(x) = -x^3$, $x \in D_f = \mathbb{R}$, je ostře klesající.

Není těžké si rozmyslet, že každá ostře rostoucí (nebo ostře klesající) funkce je prostá. Opak ale neplatí, ne každá prostá funkce je ostře klesající (nebo ostře rostoucí). Skutečně, podívejte se na funkci z příkladu č. 2.32.

Často chceme souhrnně mluvit o (ostře) rostoucích nebo klesajících funkcích. Proto zavádíme následující dva pojmy.

Definice 2.36: Funkci, která je rostoucí nebo klesající nazýváme **monotonní**. Funkci, která je ostře rostoucí nebo ostře klesající nazýváme **ryze monotonní**.

Graf funkce

Funkci si často můžeme také představit, respektive nakreslit, pomocí jejího **grafu**. K tomu nejdřív potřebujeme matematicky vyjádřit pojem roviny.

Definice 2.37: Jsou-li x a y prvky (nějakých množin), zavedeme symbol (x, y) pro jejich **uspořádanou dvojici**. Jsou-li (x, y) a (u, v) dvě uspořádané dvojice, pak definujeme rovnost mezi uspořádanými dvojicemi následovně,

$$(x, y) = (u, v) \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad x = u \text{ a } y = v.$$

Podobně definujeme uspořádanou n-tici $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Všimněte si, že $\{x, y\}$ je množina shodná s $\{y, x\}$, kdežto uspořádané dvojice (x, y) a (y, x) nejsou stejné (obecně). Přesto lze uspořádanou dvojici zavést pouze pomocí množinových pojmů, např. dvojici (x, y) lze ztotožnit s množinou $\big\{x, \{x, y\}\big\}$.

Definice 2.38: Nechť A a B jsou množiny. Symbolem $A \times B$ označujeme množinu všech uspořádaných dvojic tvaru (x, y), kde $x \in A$ a $y \in B$. Tedy symbolicky

$$A \times B := \big\{(x, y) \,\big|\, x \in A \text{ a } y \in B\big\}.$$

Množina $A \times B$ se nazývá **kartézský součin** množin A a B.

Kartézský součin byl pojmenován na počest René Descarta (latinsky Renatus Cartesius, francouzský matematik, 1596 – 1650). Operace $\times$ mezi množinami je nekomutativní, tedy množina $A \times B$ je obecně různá od $B \times A$.

Příklad 2.39: Uvažme $A = \{1, 2, 3\}$ a $B = \{a, b\}$. Potom

$$\begin{aligned} A \times B &= \big\{(1, a),\ (1, b),\ (2, a),\ (2, b),\ (3, a),\ (3, b)\big\}, \\ B \times A &= \big\{(a, 1),\ (a, 2),\ (a, 3),\ (b, 1),\ (b, 2),\ (b, 3)\big\}. \end{aligned}$$

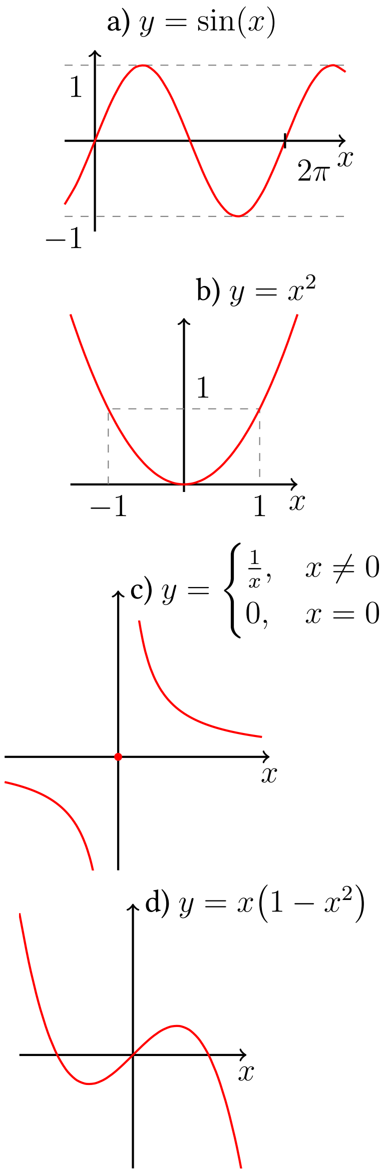
V kartézském součinu $A \times B$ jsou tedy všechny možné uspořádané dvojice (a, b), kde $a \in A$, $b \in B$. Nyní již můžeme definovat graf funkce f.

Definice 2.40: **Grafem** funkce f nazýváme množinu

$$\operatorname{graf} f := \big\{(x, f(x)) \,\big|\, x \in D_f\big\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Body kartézského součinu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se obvykle znázorňují jako body roviny vybavené tzv. kartézským souřadným systémem, což je dvojice vzájemně kolmých směrových přímek nazývaných souřadné osy, které se protínají v bodě zvaném počátek soustavy souřadné. Uspořádané dvojici $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ potom přísluší bod v rovině, který je od počátku ve směru první z os (nazývané osa x) vzdálen x jednotek délky a ve směru druhé z os (osa y) y jednotek délky. Graf funkce je tedy podmnožina kartézského součinu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, který můžeme přirozeně interpretovat jako rovinu.

Na obrázku 2.8 jsou pro ilustraci vykreslené grafy několika vybraných funkcí.



Obrázek 2.8: Grafy vybraných funkcí. Funkce na obrázcích a) a b) nejsou ani prosté ani na. Funkce na obrázku c) je prostá i na. Funkce na obrázku d) je pouze na.

3 Reálné posloupnosti

3.1 Definice reálné posloupnosti

Pomocí pojmu posloupnosti můžeme formalizovat procesy probíhající v diskrétních krocích. Například posloupnost měření průměrné denní teploty v jistém místě, nebo posloupnost aproximací řešení jisté úlohy (tímto způsobem funguje celá řada numerických algoritmů, jen členy těchto posloupností nejsou pouhá čísla, ale například matice nebo vektory; k pochopení konceptu limity nám pro začátek hřiště reálných čísel bude zcela stačit).

V této kapitole také poprvé narazíme na pojem limity v jeho nejjednodušší formě (limita posloupnosti). Během semestru se s limitami ještě několikrát setkáme, budeme studovat

- limity funkcí,
- číselné řady (jejichž součet je limitou jisté posloupnosti),
- derivace funkcí (které jsou limitami jistých funkcí),
- Riemannův integrál funkce (jehož konstrukce také využívá pojem limity).

Z těchto odkazů na další části přednášky je patrné, že pochopení limity posloupnosti je pro další výklad stěžejní.

V této kapitole si postupně ukážeme, jak pojem posloupnosti definovat, jaké významné vlastnosti posloupností nás budou zajímat a jak definovat veledůležitý koncept limity posloupnosti.

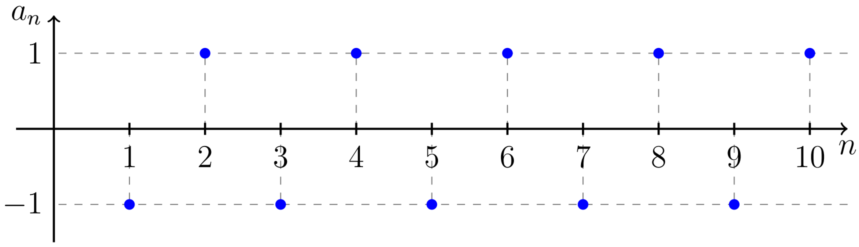
Definice 3.1 (Posloupnost / *sequence*)**:** Zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{R}$ nazýváme **reálná posloupnost**.

Dále budeme používat následující standardní značení. Je-li $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ posloupnost, pak funkční hodnotu a v bodě $n \in \mathbb{N}$, tj. reálné číslo $a(n)$, označujeme pomocí dolního indexu[16] symbolem a_n a nazýváme n**-tým členem posloupnosti** a. Skutečnost, že $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je posloupnost, zapisujeme také zkráceně symbolem $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Otázka 5: Vyzýváme čtenáře, aby vlastními slovy zformuloval, jaký je rozdíl mezi symbolem a_n a $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Srovnejte s podobnou symbolikou u funkcí, tedy rozdílem mezi $f(x)$ a f v případě funkce $f : D_f \to \mathbb{R}$.

Bez velkých obtíží bychom místo indexové množiny $\mathbb{N}$ mohli připustit libovolnou *nekonečnou* zdola omezenou podmnožinu J množiny $\mathbb{Z}$. V tom případě bychom tento záměr zdůraznili zápisem $(a_n)_{n \in J}$. Takovouto množinu J lze vždy očíslovat přirozenými čísly podle jejich velikosti.

[16] Závislost na diskrétních parametrech (např. celočíselných) často vyjadřujeme právě pomocí dolních indexů. Jako například u posloupností: a_n. Naopak závislost na spojitých parametrech pak většinou pomocí závorek, tj. například u reálných funkcí reálné proměnné píšeme $f(x)$.



Obrázek 3.1: Příklad posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Na stránkách tohoto textu si vystačíme s posloupnostmi indexovanými přirozenými čísly, tj. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, a posloupnostmi indexovanými přirozenými čísly včetně nuly, tj. $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Zdůrazněme, že naše číselné posloupnosti jsou vždy nekonečné. Někdy zaváděný pojem „konečné posloupnosti" je pro nás prostě jistá uspořádaná n-tice (s pevně daným n).

Příklad 3.2: Uvažme posloupnost $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem $a_n := (-1)^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Například tedy platí rovnosti $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, či $a_{321} = -1$. Tuto posloupnost jsme mohli zadat i ekvivalentním způsobem:

$$a = \big((-1)^n\big)_{n=1}^{\infty}.$$

Oborem hodnot posloupnosti a je množina obsahující pouze *dva* prvky, $\{-1, 1\}$. Jinak řečeno, členy této posloupnosti nabývají pouze dvou hodnot, buď 1 nebo -1. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má ale nekonečně mnoho členů. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je graficky znázorněna na obrázku č. 3.1.

3.2 Vlastnosti posloupností

Podobně jako u funkcí (viz definice č. 2.35 a 2.36), zavádíme několik typů posloupností podle vlastností jejich sousedních členů[17].

Definice 3.3: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **rostoucí** (resp. **klesající**) pokud $a_n \leq a_{n+1}$ (resp. $a_n \geq a_{n+1}$) pro každé $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je **ostře rostoucí** (resp. **ostře klesající**) pokud $a_n < a_{n+1}$ (resp. $a_n > a_{n+1}$) pro každé $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **monotonní** jestliže je rostoucí nebo klesající. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **ryze monotonní** jestliže je ostře rostoucí nebo ostře klesající.

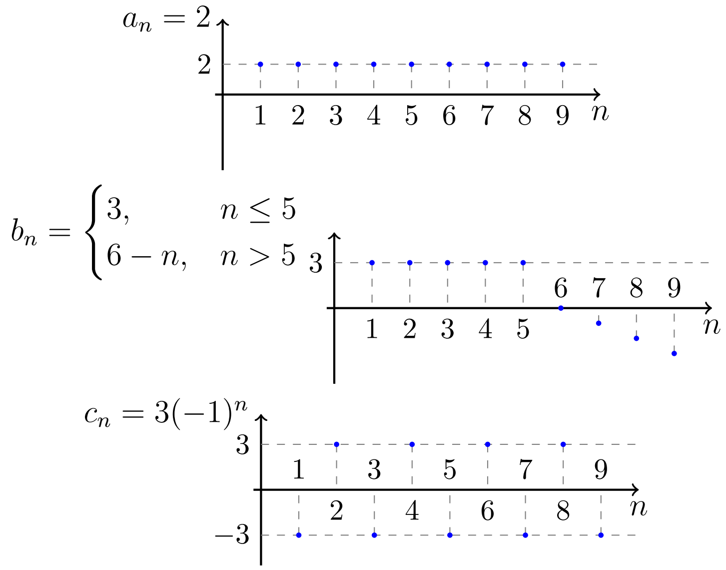
Různí autoři používají dále termín „neklesající" místo našeho „rostoucí" (a podobně „nerostoucí" v případě „klesající"). V tomto textu a v celém předmětu BI-ZMA se budeme důrazně držet názvosloví zavedeného v definici č. 3.3.

Dále se nám při diskuzi o posloupnostech může hodit pojem konstantní posloupnosti. Patrně je jasné co si pod ním představit, ale pro úplnost si ho formálně zavedeme.

Definice 3.4: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **konstantní**, právě když existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ splňující $a_n = c$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Příklad 3.5: Posloupnost $\big(\sin(5)\big)_{n=1}^{\infty}$ je konstantní, každý její člen je roven číslu $\sin(5)$. Naproti tomu posloupnost $(n)_{n=1}^{\infty}$ není konstantní, její první člen je roven číslu 1 a druhý číslu 2, třetí člen je roven číslu 3, atd.

[17] Pozor, u funkcí o „sousedních" členech nemá smysl mluvit.



Obrázek 3.2: Tři příklady posloupností.

Příklad 3.6: Rozmysleme si následující jednoduché tvrzení: posloupnost je konstantní, právě když je současně rostoucí i klesající.

Tvrzení má formu ekvivalence. K jeho důkazu proto dokážeme obě implikace.

Důkaz $\Rightarrow$: Předpokládejme, že máme konstantní posloupnost $a_n = c$, $n \in \mathbb{N}$, kde c je reálná konstanta. Potom jistě platí $a_{n+1} = c \geq c = a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je proto dle definice č. 3.3 rostoucí. Stejný argument ukazuje, že se jedná i o klesající posloupnost.

Důkaz $\Leftarrow$: Naopak nyní předpokládejme, že máme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, která je rostoucí i klesající zároveň. Dle definice č. 3.3 tedy platí nerovnosti $a_n \geq a_{n+1} \geq a_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. To je možné pouze v případě, že platí $a_n = a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Jinak řečeno, $a_n = a_1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je tedy konstantní. Číslo a_1 hraji roli konstanty c v definici konstantní posloupnosti.

Otázka 6: Rozmyslete si, které posloupnosti z obrázku 3.2 jsou rostoucí, klesající, ostře rostoucí, ostře klesající, či monotonní.

Pokud máme rozhodnout jakého (a jestli vůbec) typu zadaná posloupnost je, musíme ověřit/vyvrátit podmínky uvedené v definici č. 3.3. To samo o sobě může být komplikovaná úloha závisející na zadané posloupnosti. Ukažme si to na jednoduchých příkladech.

Příklad 3.7: Uvažme posloupnost $a_n = (n+1)^2 - n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

V prvním případě je vhodné výraz nejprve lehce upravit,

$$a_n = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tato posloupnost je dokonce ostře rostoucí, protože

$$a_{n+1} = 2(n+1) + 1 = 2n + 1 + 2 > 2n + 1 = a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Příklad 3.8: Uvažme následující posloupnost: pro zadané $n \in \mathbb{N}$ nechť b_n označuje největší faktor v prvočíselném rozkladu čísla n.

Rozmysleme si nejprve definici posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ prozkoumáním prvních několika členů:

$$\begin{aligned} 1 = 1 &\Rightarrow b_1 = 1, \\ 2 = 2 &\Rightarrow b_2 = 2, \\ 3 = 3 &\Rightarrow b_3 = 3, \\ 4 = 2 \cdot 2 &\Rightarrow b_4 = 2. \end{aligned}$$

Vidíme, že $b_1 < b_2$, ale $b_3 > b_4$. Proto nemůže platit ani jedna z podmínek v definici č. 3.3. Uvedená posloupnost proto není (ostře) rostoucí ani (ostře) klesající.

Příklad 3.9: Uvažme posloupnost $c_n = n^2 - n$, $n \in \mathbb{N}$.

Prvních několik členů má hodnotu

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = 6, \quad c_4 = 12.$$

„Zdá se“, že posloupnost bude ostře rostoucí. To ale *nemůžeme* tvrdit na základě porovnání jejích prvních čtyř členů! Srovnejte to se situací v předchozím příkladě, kde jsme růst/klesání vyvraceli. Nyní ho chceme prokázat, musíme proto ověřit platnost nerovnosti $a_n < a_{n+1}$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$. Tato nerovnost je v našem konkrétním případě ekvivalentní nerovnosti

$$n^2 - n < (n+1)^2 - (n+1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Po jednoduchých ekvivalentních úpravách získáváme nerovnost

$$0 < 2n, \quad n \in \mathbb{N},$$

která je očividně pravdivá (dvojnásobek libovolného přirozeného čísla je jistě kladný). Posloupnost $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ je proto ostře rostoucí.

Otázka 7: Mějme rostoucí posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Která z následujících posloupností je rostoucí?

a. $(a_n + 3b_n)_{n=1}^{\infty}$

b. $(1000a_n - b_n)_{n=1}^{\infty}$

c. $(a_n \cdot b_n)_{n=1}^{\infty}$

d. $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$

Aritmetická a geometrická posloupnost

Čtenáři jsou jistě dobře známy následující dva speciální příklady posloupností.

Příklad 3.10: Aritmetická posloupnost je definována rekurentním vztahem $a_{n+1} = a_n + d$, kde parametr $d \in \mathbb{R}$ se nazývá **diference**.

Aby tento rekurentní vztah jednoznačně zadával posloupnost je nutné zafixovat první člen a_1. Je-li dán první člen a_1 pak očividně[18] platí

$$a_n = a_1 + (n-1)d\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Aritmetická posloupnost je ostře rostoucí pokud $d > 0$, ostře klesající pokud $d < 0$ a konstantní pokud $d = 0$.

[18] Lze snadno dokázat pomocí matematické indukce.

Příklad 3.11: Geometrická posloupnost je dána rekurentním vztahem

$$a_{n+1} = a_n \cdot q, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

kde parametr $q \neq 0, 1$ se nazývá **kvocient**. Je-li dán první člen a_1, pak je $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Snadno nahlédneme, že geometrická posloupnost je ostře rostoucí pokud $a_1 > 0$, $q > 1$ nebo $a_1 < 0$, $0 < q < 1$ a ostře klesající pokud $a_1 > 0$, $0 < q < 1$ nebo $a_1 < 0$, $q > 1$.

Na tomto místě čtenáři připomeneme vzorce pro součty prvních několika členů těchto posloupností. Pro aritmetickou posloupnost $a_k = a_1 + d \cdot (k-1)$, $k \in \mathbb{N}$, platí

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pro geometrickou posloupnost $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, platí

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3.3 Limita číselné posloupnosti

V této podkapitole nejprve zavedeme pojem limity posloupnosti a pak prozkoumáme jeho základní vlastnosti. Hlavní myšlenkou je vyjádření intuitivního požadavku, aby se „členy posloupnosti a_n blížily libovolně blízko k jistému číslu α.“ Proč by nás takováto otázka měla zajímat? V praxi je často potřeba zjistit, jestli proces, který členy dané posloupnosti popisují, někam spěje (např. jestli posloupnost jistých aproximací konverguje k hledanému řešení jistého problému). Viz například definici součtu číselné řady.

Poznamenejme, že limita není jediným nástrojem pro zkoumání chování členů posloupností pro velké indexy n. V další části tohoto textu se budeme bavit o hromadných bodech a Landauově asymptotické notaci (podkapitola č. 10.3), pomocí které budeme moci také vyjadřovat chování posloupností v ∞ (například i v situacích, kdy daná posloupnost limitu nemá).

Přistupme nyní k definici limity číselné posloupnosti.

Definice 3.12 (Limita posloupnosti / *limit of a sequence*)**:** Reálná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má **limitu** $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, právě když pro *každé* okolí H_α bodu α *lze nalézt* $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ větší než n_0 platí $a_n \in H_\alpha$. V symbolech

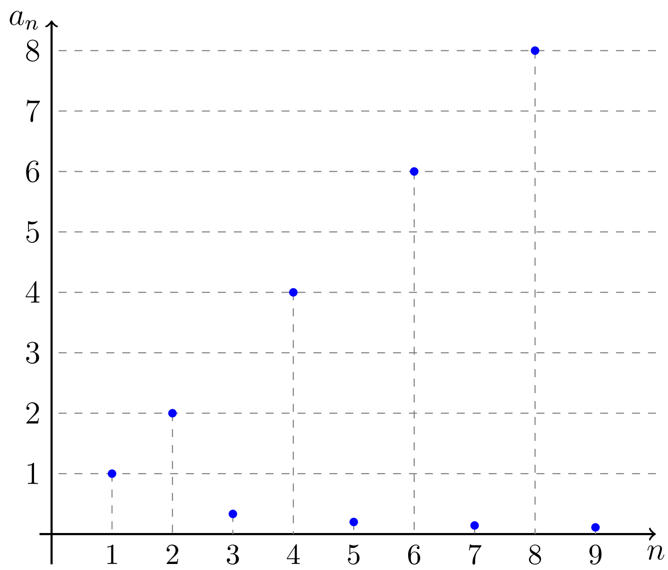
$$\big(\forall H_\alpha\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall n \in \mathbb{N}\big)\big(n > n_0 \;\Rightarrow\; a_n \in H_\alpha\big). \tag{3.1}$$

Tuto skutečnost můžeme zapsat několika možnými ekvivalentními způsoby:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{nebo} \quad \lim a_n = \alpha \quad \text{nebo} \quad a_n \to \alpha.$$

Slovně můžeme definici 3.12 přeformulovat i takto: $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ je limitou posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, právě když *v každém* okolí H_α bodu α leží všechny členy posloupnosti s dostatečně velkým indexem, tj. všechny až na konečný počet výjimek. Na druhou stranu, k tomu aby $\lim a_n = \alpha$ ale nestačí, aby v každém okolí bodu α leželo nekonečně mnoho členů posloupnosti. Uvažte například posloupnost

$$a_n = \begin{cases} n, & n \text{ je sudé}, \\ \frac{1}{n}, & n \text{ je liché}. \end{cases} \tag{3.2}$$



Obrázek 3.3: Grafické znázornění posloupnosti definované v rovnici č. (3.2).

V každém okolí bodu 0 leží nekonečně mnoho jejích členů, ale tato posloupnost nemůže mít limitu, protože mimo toto okolí leží taktéž nekonečně mnoho jejích členů. Prvních několik členů této posloupnosti je znázorněno na obrázku č. 3.3. Mimochodem, o členech posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ z rovnice (3.2) bychom také mohli říci, že se její členy přiblíží libovolně blízko 0, přesto 0 očividně limitou této posloupnosti není (tato posloupnost ve skutečnosti nemá limitu).

Pokud bychom v definici limity zaměnili „$n_0 \in \mathbb{N}$" za „$n_0 \in \mathbb{R}$", pak se její smysl nezmění. Význam zůstane také zachován připustíme-li „$n \geq n_0$" místo „$n > n_0$". Index n_0 totiž vyjadřuje pouze to, že inkluze $a_n \in H_\alpha$ platí pro všechna dostatečně velká n.

Pokud uvažujeme $\alpha \in \mathbb{R}$, můžeme definici přeformulovat a zbavit ji reference na pojem okolí. Každé okolí H_α je v tomto případě tvaru $(\alpha - \varepsilon,\ \alpha + \varepsilon)$ pro nějaké kladné ε. Dále inkluze $a_n \in H_\alpha$ platí, právě když $|a_n - \alpha| < \varepsilon$. Dostáváme tedy ekvivalentní formulaci definice,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R} \quad &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad \big(\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall n \in \mathbb{N}\big)\big(n > n_0 \ \Rightarrow\ |a_n - \alpha| < \varepsilon\big).\end{aligned}$$

Podobnou úvahou pro případ $\alpha = +\infty$ obdržíme následující tvrzení

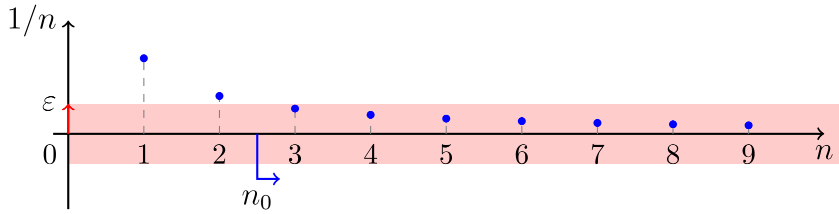
$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \big(\forall c \in \mathbb{R}\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall n \in \mathbb{N}\big)\big(n > n_0 \ \Rightarrow\ a_n > c\big).$$

Rozmyslete si podmínku pro $\alpha = -\infty$.

Nyní se budeme zabývat základními vlastnostmi zavedeného pojmu a několika jednoduchými příklady. Následující věta odhaluje veledůležitou vlastnost pojmu limity. Posloupnost buď limitu nemá, nebo ji má a její hodnota je pak dána jednoznačně. Jinak řečeno, žádná posloupnost nemůže mít *dvě různé* limity. Pokud tedy dva lidé počítají jeden příklad a vyjde jim rozdílný výsledek, pak alespoň jeden z nich musel někde ve výpočtu udělat chybu.

Věta 3.13 (O jednoznačnosti limity)**:** Každá číselná posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Důkaz sporem. Předpokládejme, že $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má dvě různé limity $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, $\alpha \neq \beta$. Potom existují dvě disjunktní okolí H_α a H_β, tj. $H_\alpha \cap H_\beta = \emptyset$. Z definice limity ovšem máme k dispozici $n_0 \in \mathbb{N}$



Obrázek 3.4: Grafické znázornění posloupnosti $a_n = 1/n$ a volby n_0 pro jedno konkrétní ε v definici limity.

a $m_0 \in \mathbb{N}$ taková, že pro všechna $n > n_0$ je $a_n \in H_\alpha$ a pro všechna $n > m_0$ je $a_n \in H_\beta$. Tudíž pro libovolné $n > \max\{n_0,\ m_0\}$ platí,

$$a_n \in H_\alpha \cap H_\beta = \emptyset$$

což je spor. □

Použití definice na jednoduchých příkladech

Při počítání limit většinou (přímo) nepoužíváme definici, ale výpočet zakládáme na znalosti jednoduchých, elementárních, limit. V následujících třech příkladech si ukážeme jak definici použít právě na těchto jednoduchých posloupnostech. Dalšími důležitými příklady posloupností se budeme věnovat v sekci č. 3.9.

Příklad 3.14: Limita konstantní posloupnosti $a_n = \alpha$, $n \in \mathbb{N}$, je rovna α.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Zvolíme-li jakékoliv $n_0 \in \mathbb{N}$, třeba $n_0 := 42$, potom pro $n > n_0$ triviálně platí

$$|a_n - \alpha| = 0 < \varepsilon.$$

Příklad 3.15: Limita posloupnosti $a_n = n^2$ je rovna $+\infty$.

Buď $K > 0$ libovolné. Zvolíme-li přirozené $n_0 > \sqrt{K}$, pak pro každé $n > n_0$ platí $n > n_0 > \sqrt{K}$ a tudíž $a_n = n^2 > K$.

Příklad 3.16: Dokažte tvrzení $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Požadavek

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \overset{!}{<} \varepsilon$$

je ekvivalentní podmínce $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Stačí tedy k danému ε volit libovolné $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Pro ilustraci vizte obrázek 3.4. Všimněte si, že čím menší okolí zvolíme (čím menší je ε) tím větší musíme n_0 zvolit, aby všechny členy za ním padly do zadaného okolí.

Poznámka 3.17: Z předchozích tří příkladů by mělo být patrné, že platí

$$\lim_{n\to\infty} n^a = \begin{cases} +\infty & a > 0, \\ 1 & a = 0, \\ 0, & a < 0. \end{cases}$$

Toto tvrzení je snadné[19] ověřit na základě definice stejně jako v předchozích příkladech.

[19] Ovšem obecnou mocninu jsme ještě nezavedli. V tento okamžik je toto tvrzení pravdivé pouze pro $a \in \mathbb{Z}$.

Konvergence a divergence posloupností

Z pohledu existence limity rozlišujeme následující dva důležité typy posloupností.

Definice 3.18: Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost. Pokud pro její limitu platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$, pak se nazývá **konvergentní**. V ostatních případech ji nazýváme **divergentní**.

O konvergentní posloupnosti někdy také ze zjevných důvodů říkáme, že „má konečnou limitu“. Na základě výsledků příkladů z předchozí sekce č. 3.3 můžeme tvrdit následující: posloupnost $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, libovolná konstantní posloupnost je konvergentní, posloupnost $(n)_{n=1}^{\infty}$ je divergentní.

Shrňme si nejpodstatnější výsledek předchozích odstavců. Nejelementárnějším způsobem výpočtu limity posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je úspěšné provedení následujících dvou kroků.

1. Uhodněme kandidáta na limitu, označme si ho $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$,
2. Pomocí definice dokažme, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

V další části tohoto textu si ukážeme sofistikovanější nástroje pro výpočet limit. Velmi často je nám hodnota limity (pokud vůbec existuje) neznámá. Typicky je její případná hodnota právě to, co hledáme. Vyvstává proto přirozená otázka: lze rozhodnout o konvergenci posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ pouze na základě znalosti jejích členů, bez toho abychom museli operovat s hodnotou limity? Na tuto otázku zanedlouho kladně odpovíme.

Často je výhodné k odvození limity jedné posloupnosti použít její srovnání s jinou, jednodušší, posloupností se známou limitou. V následujících kapitolách si ukážeme ještě několik takových vět.

Věta 3.19: Mějme dvě posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ a nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takový, že pro všechna n větší než n_0 platí nerovnost $a_n \geq b_n$. Pokud $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, potom také $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Důkaz je jen dvojitým použitím definice.

Důkaz. Vezměmě okolí $H_{+\infty} = (c, +\infty)$. Protože $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, máme pro toto c k dispozici jisté m_0 takové, že pro všechna n větší než m_0 je $b_n > c$. Vezmeme-li proto nyní libovolné n větší než $N_0 := \max\{n_0, m_0\}$, pak $a_n \geq b_n > c$. Tudíž $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. □

Příklad 3.20: Uvažme například posloupnost

$$a_n = \big(2 + (-1)^n\big)n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Na výpočet limity této posloupnosti nelze použít větu o limitě součinu, protože člen v závorce nemá limitu. Vzhledem ke kladnosti a omezenosti této závorky ale očekáváme, že limitou posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ bude $+\infty$. Každý člen této posloupnosti ale můžeme odhadnout zespoda takto:

$$a_n = \big(2 + (-1)^n\big)n \geq (2 - 1)n = n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

O posloupnosti $(n)_{n=1}^{\infty}$ víme, že její limitou je $+\infty$. Odtud pak podle předcházející věty ihned plyne $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

$n:$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
$a_n:$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	$\cdots$
k_n:	2	5	6	9	$\cdots$						
a_{k_n}:	a_2	a_5	a_6	a_9	$\cdots$						

Obrázek 3.5: Vybírání podposloupnosti z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

3.4 Vybrané posloupnosti

V předešlé podkapitole jsme si ukázali, jak pomocí definice ověřit, že jisté $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ je limitou zadané posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Ne všechny posloupnosti však limitu mají. Pokud máme podezření, že limita zadané posloupnosti neexistuje, můžeme se pokusit její existenci vyvrátit. Jedním ze způsobů jak vyvrátit existenci limity je „vybrat“ ze zadané posloupnosti dvě „podposloupnosti“ mající vzájemně různou limitu. Přesněji tento postup rozebereme v této podkapitolce. Nejprve definujme potřebné pojmy, na které jsme v tomto odstavci narazili.

Definice 3.21: Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost a $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ nazýváme **posloupností vybranou** z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Posloupnost $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ nazýváme také **podposloupností** posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Poznámka 3.22: Ve výrazu a_{k_n} se vyskytuje dvojitý dolní index. V podstatě jde o zápis složeného zobrazení. Přesně řečeno se jedná o k_n-tý člen posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Pomocí n nejprve určíme k_n a potom a_{k_n}.

Je-li například $a_n = 2n$, $n \in \mathbb{N}$ a $k_n = 3n$, $n \in \mathbb{N}$, pak platí $a_{k_n} = 6n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Pokud si vzpomeneme na definici posloupnosti (definice č. 3.1), pak si uvědomíme, že se v této poznámce vlastně bavíme o skládání dvou zobrazení.

Příklad 3.23: Posloupnost $(1)_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $\big((-1)^n\big)_{n=1}^{\infty}$. Skutečně, stačí vzít sudé členy, tedy $k_n = 2n$ pro $n = 1, 2, \ldots$

Posloupnost $(1)_{n=1}^{\infty}$ není vybraná z posloupnosti $(n)_{n=1}^{\infty}$ i přesto, že se člen s hodnotou 1 v posloupnosti $(n)_{n=1}^{\infty}$ vyskytuje (právě jednou).

Na první setkání může být předešlá definice č. 3.21 nejasná. Členy posloupnosti $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ pouze udávají indexy členů vybíraných z $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Požadavek aby $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ byla ostře rostoucí znamená, že při výběru členů se nesmím vracet k předchozím členům ani nemohu vybrat stejný člen dvakrát. Pro názornost uvádíme obrázek č. 3.5.

Příklad 3.24: Uvažme posloupnost $a_n = (-1)^n n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Prvních pár členů tedy je $-1, 2, -3, 4, \ldots$ Posloupnost $(2n)_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Ano, stačí volit ostře rostoucí $k_n = 2n$ a pak $a_{k_n} = 2n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Posloupnost (2) není vybraná z $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Sice platí, že když položíme $k_n = 2$, pak $a_{k_n} = 2$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, ale $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ není ostře rostoucí (je konstantní s hodnotou 2).

Ihned vyvstává otázka: jak spolu souvisí limita posloupnosti a limita její podposloupnosti? Přímo z definice limity posloupnosti nahlédneme platnost následující věty.

Věta 3.25 (O limitě vybrané posloupnosti)**:** Nechť posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu rovnou $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Pak každá posloupnost vybraná z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má také limitu α.

Důkaz. Pro $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ platí formule (3.1). Buď $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ libovolná ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel a $b = (a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ posloupnost vybraná z $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Buď H_α okolí α, limity posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n > n_0$ je $a_n \in H_\alpha$. Dle předpokladů o posloupnosti $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ ale existuje ale i m_0 takové, že $k_{m_0} > n_0$. Je-li tedy $m > m_0$ pak nutně $a_{k_m} \in H_\alpha$. Posloupnost $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ má tedy také limitu α. □

Příklad 3.26: Platí $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{4n!+n^2} = 0$.

Posloupnost $\left(\frac{1}{4n!+n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ je totiž vybraná posloupnost z $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ (ověřte!) a již víme, že $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Všimněte si, jak je tento argument (využívající znalosti limity posloupnosti $(1/n)_{n=1}^{\infty}$) *jednoduchý*! Není potřeba přímo ověřovat podmínku v definici limity posloupnosti (pro ε hledat n_0 s požadovanými vlastnostmi).

Věta č. 3.25 nám dává jednoduché a užitečné kritérium pro *neexistenci limity posloupnosti*. Pro zdůraznění si ho zformulujeme jako následující důsledek.

Důsledek 3.27: Lze-li z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vybrat dvě podposloupnosti s ***různými*** limitami, pak limita původní posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ neexistuje.

Důkaz. Důkaz důsledku provedeme sporem. Kdyby posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ měla limitu a šlo z ní vybrat dvě podposloupnosti s různými limitami, pak se ihned dostáváme do sporu s větou o limitě vybrané podposloupnosti (věta č. 3.25). □

Příklad 3.28: Limita posloupnosti $\left((-1)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ neexistuje. Vybereme podposloupnosti se sudými a lichými indexy. Tj. položíme $k_n := 2n$ a $\ell_n := 2n-1$ pro $n = 1, 2, \ldots$ Potom obě takto zkonstruované vybrané podposloupnosti jsou konstantní s různými limitami:

$$a_{k_n} = 1 \to 1, \quad a_{\ell_n} = -1 \to -1.$$

3.5 Algebraické operace na rozšířené reálné ose

V předchozí kapitole jsme v definici č. 2.8 zavedli rozšířenou reálnou osu, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Nyní mezi prvky množiny $\overline{\mathbb{R}}$ rozšíříme binární operace sčítání a násobení.

Nejprve ale připomeňme jak přirozeným způsobem na $\overline{\mathbb{R}}$ rozšiřujeme relaci uspořádání. Konkrétně klademe

$$\begin{aligned} -\infty < a \quad &\text{pro každé } a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \\ a < +\infty \quad &\text{pro každé } a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}. \end{aligned}$$

Na této definici asi není nic překvapivého, bereme ji jako samozřejmou.

Nyní se věnujme algebraickým operacím. Zde je situace jen mírně komplikovanější.

Definice 3.29: Nechť $a \in \overline{\mathbb{R}}$. V závislosti na jeho hodnotě definujeme

- $a > -\infty$: $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$,

- $a < +\infty$: $a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$,
- $a > 0$: $a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = +\infty$,
- $a < 0$: $a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = -\infty$,
- $a > 0$: $a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty$,
- $a < 0$: $a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = +\infty$.
- $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$.

Rozdíl definujeme vztahem $a - b := a + (-b)$, podíl $\frac{a}{b} := a \cdot \frac{1}{b}$, pouze v případě, že výraz na pravé straně je definován. Klademe $-(+\infty) = -\infty$, $-(-\infty) = +\infty$, $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$ a $\sqrt[k]{+\infty} = +\infty$ pro libovolné $k \in \mathbb{N}$.

Nedefinovány tedy zůstávají výrazy

$$+\infty - (+\infty), \quad -\infty - (-\infty), \quad -\infty + (+\infty), \quad +\infty + (-\infty)$$
$$0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{a}{0} \quad \text{pro } a \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Oproti tomu například výraz, kde se vyskytují dvě nekonečna, $+\infty - (-\infty)$ je dobře definovaný a jeho hodnota je dle výše uvedené definice rovna $+\infty$.

Příklad 3.30: Platí tedy například $+\infty - 2 = +\infty$, $4 \cdot (-\infty) = -\infty$, $\frac{2}{+\infty} = 0$ a podobně. Výrazy $\frac{4}{0}$, $+\infty - (+\infty)$, či $0 \cdot (+\infty)$ *nejsou* definovány. Jak uvidíme, nelze jim dát dobrý obecný smysl.

3.6 Věty o posloupnostech a jejich limitach

Následující věty nám umožňují „kombinovat" jednoduché limity do složitějších, jsou tedy velmi praktickým nástrojem pro výpočet limit. Její použití, které si za okamžik názorně ukážeme, většinou spočívá v úpravě výrazu do tvaru vhodných součtů, součinů a podílů, jejichž limity známe a dohromady dávají dobře definovaný výraz (ve smyslu předchozí podkapitoly č. 3.5).

Věta 3.31 (O limitě součtu, součinu a podílu)**:** Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou reálné posloupnosti mající limitu v $\overline{\mathbb{R}}$, označme je $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ a $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta,$$
$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \alpha \cdot \beta,$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta},$$

pokud je výraz na pravé straně definován.

Všimněte si, že aby podíl $\frac{\alpha}{\beta}$ byl definován, musí být $\beta \neq 0$. Za chvilku uvidíme, že odtud plyne existence $n_0 \in \mathbb{N}$ takového, že $b_n \neq 0$ pro $n > n_0$. Má tedy smysl zkoumat limitu posloupnosti $(a_n/b_n)_{n=1}^{\infty}$.

Důkaz této věty je poněkud zdlouhavý, vzhledem k množství kombinací různých situací. Uveďme alespoň argument pro součet a konečné limity. Ostatní případy lze ošetřit podobně i když například podíl a součin vyžadují více práce.

Důkaz pro součet a konečné limity. Předpokládejme, že $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ potom lze pro $\varepsilon/2$ najít $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n > n_0$ je $|a_n - \alpha| < \varepsilon/2$ a $|b_n - \beta| < \varepsilon/2$. Pro tato n pak máme i

$$|a_n + b_n - \alpha - \beta| = |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| \leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Podle definice tedy $a_n + b_n \to \alpha + \beta$. □

Všimněme si, že ve větě se existence limit $\lim a_n$ a $\lim b_n$ předpokládá. Opačná tvrzení obecně neplatí, například z existence limity $\lim(a_n + b_n)$ neplyne existence limit $\lim a_n$ a $\lim b_n$. Jako příklad můžeme uvést následující jednoduchou volbu posloupností:

$$a_n = (-1)^n \quad \text{a} \quad b_n = (-1)^{n+1}.$$

Protože $a_n + b_n = 0$ platí pro každé n, existuje limita součtu, ale limita původních posloupností neexistuje, jak jsme již ukázali dříve.

Uveďme dále jeden důležitý důsledek věty č. 3.31.

Důsledek 3.32: Buď $c \in \mathbb{R}$ konstanta a $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnosti s limitami v $\overline{\mathbb{R}}$. Potom platí

$$\lim_{n\to\infty} c\, a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n,$$
$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n,$$

pokud je výraz na pravé straně definován.

Důkaz. V případě prvního tvrzení důsledku stačí využít větu 3.31 a její tvrzení o součinu s posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a konstantní posloupností $b_n = c$. K nahlédnutí druhého tvrzení si pak stačí uvědomit, že $a_n - b_n = a_n + (-1) \cdot b_n$ a použít první část důsledku a větu 3.31 o součtu. □

Ukažme si, jak lze předchozí věty použít při výpočtu jednoduchých příkladů.

Příklad 3.33: Vypočtěte

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 4n + 5}{n - n^3}$,
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 4n + 5}{n - n^3}$,
3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 4n + 5}{n - n^2}$.

Je potřeba použít předchozí větu, ale před tím je třeba výrazy za limitou vhodně upravit. V prvním příkladě platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 4n + 5}{n - n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{4}{n^2} + \frac{5}{n^3}}{\frac{1}{n^2} - 1} = \frac{2 - 0 + 0}{0 - 1} = -2.$$

Všimněte si, že předchozí větu jsme použili hned několikrát (podíl limit, výpočet limity čitatele a jmenovatele pomocí součtu/rozdílu limit). Ve druhém příkladě podobně máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 4n + 5}{n - n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}}{\frac{1}{n} - n} = \frac{2 - 0 + 0}{0 - \infty} = 0.$$

A konečně ve třetím

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 4n + 5}{n - n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n - \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}}{\frac{1}{n} - 1} = \frac{+\infty - 0 + 0}{0 - 1} = -\infty.$$

Samozřejmě způsobů jak provést úpravu těchto typů zlomků, tak aby bylo možné použít větu na podíl/součin/součet limit, je více možných.

Další věta nám ukazuje, jak se chová absolutní hodnota (viz rovnici č. (2.3)) vůči limitě posloupnosti.

Věta 3.34 (O limitě a absolutní hodnotě)**:** Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je reálná posloupnost. Pak platí následující dvě tvrzení

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad &\implies \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha|, \\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad &\iff \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0. \end{aligned}$$

Důkaz. Dokažme nejprve první část. Pokud $\alpha = \pm\infty$, pak je důkaz přímočarým použitím definice (rozmyslete!).

Nejprve si rozmysleme následující pozorování o absolutní hodnotě. Pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|. \tag{3.3}$$

Skutečně, podle trojúhelníkové nerovnosti pro absolutní hodnotu platí $|a+b| \leq |a| + |b|$ pro reálná a, b. Položíme-li $a = x - y$ a $b = y$, pak

$$|x| \leq |x - y| + |y| \quad \implies \quad |x| - |y| \leq |x - y|. \tag{3.4}$$

Záměnou x za y a y za x pak

$$|y| - |x| \leq |y - x| \quad \implies \quad |x| - |y| \geq -|x - y|. \tag{3.5}$$

Nerovnosti (3.4) a (3.5) lze souhrnně zapsat jako nerovnost (3.3).

Uvažme $\alpha \in \mathbb{R}$ a buď $\varepsilon > 0$. Potom dle předpokladu existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé n větší než n_0 je $|a_n - \alpha| < \varepsilon$. Díky výše odvozené nerovnosti pak ale pro tato n platí i $\big||a_n| - |\alpha|\big| < |a_n - \alpha| < \varepsilon$. První část tvrzení je tímto dokázána.

Ekvivalence v druhé části dokazované věty plyne z rovnosti

$$|x - 0| = \big||x| - 0\big|$$

platné pro každé reálné x. □

Příklad 3.35: Předchozí věta tedy říká, že můžeme beztrestně zaměňovat pořadí počítání limity posloupnosti a absolutní hodnoty. Samozřejmě za předpokladu existence limity posloupnosti v absolutní hodnotě. Například

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n} - 2\right| = \left|\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} - 2\right)\right| = |-2| = 2.$$

Podobné tvrzení můžeme nyní odvodit i pro odmocniny.

Věta 3.36 (O limitě a odmocnině)**:** Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je reálná posloupnost s nezápornými členy a nechť $k \in \mathbb{N}$ je pevně dané číslo. Pak platí následující tvrzení

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\alpha}.$$

Důkaz. Uvažme případ $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Podle předpokladů existuje konstanta $c > 0$ tak, že $c^k < a_n$ pro každé n a $c^k < \alpha$. Dále si stačí povšimnout, že[20]

$$\left|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{\alpha}\right| = \frac{|a_n - \alpha|}{a_n^{\frac{k-1}{k}} + a_n^{\frac{k-2}{k}}\alpha + \cdots + a_n\alpha^{\frac{k-2}{k}} + \alpha^{\frac{k-1}{k}}} \leq \frac{|a_n - \alpha|}{k \cdot c^{k-1}}.$$

Je-li tedy $\varepsilon > 0$ zadáno libovolně, pak lze podle předpokladů nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $|a_n - \alpha| < \varepsilon k c^{k-1}$. Potom ale podle nerovnice výše je

$$\left|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{\alpha}\right| < \varepsilon.$$

Uvažme případ $\alpha = 0$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Pro ε^k existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pokud je n větší než n_0 platí $0 \leq a_n < \varepsilon^k$. Pro tato n je pak ale i $0 \leq \sqrt[k]{a_k} < \varepsilon$. Čili $\left(\sqrt[k]{a_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ konverguje k 0.

Případ $\alpha = +\infty$ se vyšetří analogicky. □

Příklad 3.37: Vypočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n + 5} - n\right).$$

Všimněte si, že nelze použít větu o limitě součtu. Dostáváme nedefinovaný výraz $+\infty - (+\infty)$. Skutečně, protože $\lim_{n\to\infty} n^2 + 2n + 5 = +\infty$ pak podle předchozí věty (konkrétně věty č. 3.36 v níž volíme $k = 2$) platí $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + 2n + 5} = +\infty$. K výpočtu naší limity použijeme úpravu

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n + 5} - n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2n + 5 - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n + 5} + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{5}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}} + 1} = 1.$$

Zde jsme v poslední kroku využili právě předchozí větu č. 3.36 následujícím způsobem:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}\right)} = \sqrt{1 + 0 + 0} = 1.$$

3.7 Kritéria konvergence posloupností

V této kapitole se budeme zabývat způsoby jak rozhodnout o konvergenci posloupností. Nejprve si ukážeme důležitá kritéria pro existenci konečné limity nevyžadující její *a priorní* znalost.

Připomeňme si axiom úplnosti reálných čísel probíraný v podkapitole 2.1. Nyní již navíc můžeme podmínku, kladenou na délky intervalů, formulovat pomocí pojmu limity.

Poznámka 3.38 (Přeformulování axiomu úplnosti)**:** Každý smršťující se systém vnořených uzavřených intervalů má neprázdný průnik. Přesněji, pokud

$$\begin{aligned} \langle a_n, b_n\rangle &\supset \langle a_{n+1}, b_{n+1}\rangle \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}, \\ \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) &= 0, \end{aligned}$$

pak existuje reálné x ležící v každém z intervalů $\langle a_n, b_n\rangle$, $n \in \mathbb{N}$.

[20] Zde jsme využili známého vzorce $x^n - y^n = (x-y)\sum_{j=0}^{n-1} x^j y^{n-1-j}$ platného pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$.

Jak již bylo zmíněno, takovéto x může být očividně nejvýše jedno (opět rozmyslete!). Předpokládáme-li existenci dvou různých prvků x a y, ležících v průniku, snadno se dostaneme ke sporu.

Než se pustíme do hlavní části této sekce zaveďme názorný pojem omezené posloupnosti.

Definice 3.39: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nazveme **omezenou**, právě když existuje $K > 0$ taková, že $|a_n| < K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Příklad 3.40: Posloupnost $\big(\sin(n)\big)_{n=1}^{\infty}$ je omezená (za K lze zvolit například číslo 2), ale posloupnost $(n)_{n=1}^{\infty}$ není omezená.

Dále si zaveďme ještě pojem hromadného bodu, který úzce souvisí s pojmem limity a který budeme dále využívat nejen v této kapitole.

Definice 3.41: Bod $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ nazýváme **hromadným bodem**[21] posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, právě když v *každém* okolí H_α bodu α leží nekonečně mnoho členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Jaký je vztah mezi hromadným bodem posloupnosti a limitou posloupnosti? Pokud má posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ limitu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ pak je tato i hromadným bodem posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Na rozdíl od limit může mít zadaná posloupnost více hromadných bodů. Např. posloupnost $\big((-1)^n\big)_{n=1}^{\infty}$ má hromadné body 1 a -1, ale jak už víme nemá limitu.

Vztah mezi limitami posloupností, hromadnými body a vybranými posloupnosti popisuje následující věta.

Věta 3.42: Bod $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ je hromadným bodem posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, právě když existuje vybraná posloupnost $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ mající limitu α.

Důkaz.
- $\Leftarrow$: V každém okolí H_α leží nekonečně mnoho členů posloupnosti $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ a tím pádem i posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.
- $\Rightarrow$: Uvažme okolí $H_\alpha(1)$, existuje k_1 takové, že $a_{k_1} \in H_\alpha(1)$. Je-li $n \in \mathbb{N}, n > 1$, pak pro okolí $H_\alpha(1/n)$ existuje $k_n > k_{n-1}$ splňující $a_{k_n} \in H_\alpha(1/n)$. Takto zkonstruovaná posloupnost $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a konverguje k α.

□

Přistupme nyní k důležité větě nesoucí jméno po Bernardovi Bolzanovi (matematik pocházející z Itálie ale studující v Praze, 1781 – 1848) a Karlovi Weierstrassovi (německý matematik, otec moderní matematické analýzy, 1815 – 1897). Její tvrzení není vůbec očividné a jak uvidíme v důkazu, plyne z axiomu úplnosti množiny reálných čísel.

Věta 3.43 (Bolzano-Weierstrass): Každá omezená číselná posloupnost má hromadný bod α ležící v $\mathbb{R}$.

Důkaz. Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ omezená posloupnost. Jistě existuje interval $\langle b_1, c_1\rangle$ takový, že obsahuje všechny členy posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Rozdělíme-li interval $\langle b_1, c_1\rangle$ na poloviční intervaly $\langle b_1, \frac{b_1+c_1}{2}\rangle$ a $\langle \frac{b_1+c_1}{2}, c_1\rangle$, pak aspoň jeden z těchto intervalů obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, označme ho $\langle b_2, c_2\rangle$.

Tímto způsobem induktivně sestrojíme systém vnořených intervalů $\langle b_n, c_n\rangle$ z nichž každý obsahuje nekonečně mnoho členů $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a pro jejichž délky platí

$$\lim_{n\to\infty} (c_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{c_1 - b_1}{2^{n-1}} = 0.$$

[21] Zkrátka je to bod, kde se členy posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ hromadí.

Podle axiomu úplnosti existuje reálné x patřící do každého z intervalů $\langle b_n, c_n \rangle$. Protože délky intervalů $\langle b_n, c_n \rangle$ konvergují k nule, lze pro libovolné okolí H_x bodu x nalézt n dostatečně velké na to, aby celý interval $\langle b_n, c_n \rangle$ patřil do H_x. Proto lze v H_x nalézt nekonečně mnoho členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a x je tedy hromadným bodem $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. □

Poznámka 3.44: Jinak řečeno, předchozí věta č. 3.43 tvrdí, že z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Následující větu budeme velmi často využívat. Dává nám totiž *postačující podmínku* pro konvergenci posloupnosti. Pokud ověříme tuto podmínku (v tomto případě monotonii a omezenost posloupnosti) pak je *zaručena* existence její konečné limity. Jak je patrné z důkazu, jedná se o důsledek předchozí Bolzano–Weierstrassovy věty.

Věta 3.45 (O limitě monotonní posloupnosti)**:** Každá reálná monotonní posloupnost má limitu. Tato limita je konečná, právě když je daná posloupnost omezená.

Důkaz. V případě, že je zkoumaná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ neomezená, je z definice limity zřejmé, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ (znaménko $+$ pro neomezenost shora, $-$ pro zdola).

Předpokládejme, že $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí a (shora) omezená. Potom podle Bolzanovy–Weierstrassovy věty má posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ hromadný bod, označme ho x. Buď H_x libovolné okolí bodu x. Potom existuje jisté a_{n_0} patřící do H_x. Do tohoto okolí ale musí patřit všechna a_n s $n > n_0$, protože pro ně nutně platí $a_{n_0} \leq a_n \leq x$. Kdyby totiž a_n přerostlo x, nemohl by x být hromadným bodem $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. □

Příklad 3.46: Zkoumejme limitu posloupnosti

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right)_{n=1}^{\infty}. \tag{3.6}$$

Této posloupnosti se pro její důležitost budeme věnovat ještě dále v semestru. Nyní si ukážeme jak je to s její limitou. Na první pohled se může zdát překvapivé, že limita této posloupnosti je $+\infty$.

Tato posloupnost je očividně ostře rostoucí (následující člen vznikne z předchozího přičtením kladného čísla). Podle věty o limitě monotónní posloupnosti tudíž existuje její limita. Vyberme posloupnost $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$b_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}.$$

Platí

$$b_{j+1} - b_j = \frac{1}{2^j+1} + \frac{1}{2^j+2} + \cdots + \frac{1}{2^j+2^j} \geq 2^j \frac{1}{2^{j+1}} = \frac{1}{2}.$$

Odtud

$$b_n = b_1 + \sum_{j=1}^{n-1} (b_{j+1} - b_j) \geq b_1 + \frac{n-1}{2} = 1 + \frac{n}{2}.$$

Posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, a tedy i $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, není omezená shora. Proto

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Poznámka 3.47: Tento výsledek zdaleka není zřejmý. Kdybyste s členy posloupnosti z předchozího příkladu experimentovali na počítači, tedy počítali v konečné přesnosti (typicky pomocí 64 bitových čísel s pohyblivou desetinnou čárkou), tak byste pravděpodobněji dospěli k závěru, že tato posloupnost konverguje. Rozmyslete proč! K této posloupnosti se později vrátíme a ukážeme si, že do nekonečna jde stejně rychle jako logaritmus.

Další věta nám dává *nutnou* a *postačující* podmínku pro konvergenci posloupnosti. Tedy podmínku ekvivalentní s definicí konvergence. Podstatnou výhodou této podmínky je, že vyžaduje pouze znalost členů zkoumané posloupnosti, nepotřebujeme se odvolávat na případnou hodnotu limity (srovnejte s definicí 3.12).

Věta 3.48 (Bolzano-Cauchy)**:** Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n, m > n_0$ je $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Důkaz. Nejprve dokažme implikaci $\Rightarrow$: nechť má $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ limitu $\alpha \in \mathbb{R}$. Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Potom lze nalézt $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ je $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$. Takže pro libovolné $n, m > n_0$ platí

$$|a_n - a_m| = |a_n - \alpha + \alpha - a_m| \leq |a_n - \alpha| + |\alpha - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Při odhadu jsme využili znalosti trojúhelníkové nerovnosti.

Nyní se podívejme na implikaci $\Leftarrow$: nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňuje podmínku

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n, m \in \mathbb{N})\big(n, m > n_0 \ \Rightarrow\ |a_n - a_m| < \varepsilon\big).$$

Zvolme za $\varepsilon = 1$, pak existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|a_m - a_{n_0}| < 1 \quad \text{pro každé } m > n_0.$$

Jinak řečeno, pro $m > n_0$ patří a_m do intervalu $(a_{n_0} - 1, a_{n_0} + 1) = H_{a_{n_0}}(1)$. Mimo tento interval může ležet pouze konečný počet prvků posloupnosti. Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je proto omezená. Podle Bolzanovy–Weierstrassovy věty existuje $x \in \mathbb{R}$, hromadný bod posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Buď $H_x(\varepsilon/2)$ okolí bodu x. Pro $\varepsilon/2$ existuje n_0 tak, že pokud $m, n > n_0$ pak platí $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$. Určitě ale existuje $m > n_0$ tak, že $a_m \in H_x(\varepsilon/2)$. Tudíž pro $n > n_0$ je

$$|a_n - x| = |a_n - a_m + a_m - x| \leq |a_n - a_m| + |a_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\square$

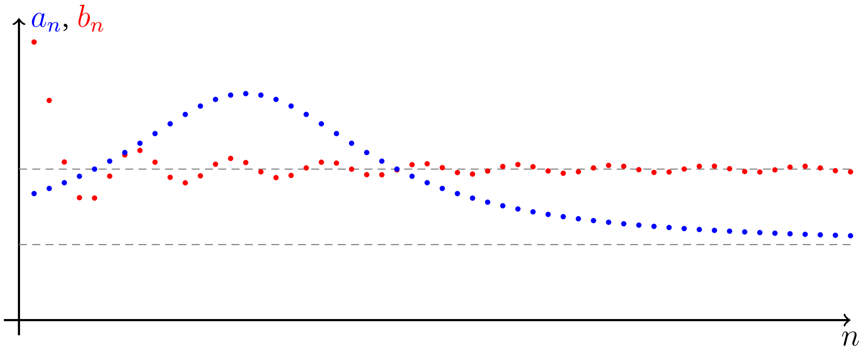
Příklad 3.49: Vraťme se ještě jednou k posloupnosti harmonických čísel (3.6). Ukažme, že její limita je nekonečno alternativně pomocí Bolzanova–Cauchyova kritéria. Nejprve si opět povšimneme, že zkoumaná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, je rostoucí a tedy má limitu (podle věty o limitě monotonní posloupnosti.). Dokažme, že tato limita nemůže být konečná (tj. nemůže patřit do $\mathbb{R}$) a proto musí být nutně rovna $+\infty$. K tomu použijeme Bolzano–Cauchyova kritéria, chceme ukázat jeho negaci. Tedy

$$\big(\exists \varepsilon > 0\big)\big(\forall n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\exists n, m \in \mathbb{N}\big)\big(n, m > n_0 \text{ a } |a_n - a_m| \geq \varepsilon\big),$$

kde $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je zkoumaná posloupnost. Zvolme $\varepsilon = \frac{1}{2}$ a buď $n_0 \in \mathbb{N}$ libovolné. Položme $n = 4n_0$ a $m = 2n_0$, potom $n > m > n_0$ a

$$|a_n - a_m| = \sum_{k=2n_0+1}^{4n_0} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{4n_0} \cdot 2n_0 = \frac{1}{2}.$$

V odhadu jsme použili jednoduchého pozorování: součet $N \in \mathbb{N}$ kladných čísel je větší nebo roven nejmenšímu z nich krát N.



Obrázek 3.6: Ilustrace k větě 3.50.

3.8 Nerovnosti a limity

Z nerovnosti mezi limitami lze odvodit nerovnost mezi členy posloupnosti a naopak z nerovnosti mezi členy posloupnosti lze odvodit nerovnost mezi jejich limitami. Hlavním výsledkem této podkapitolky je věta o sevřené posloupnosti, kterou s výhodou využíváme, pokud není možné využít věty o součtu, součinu, či podílu limit.

Věta 3.50: Nechť reálné posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ mají limity v $\overline{\mathbb{R}}$. Pokud

$$\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$$

potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna přirozená $n > n_0$ platí $a_n < b_n$.

Důkaz. Označme $\alpha = \lim a_n$ a $\beta = \lim b_n$, platí $\alpha < \beta$. Předpokládejme, že α i β jsou konečná. Potom pro $\varepsilon := \frac{\beta-\alpha}{2}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n > n_0$ je $a_n \in H_\alpha(\varepsilon)$ a $b_n \in H_\beta(\varepsilon)$. Protože jsou tato okolí disjunktní platí jistě navíc pro tato n nerovnost $a_n < b_n$.

Podobným způsobem snadno ověříme i případ kdy jsou α či β nekonečná. $\square$

Příklad 3.51: Jako příklad uvažme $a_n = 2 - \frac{1}{n}$ a $b_n = 1 + \frac{2}{n}$. Jejich limity jsou $\lim a_n = 2$ a $\lim b_n = 1$. Existuje tedy $n_0 \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n > n_0$ přirozené platí $a_n > b_n$. V našem případě lze za n_0 volit číslo 4.

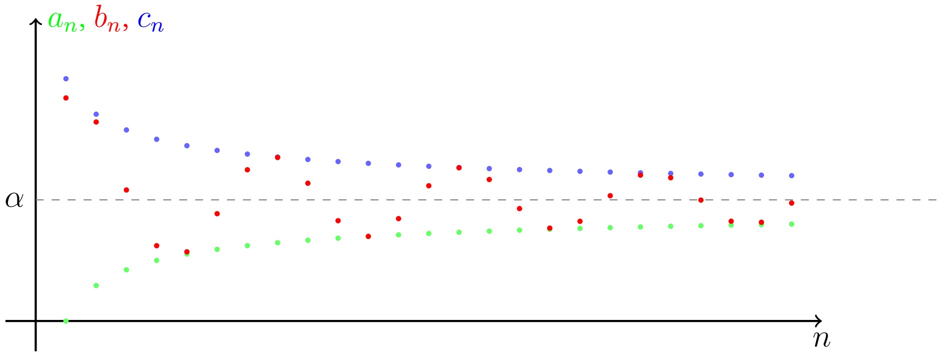
Důsledek 3.52: Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou reálné posloupnosti mající limitu v $\overline{\mathbb{R}}$. Pokud existuje n_0 takové, že pro všechna přirozená $n > n_0$ je $a_n \leq b_n$, potom $\lim a_n \leq \lim b_n$.

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že $\lim a_n > \lim b_n$. Potom podle předchozí věty existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n > n_0$ platí $a_n > b_n$. To je ovšem ve sporu s předpokládanými vlastnostmi posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. $\square$

Všimněte si, že neostrost nerovnosti v tvrzení věty č. 3.50 je zde důležitá. Například, pro $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = 0$ platí ostrá nerovnost $a_n > b_n$ pro každé přirozené n, ale $\lim a_n = \lim b_n = 0$.

Nyní se dostáváme k velmi důležité větě, kterou často použijeme. Její myšlenka spočívá v tom, že dokážeme-li „dobře vystihnout“ chování dané posloupnosti pomocí posloupností se známými shodnými limitami, pak známe i limitu zkoumané posloupnosti.

Příklad 3.53: V tomto příkladu ukážeme, že limita posloupnosti $(\sin n)_{n=1}^{\infty}$ neexistuje.



Obrázek 3.7: Ilustrace k větě 3.54.

K tomu dospějeme sporem. Předpokládejme, že limita této posloupnosti existuje a označme ji $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, tedy

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \sin n\,.$$

Protože nerovnost $-1 \leq \sin n \leq 1$ platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$, je dle věty 3.50 jistě $\alpha \in \langle -1, 1\rangle$ (speciálně, není to některé z nekonečen).

Protože je posloupnost $(\sin 2n)_{n=1}^{\infty}$ vybraná z posloupnosti $(\sin n)_{n=1}^{\infty}$, má dle věty o limitě vybrané posloupnosti také za limitu α. Ze známých trigonometrických vzorců nyní plyne následující vztah

$$\cos 2n = \cos^2 n - \sin^2 n = (1-\sin^2 n) - \sin^2 n = 1 - 2\sin^2 n$$

a proto posloupnost $(\cos 2n)_{n=1}^{\infty}$ má za limitu $1-2\alpha^2$.

Odtud ovšem plyne, s využitím součtových vzorců pro funkci sin, že

$$\sin 2 = \sin(2n+2-2n) = \sin(2n+2)\cos 2n - \cos(2n+2)\sin 2n \to \alpha(1-\alpha^2) - (1-\alpha^2)\alpha = 0,$$

protože $(\sin(2n+2))_{n=1}^{\infty}$, resp. $(\cos(2n+2))_{n=1}^{\infty}$, jsou vybrané z $(\sin 2n)_{n=1}^{\infty}$, resp. $(\cos 2n)_{n=1}^{\infty}$. Celkem jsme dospěli k rovnosti $\sin 2 = 0$, což je spor.

Věta 3.54 (O sevřené posloupnosti)**:** Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou reálné posloupnosti pro které platí

1. $\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big(\forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0\big)\big(a_n \leq b_n \leq c_n\big)$
2. posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ mají stejnou limitu $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.

Potom existuje limita posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ a platí $\lim b_n = \alpha$.

Důkaz. Buď H_α okolí bodu α. Existuje $m_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n > m_0$ patří jak a_n tak c_n do H_α. Pro $n > \max\{n_0, m_0\}$ do tohoto okolí musí patřit i b_n, protože $a_n \leq b_n \leq c_n$. Proto má posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ limitu rovnou α. □

Grafická ilustrace k větě o limitě sevřené posloupnosti je uvedena na obrázku č. 3.7.

Příklad 3.55: Vypočtěte limitu $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}$. Funkce sin má obor hodnot $H_{\sin} = \langle -1, 1\rangle$. Tedy platí nerovnost

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}.$$

Tudíž pro každé přirozené n platí

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Protože ale $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = 0$ je podle věty o limitě sevřené posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

3.9 Výpočet limit význačných jednoduchých posloupností

V této podkapitole odvodíme několik základních limit, které se často hodí znát při výpočtech. V předešlé části textu jsme totiž odvodili několik vět, které však v podstatě nelze použít, neznáme-li limity aspoň některých jednoduchých posloupností.

Připomeňme, že hned po zavedení pojmu limity posloupnosti jsme si prakticky odvodili limitu

$$\lim_{n\to\infty} n^a = \begin{cases} +\infty, & a > 0, \\ 1, & a = 0, \\ 0, & a < 0. \end{cases}$$

Přistupme nyní k dalším příkladům.

Příklad 3.56: Platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Položme $h_n := \sqrt[n]{n} - 1$. Z jedné strany platí $h_n \geq 0$ pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$ Z binomické věty dostaneme pro $n \geq 2$

$$n = (1 + h_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_n^k > 1 + \binom{n}{2} h_n^2,$$

a tedy pro $n \geq 2$ platí

$$n - 1 > \frac{n(n-1)}{2} h_n^2.$$

Pro $n \geq 2$ je výraz $\frac{n(n-1)}{2}$ kladný a můžeme jím proto poslední nerovnost vydělit a díky nezápornosti h_n poté i odmocnit. Po těchto úpravách dostáváme

$$0 \leq h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

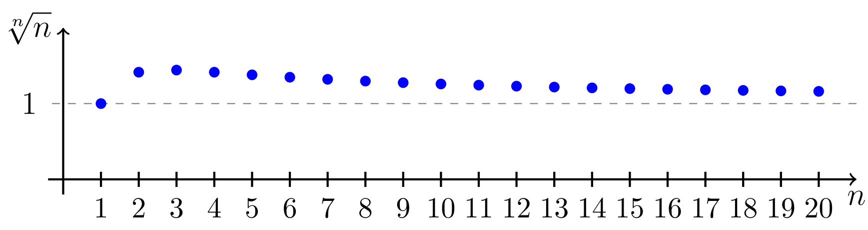
Odtud ihned pomocí věty o sevřené posloupnosti dostáváme $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$. Graf této posloupnosti je pro názornost uveden na obrázku č. 3.8.

Příklad 3.57: Pro každé $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, je

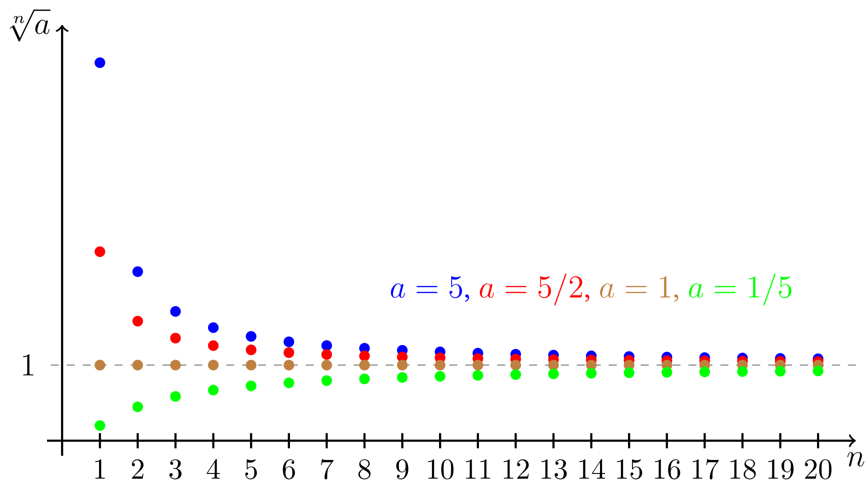
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Případ $a \geq 1$: Pro každé celé $n > a$ platí

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}.$$



Obrázek 3.8: Grafické znázornění členů posloupnosti $\left(\sqrt[n]{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ a její konvergence k 1. Jenom na základě tohoto obrázku nelze rozhodnout o tom, že tato posloupnost konverguje k 1.



Obrázek 3.9: Grafické znázornění členů posloupnosti $\left(\sqrt[n]{a}\right)_{n=1}^{\infty}$ pro různé hodnoty a a její konvergence k 1.

V předchozím příkladě jsme však ukázali rovnost $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Tudíž podle věty o sevřené posloupnosti $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Případ $0 < a < 1$: Z předchozí bodu plyne $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$, tudíž

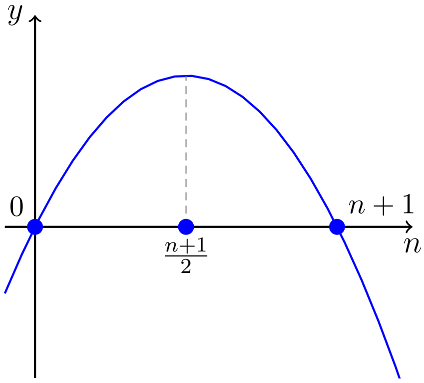
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$

Pro ilustraci uvádíme obrázek č. 3.9.

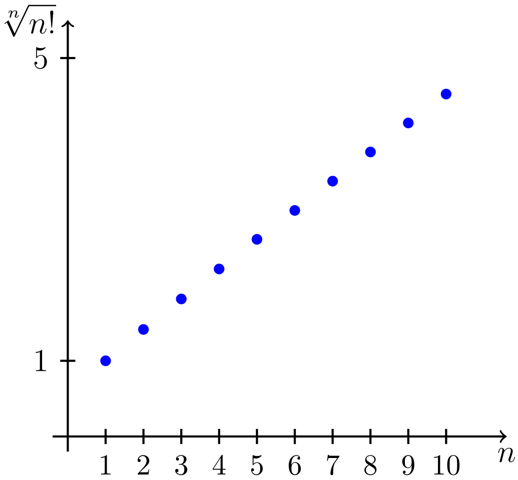
Příklad 3.58: Platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

Při výpočtu této limity využijeme následující trik. Členy v součinu dvou faktoriálů promícháme v



Obrázek 3.10: Ilustrace k výpočtu příkladu výpočtu limity posloupnosti $\sqrt[n]{n!}$.



Obrázek 3.11: Grafické znázornění členů posloupnosti $\left(\sqrt[n]{n!}\right)_{n=1}^{\infty}$.

„zrcadlovém“ pořadí:

$$\begin{aligned}(n!)^2 &= (1\cdot 2\cdot 3\cdots n)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)\\ &= \big(1\cdot n\big)\cdot\big(2\cdot(n-1)\big)\cdot\big(3\cdot(n-2)\big)\cdots\big(n\cdot 1\big) =\\ &= \prod_{k=1}^{n} k(n+1-k)\end{aligned}$$

Z grafu paraboly $f(x) = x(n+1-x)$ je zřejmé (viz obrázek č. 3.10), že

$$f(k) \geq f(1) = f(n) = n, \quad k \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

a proto $(n!)^2 \geq n^n$. Konečně, $2n$-tá odmocnina dává

$$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n} \longrightarrow +\infty.$$

Příklad 3.59: Nechť $a \in \mathbb{R}$. Pak pro limitu reálné posloupnosti $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ platí:

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & |a| < 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a > 1, \\ \text{neexistuje}, & a \leq -1. \end{cases}$$

Jednoduché případy: Pokud $a = 0$ nebo $a = 1$, pak se jedná o konstantní posloupnost jejíž limita je rovna příslušné konstantě. Pro $a = -1$ jsme již ukázali, že limita $\left((-1)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ neexistuje.

Nechť $0 < |a| < 1$. Platí

$$\left|a^{n+1}\right| = \left|a^n\right| \cdot |a| < \left|a^n\right|.$$

Posloupnost $\left(\left|a^n\right|\right)_{n=1}^{\infty}$ je tedy ostře klesající a omezená, $0 < \left|a^n\right| < |a|$. Z věty o limitě monotónní posloupnosti plyne existence konečné limity, označme ji $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left|a^n\right|$. Posloupnost $\left(\left|a^{n+1}\right|\right)_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $\left(\left|a^n\right|\right)_{n=1}^{\infty}$ a proto mají stejnou limitu. Konečně

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|a^{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty} |a| \cdot \left|a^n\right| = |a| \cdot \lim_{n\to\infty} \left|a^n\right| = |a| \cdot L.$$

Díky předpokladům nakladeným na a odtud nutně plyne rovnost $L = 0$.

Případ $a > 1$: Podobně jako v předchozím případě ukážeme, že $\left(a^n\right)_{n=1}^{\infty}$ je ostře rostoucí posloupnost zdola omezená např. číslem 1. Existuje proto limita $L = \lim\limits_{n\to\infty} a^n$. Protože posloupnost roste, musí nutně být $L > a$. Navíc platí

$$L = \lim_{n\to\infty} a^{n+1} = a \cdot \lim_{n\to\infty} a^n = a \cdot L.$$

Protože ale $L > a > 1$ může tato nerovnost platit pouze v případě $L = +\infty$.

Případ $a < -1$: Pro vybranou posloupnost $\left(a^{2n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\left(a^2\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ nyní podle předchozího bodu platí $\lim\limits_{n\to\infty} a^{2n} = +\infty$, protože $a^2 > 1$. Limitu vybrané posloupnosti $\left(a^{2n+1}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ snadno spočteme

$$\lim_{n\to\infty} a^{2n+1} = a \cdot \lim_{n\to\infty} a^{2n} = a \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Našli jsme dvě vybrané posloupnosti s různými limitami. Původní limita, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$, tedy neexistuje.

Shrňme si doposud odvozené limity v tabulce č. 3.2.

posloupnost	limita
$(n^a)_{n=1}^{\infty}$	$\begin{cases} +\infty, & a > 0, \\ 1, & a = 0, \\ 0, & a < 0. \end{cases}$
$\left(\sqrt[n]{n}\right)_{n=1}^{\infty}$	1
$\left(\sqrt[n]{a}\right)_{n=1}^{\infty}$, $a > 0$	1
$\left(\sqrt[n]{n!}\right)_{n=1}^{\infty}$	$+\infty$
$(a^n)_{n=1}^{\infty}$	$\begin{cases} 0, & \lvert a\rvert < 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a > 1, \\ \text{neexistuje}, & a \leq -1. \end{cases}$

Tabulka 3.2: Známé posloupnosti probírané v této sekci a jejich limity.

3.10 Podílové kritérium

Následující kritérium je nedocenitelné při počítání některých „očividných“ limit posloupností. Podívejme se například na limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n}. \tag{3.7}$$

Zamysleme se nad tvarem členů této posloupnosti. Jedná se o podíl polynomu (v čitateli) a exponenciály o základu větším než 1 (ve jmenovateli). Pokud si člověk představí grafy těchto posloupností, ihned získá dojem, že „exponenciála ve jmenovateli roste podstatně rychleji“[22] než polynom v čitateli. Tušíme tedy, že pro velká n bude tento podíl velmi malý. Intuitivně limita (3.7) existuje a je rovna nule.

Bohužel, úvaha v předchozím odstavci má hliněné nohy, je to pouze naše domněnka. Podobné pozorování bychom přeci také *z grafu* učinili, kdybychom studovali limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{10^{10^{10}} \cdot n},$$

jmenovatel této posloupnosti také přece roste podstatně rychleji než její čitatel. Přesto je tato limita rovna $10^{-10^{10}}$, což není nula. Takovýto argument je tedy sám o sobě nepoužitelný.

Když se nad těmito dvěma situacemi zamyslíte, tak uvidíte, že problém je vlastně v tom, co to přesně znamená „roste podstatně rychleji“. Co tímto slovním spojením vlastně chceme popsat? Přirozeně bychom mohli říci, že máme-li dvě posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ obě mající za limitu $+\infty$ pak o $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ řekneme, že „roste podstatně rychleji“ než $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ právě když

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0.$$

Zde ale ihned vidíme problém. Toto je požadavek ekvivalentní tomu co máme spočítat! Nemůžeme přece říci, že limita podílů je nula, protože limita podílů je nula!

Vraťme se k limitě v rovnici (3.7). Mohli bychom se pokusit dokázat pomocí definice, že tato limita je rovna nule (zkuste!). Na tomto místě zvolíme ale jiný postup, který se nám bude hodit i v dalších příkladech. Platí totiž následující věta.

Věta 3.60 (Podílové kritérium)**:** Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost kladných čísel a nechť

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q. \tag{3.8}$$

Potom

a. pokud $q < 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

b. pokud $q > 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Důkaz. Proveďme důkaz bodu a. Protože $q < 1$ určitě existuje r splňující $q < r < 1$. Díky tomu pak i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < r.$$

[22] Exponenciála *o základu větším* než 1.

Dle věty č. 3.50 existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že nerovnost

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$$

platí pro všechna $n > n_0$. Díky nezápornosti členů posloupnosti pak platí i nerovnost $a_{n+1} < ra_n$ pro libovolné $n > n_0$. To ovšem znamená, že pro $n > n_0$ je

$$0 \leq a_n \leq r^{n-n_0-1} a_{n_0+1}.$$

Protože $0 < r < 1$ je limita pravé strany nerovnosti rovna nule (viz příklad v předchozí podkapitole). Dle věty o limitě sevřené posloupnosti (věta č. 3.54) pak ihned dostáváme kýžený výsledek $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bod b. se dokáže naprosto analogicky. □

Aplikujme podílové kritérium na příklad uvedený na začátku této podkapitoly. Teprve *až* tuto limitu vypočteme, budeme moc tvrdit, že „2^n roste do nekonečna podstatně rychleji, než n^2“. Teprve po tomto výpočtu bude tato vlastnost těchto dvou funkcí *odvozena*.

Příklad 3.61: Vypočtěme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

Pro limitu podílů platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2} < 1.$$

Podle podílového kritéria proto původní posloupnost konverguje k nule.

Poznámka 3.62: První bod věty 3.60 lze relativně snadno formulovat i pro některé posloupnosti nemající pouze kladné členy. Stačí použít větu 3.34. Skutečně, pokud pomocí podílového kritéra zjistíme, že posloupnost s nezápornými členy $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nule, pak k nule konverguje i posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Poznámka 3.63: Pokud limita podílů vyjde rovna 1, pak podílové kritérium nelze použít. Například pro posloupnost $(n)_{n=1}^{\infty}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

a $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$. Avšak pro limitu $(1/n)_{n=1}^{\infty}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1,$$

ale $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Poznámka 3.64: Podílové kritérium jsme ve větě 3.60 formulovali v tzv. limitním tvaru. Z důkazu je zřejmé, že platí i silnější nelimitní verze: Jestliže pro posloupnost kladných čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ existují $n_0 \in \mathbb{N}$ a $q \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1, \quad \text{resp.} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q > 1$$

pro každé $n > n_0$, potom $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, resp. $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Poznámka 3.65: Existují i další kritéria konvergence posloupností (např. Raabeovo, Cauchyovo), kterými se zde přímo nebudeme zabývat.

Poznámka 3.66: V BI-ZMA se snažíme naučit studenty umět ověřit a správně vysvětlit svá tvrzení. Proto argument „roste rychleji než" při počítání příkladů je neakceptovatelný. V těchto příkladech je to typicky argumentace kruhem, jak bylo výše zmíněno. Ano, je to dobrá intuice, ale je potřeba umět si ji obhájit, například právě podílovým kritériem (to nemusí být vždy jediná možnost).

4 Číselné řady

4.1 Definice číselné řady

V této části se budeme zabývat speciálním typem číselných posloupností, číselnými řadami. Zhruba řečeno lze říci, že řady vznikají postupným sčítáním členů zadané posloupnosti (viz definici č. 4.1). Později v textu (podkapitola č. 7.4) nám řady umožní počítat funkčních hodnoty některých elementárních funkcí jako sin, či cos, které doteď máme ze středních škol zavedené pouze pomocí geometrické konstrukce.

Definice 4.1 (Číselná řada / *number series*)**:** Formální výraz tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \,,$$

kde $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ je zadaná číselná posloupnost, nazýváme **číselnou řadou**. Pokud je **posloupnost částečných součtů** $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ definovaná předpisem

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

konvergentní, nazýváme příslušnou řadu také **konvergentní**. V opačném případě o ní mluvíme jako o **divergentní** číselné řadě. **Součtem** konvergentní řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nazýváme hodnotu limity $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

Konvergence i divergence řady se zachová, změníme-li konečný počet členů řady. Speciálně konvergence řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ je ekvivalentní konvergenci řady $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ pro libovolně zvolené $n_0 \in \mathbb{N}$. Skutečně, posloupnosti částečných součtů řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ a řady $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ se liší o konstantu (jakou?).

Poznámka 4.2: Je důležité rozlišovat mezi pojmy „posloupnost“ a „řada“. Častou studentskou chybou je vzájemné pletení a nepochopení těchto pojmů. Například posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, je dobré si představovat jako po sobě jdoucí čísla

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ \ldots$$

a řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pro stejnou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jako po sobě jdoucí čísla

$$1,\ 5,\ 14,\ 30,\ 55,\ 91,\ \ldots,$$

tedy členy posloupnosti jejích částečných součtů.

Příklad 4.3: Řada
$$\sum_{k=0}^{\infty} k$$
je divergentní. Skutečně, pro členy posloupnosti jejích částečných součtů platí
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
a triviálně tedy $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$. Příslušná řada je proto podle definice divergentní.

Příklad 4.4: Pro $|q| < 1$ řada
$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \tag{4.1}$$
konverguje. Skutečně, členy posloupnosti částečných součtů lze přímo sečíst. Vzpomeňme si opět na známý vzorec
$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k$$
a položme $a = 1$ a $b = q$, po jednoduché úpravě pak získáváme hledaný součet
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \tag{4.2}$$
Takže s využitím příkladu č. 3.59 dostáváme $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-q}$. V závislosti na q proto součet můžeme vyjádřit následovně
$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1.$$
Poznamenejme, že z rovnice (4.2) také plyne divergence řady (4.1) pro $q > 1$ nebo $q \leq -1$. Pokud $q = 1$, pak lze také snadno ověřit, že diverguje.

Poznámka 4.5: Součet v rovnici (4.2) lze odvodit více způsoby. Jednou možností je využít známého vzorce
$$x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} y^k,$$
platného pro $x, y \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$, kam dosadíme $x = 1$, $y = q$ a $n+1$ místo n, čímž získáme rovnost
$$1 - q^{n+1} = (1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k,$$
která po jednoduché úpravě přesně dává (4.2).

Nebo si můžeme uvědomit, jak se chová s_n vůči násobení kvocientem q. Konkrétně
$$qs_n = s_{n+1} - 1 = s_n + q^{n+1} - 1.$$
Vyjádříme-li odtud s_n, tak opět získáváme (4.2).

Příklad 4.6: Uvažujme číselnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická posloupnost s diferencí d. Snadno spočteme částečné součty jako

$$s_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Řada je tedy konvergentní, právě když $a_1 = d = 0$.

4.2 Kritéria konvergence číselných řad

O některých řadách můžeme rovnou rozhodnout, že divergují, aniž bychom složitě zkoumali jejich částečné součty. Zamyslíme-li se nad definicí konvergence řady pak by intuitivně mělo být jasné, že k tomu aby bylo možné řadu sečíst, tak posloupnost sčítaných čísel musí mít nulovou limitu. Přesněji tuto myšlenku vystihuje následující věta a její důsledek.

Věta 4.7 (Nutná podmínka konvergence)**:** Pokud řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konverguje, *potom* pro limitu jejích sčítanců platí $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

Důkaz. Označme $S \in \mathbb{R}$ součet naší konvergentní řady a $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ posloupnost jejích částečných součtů. Pro libovolné kladné celé n platí

$$0 \le |a_n| = |s_n - s_{n-1}| = |s_n - S + S - s_{n-1}| \le |s_n - S| + |S - s_{n-1}|.$$

Protože $S = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ dostáváme z věty o sevřené posloupnosti $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. □

Nejčastěji předchozí větu používáme v následujícím tvaru.

Důsledek 4.8: Pokud limita posloupnosti $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ je nenulová nebo neexistuje, *potom* řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ není konvergentní.

Příklad 4.9: O řadách

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{k+3},$$

můžeme ihned díky důsledku č. 4.8 tvrdit, že divergují, protože (popořadě)

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt{k} = +\infty, \quad \lim_{k\to+\infty} (-1)^k \text{ neexistuje}, \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{k+2}{k+3} = 1.$$

Odvodit takovéto tvrzení přímo z definice konvergence řady není triviální. Zkuste to!

Podmínka ve větě 4.7 je pouze nutná. Pokud posloupnost sčítanců konverguje k nule, tak nemůžeme tvrdit, že řada konverguje. Následující příklad ukazuje řadu jejíž členy konvergují k nule a zároveň není konvergentní.

Příklad 4.10: Uvažme řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}},$$

tedy $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$, pro $k = 1, 2, \ldots$ Víme již, že platí

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

Ale pro částečné součty $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ platí

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Proto $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$. Zkoumaná řada diverguje.

K odvození dalších kritérií pro testování konvergence řad budeme opět potřebovat Bolzanovo–Cauchyovo kritérium pro řady.

Věta 4.11 (Bolzano-Cauchy)**:** Řada $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konverguje právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{R}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ a $p \in \mathbb{N}$ platí

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Důkaz. Jedná se pouze o použití Bolzanova–Cauchyova kritéria konvergence na posloupnost částečných součtů příslušné řady a přeznačení některých symbolů. □

Všimněte si, že má-li řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nezáporné členy, pak je posloupnost jejích částečných součtů monotónní (vzpomeňte na větu o limitě monotónní posloupnosti). Víme tedy, že tato řada buď konverguje, nebo je limita jejích částečných součtu rovna $+\infty$. Máme-li řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ s členy různých znamének, pak je přirozené ptát se, v jakém vztahu je její konvergence vzhledem k řadě $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$, která už má nezáporné členy.

Definice 4.12: Číselnou řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nazýváme **absolutně konvergentní**, pokud číselná řada $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konverguje.

Absolutní konvergence řady implikuje konvergenci řady. Skutečně, platí následující věta.

Věta 4.13: Pokud řada absolutně konverguje, *potom* tato řada konverguje.

Důkaz. Použijeme Bolzanova-Cauchyova kritéra pro konvergenci řady. Buď $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolutně konvergentní řada. Potom pro $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ a $p \in \mathbb{N}$ je

$$\left|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}\right| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ tedy konverguje. □

Poznamenejme, že řady které jsou konvergentní, ale nejsou absolutně konvergentní, jsou citlivé na změnu pořadí sčítání členů. Jinak řečeno, u absolutně konvergentní řady nezáleží na pořadí, v jakém členy sčítáme, výsledek bude vždy stejný. Tak tomu ale není u řad které konvergují neabsolutně. Blíže se této problematice na tomto místě věnovat nebudeme.

Poznámka 4.14 (Černá magie)**:** Obecně je nutné být opatrný při čistě formálních (a neplatných) operacích, mohli bychom tak získat na první pohled neuvěřitelné výsledky. Uvažme třeba následující řadu,

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k,$$

o které víme, že je divergentní a *nemá* součet. Formálně ovšem

$$S = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 - S$$

a tedy $S = 1/2$. V které části „výpočtu" jsme se dopustili podvodu?

Věta 4.15 (Leibnizovo kritérium)**:** Buď $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ monotónní posloupnost konvergující k nule. Potom je řada

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k \tag{4.3}$$

konvergentní.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že posloupnost $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ je klesající a tedy i tvořená kladnými členy. Označme opět $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ posloupnost částečných součtů naší řady (4.3), tj. $s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$. Ukažme nejprve, že vybraná posloupnost $(s_{2n+1})_{n=0}^{\infty}$ je konvergentní. Posloupnost $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ je klesající a proto pro $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnosti

$$s_{2n+1} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{2n} - a_{2n+1}) \geq 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$$

a

$$s_{2n+1} = a_0 + (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{2n} - a_{2n-1}) - a_{2n+1} \leq a_0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + 0 = a_0.$$

Jinak řečeno, posloupnost $(s_{2n+1})_{n=0}^{\infty}$ je omezená (ukázali jsme, že všechny její členy leží v intervalu $\langle 0, a_0 \rangle$). Tato posloupnost je ale navíc i rostoucí

$$s_{2n+3} = s_{2n+1} + \underbrace{a_{2n+2} - a_{2n+3}}_{\geq 0} \geq s_{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Podle věty o limitě monotonní posloupnosti proto existuje její konečná limita, označme ji jako $s_* = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} \in \mathbb{R}$.

Protože ale $s_{2n} = s_{2n+1} + a_{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, a dle jednoho z předpokladů dokazované věty je $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$, platí $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s_* + 0 = s_*$.

Přímo z definice limity posloupnosti nyní ihned plyne $\lim_{n\to\infty} s_n = s_* \in \mathbb{R}$ a řada (4.3) je proto konvergentní. ☐

Poznámka 4.16: Leibnizovo kritérium platí i pro řady tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k,$$

kde $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost záporných čísel konvergující k nule. Skutečně, stačí si uvědomit, že

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k = -\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(-a_k)$$

a $(-a_k)_{k=0}^{\infty}$ je klesající posloupnost kladných čísel konvergující k nule.

Příklad 4.17: Příkladem konvergentní řady, která ale není absolutně konvergentní, je řada

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}.$$

Skutečně, tato řada konverguje podle Leibnizova kritéria, protože posloupnost $(1/k)_{k=1}^{\infty}$ má kladné členy a monotónně konverguje k nule. Řada z absolutních hodnot členů je $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, o které již víme, že diverguje.

Následující kritérium nám umožňuje rozhodovat o konvergenci a divergenci řady porovnáním s vhodně zvolenou řadou o které víme, jestli konverguje či diverguje.

Věta 4.18 (Srovnávací kritérium)**:** Buďte $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ a $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ číselné řady. Potom platí následující dvě tvrzení.

a. Nechť existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ větší než k_0 platí nerovnosti $0 \leq |a_k| \leq b_k$ a nechť řada $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konverguje. Potom řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolutně konverguje.

b. Nechť existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ větší nebo rovno než k_0 platí nerovnosti $0 \leq a_k \leq b_k$ a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverguje. Potom i řada $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ diverguje.

Důkaz bodu a. Opět použijeme Bolzanova–Cauchyova kritéria. Lze postupovat shodně jako v důkazu věty 4.13. Tvrzení opět plyne z následujícího odhadu,

$$\big||a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}|\big| = |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| \leq b_n + b_{n+1} + \cdots b_{n+p}.$$

□

Důkaz bodu b. Dle předpokladu víme, že

$$\sum_{k=k_0}^{n} a_k \leq \sum_{k=k_0}^{n} b_k$$

a limita levé strany je $+\infty$. Odtud ihned plyne (v podstatě definice limity posloupnosti), že i posloupnost částečných součtů řady $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ diverguje. □

Již víme, že řada $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konverguje pro $|q| < 1$. Tohoto faktu s výhodou využijeme v důkazu následující věty, která nese jméno po Jeanu d'Alembertovi (francouzský matematik, 1717 – 1783).

Věta 4.19 (d'Alembertovo kritérium)**:** Nechť $a_k > 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}_0$. Pokud

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1,$$

potom řada $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverguje. Pokud ovšem

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1,$$

potom řada $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konverguje.

Důkaz prvního tvrzení. Za uvedeného předpokladu z podílového kritéria (věta 3.60) pro posloupnost $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ plyne

$$\lim_{k\to\infty} a_k = +\infty.$$

Není tedy splněna nutná podmínka konvergence řady $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ (věta 4.7) a tato je proto divergentní. □

Důkaz druhého tvrzení. Označme
$$\tilde{q} := \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}.$$
Dle našich předpokladů platí $0 \leq \tilde{q} < 1$. Uvažme libovolné q splňující $\tilde{q} < q < 1$. Věta 3.50 implikuje existenci $k_0 \in \mathbb{N}$ takového, že je-li $k \geq k_0$ pak platí nerovnost $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1$. Odtud nahlédneme, že pro každé $k \geq k_0$ platí
$$a_k \leq q^{k-k_0} a_{k_0}.$$
Už ale víme, že řada $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konverguje pro $|q| < 1$. Podle srovnávacího kritéria (věta 4.18) tedy konverguje i řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. □

Poznamenejme, že d'Alembertovo kritérium zdaleka není všemocné. Například o řadě $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ víme, že diverguje. Ovšem pro limitu podílů platí
$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \frac{k}{k+1} = 1.$$
D'Alembertovo kritérium tedy o konvergenci, resp. divergenci, této konkrétní řady *nerozhodne*. Dokonce nerozhodne ani o řadě $\sum_{k=1}^{\infty} k$. Tato situace je podobná jako u podílového kritéria pro posloupnosti.

Existují další kritéria pro vyšetřování konvergence číselných řad (Cauchyovo, Gaussovo, Dirichletovo, Abelovo, aj.). V poslední části přednášky odvodíme ještě integrální kritérium.

Příklad 4.20: Zkoumejme konvergenci řady
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{1000}}{2^k}.$$
Řada má kladné sčítance, můžeme se proto pokusit použít d'Alembertovo kritérium. Musíme vypočíst hodnotu následující limity
$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(k+1)^{1000}}{2^{k+1}}}{\frac{k^{1000}}{2^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^{1000} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{1000} = \frac{1}{2} \cdot (1+0)^{1000} = \frac{1}{2}.$$
Protože $\frac{1}{2} < 1$ a řada má kladné členy d'Alembertovo kritérium nám umožňuje tvrdit, že zadaná řada je (absolutně) konvergentní.

Přistupme nyní k první jednoduché aplikaci číselných řad. Pomocí číselné řady můžeme dát přirozený význam nekonečnému desetinnému číselnému rozvoji. Číselné řady budou hrát důležitou roli i v následující podkapitole o Eulerově čísle (podkapitola č. 4.3) a i později při výkladu o Taylorových řadách (kapitola č. 7).

Příklad 4.21: Buď $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ číselná posloupnost jejíž členy nabývají hodnot pouze z množiny $\{0, 1, \ldots, 8, 9\}$. Potom klademe
$$0.a_1a_2a_3\cdots := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k}.$$
Řada na pravé straně definiční rovnosti konverguje a její součet jednoznačně (viz větu č. 3.13) definuje jisté reálné číslo. Konvergence řady plyne ze srovnávacího kritéria, zřejmě
$$0 \leq a_k \cdot 10^{-k} \leq 9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^k$$

a řada $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$ konverguje protože jde o součet geometrické posloupnosti s kvocientem $\frac{1}{10}$, který je v absolutní hodnotě menší než 1.

4.3 Exponenciální funkce a Eulerovo číslo

V této kapitole se budeme podrobně věnovat exponenciální funkci, která představuje jednu z nejdůležitějších matematických funkcí. Dále zavedeme Eulerovo číslo (Leonhard Euler, švýcarský matematik, 1707 – 1783). Jak uvidíme, oba tyto matematické objekty stojí na pojmu číselné řady, který jsme zavedli v předcházející sekci.

Pro každé reálné x uvažme číselnou řadu[23]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots . \tag{4.4}$$

Pomocí d'Alembertova kritéria se snadno přesvědčíme o absolutní konvergenci této řady. Pro $x = 0$ řada (4.4) očividně absolutně konverguje. Pro $x \neq 0$ pro limitu podílů platí

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right|}{\left|\frac{x^k}{k!}\right|} = |x| \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0 < 1.$$

Podle d'Alembertova kritéria proto řada $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!}$ konverguje a tudíž řada (4.4) konverguje absolutně pro libovolné $x \in \mathbb{R}$. Výraz (4.4) má tedy pro každé $x \in \mathbb{R}$ jednoznačný smysl jakožto reálné číslo.

Po těchto počátečních úvahách můžeme přejít k formální definici exponenciální funkce.

Definice 4.22: Zobrazení, které každému $x \in \mathbb{R}$ přiřazuje součet konvergentní řady (4.4), nazýváme **exponenciální funkcí**. Její funkční hodnotu v bodě x značíme symbolem e^x. Platí tedy

$$e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

Nyní se budeme zabývat vlastnostmi funkce definované vztahem (4.5). Ukážeme, že takováto funkce splňuje všechny vztahy, které bychom od exponenciální funkce očekávali.

Věta 4.23 (Základní vlastnosti exponenciální funkce)**:** Exponenciální funkce oplývá následujícími vlastnostmi:

a. $e^0 = 1$,

b. pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí $e^{x+y} = e^x e^y$,

c. pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $e^x > 0$ a dále $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$,

d. exponenciála je ostře rostoucí funkce, pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ splňující nerovnost $x < y$ platí nerovnost $e^x < e^y$.

[23] Používáme algebraickou konvenci $0^0 = 1$.

Důkaz. a. Plyne přímo z dosazení[24] $x = 0$ do definičního vztahu (4.5),

$$e^0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1.$$

b. Uvažme $x, y \in \mathbb{R}$. Potom[25]

$$\begin{aligned} e^x \cdot e^y &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{y^\ell}{\ell!} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{k} \frac{x^\ell}{\ell!} \frac{y^{k-\ell}}{(k-\ell)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} x^\ell y^{k-\ell} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = e^{x+y}. \end{aligned}$$

c. Z předchozích, již dokázaných, bodů a. a b. plyne rovnost

$$e^x e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1 \tag{4.6}$$

platná pro libovolné $x \in \mathbb{R}$. Tato rovnost implikuje nenulovost e^x pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ (můžeme argumentovat sporem: kdyby $e^x = 0$ pro jisté $x \in \mathbb{R}$, pak z odvozené rovnosti dostáváme $0 = 1$, což je spor). Z rovnosti (4.6) pak ihned dostáváme $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.

Buď dále $x \geq 0$. Potom přímo z definice exponenciály dostáváme

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq 1.$$

Předpoklad $x \geq 0$ je zde podstatný, díky němu víme, že posloupnost částečných součtů konvergentní řady $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ je ostře rostoucí a její součet proto můžeme ostře zdola odhadnout prvním členem posloupnosti částečných součtů, což je číslo 1.

Máme-li nyní $x < 0$, pak z předchozího odstavce a (4.6) plyne

$$e^x = \frac{1}{e^{-x}} > 0.$$

Celkem proto nerovnost $e^x > 0$ platí pro každé $x \in \mathbb{R}$.

d. Uvažujme $z > 0$. Nerovnost $e^z > 1$ odvozená v důkazu předchozího bodu dále implikuje, že pro *záporné* z platí

$$e^z = \frac{1}{e^{-z}} < 1.$$

Je-li nyní $x < y$, pak $e^y = e^{y-x} e^x > 1 \cdot e^x = e^x$, protože $y - x > 0$. □

Pomocí exponenciální funkce můžeme přirozeně definovat Eulerovo číslo jakožto funkční hodnotu exponenciální funkce v bodě 1.

[24] Všimněte si, že teď využíváme konvenci $0^0 = 1$.

[25] Pozor, zde jsme se dopustili kroku, který by bylo vhodné podrobněji okomentovat. Konkrétně jsme vynásobili dvě absolutně konvergentní číselné řady. Správnost tohoto kroku nedokazujeme.

Definice 4.24 (Eulerovo číslo)**: Eulerovo číslo** definujeme pomocí exponenciální funkce předpisem

$$e := e^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}. \tag{4.7}$$

Poznámka 4.25: V této poznámce provedeme první hrubý odhad hodnoty Eulerova čísla. Označme $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost částečných součtů řady (4.7), tedy

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tato posloupnost je očividně rostoucí a omezená. Skutečně,

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n} \leq \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 3. \end{aligned}$$

Součet řady (4.7), tedy Eulerovo číslo, leží mezi čísly 2.5 (součet prvních tří členů řady) a 3 (horní odhad provedený výše).

4.4 Přirozený logaritmus

Připomeňme si výsledek předchozí sekce. Exponenciální funkce $x \mapsto e^x$ je ostře rostoucí (a tedy i prostá). Z bodu c. věty č. 4.23 dále víme, že e^x je kladné pro každé reálné x. Platí ale víc, oborem hodnot exponenciální funkce je[26] množina $(0, +\infty)$.

Definice 4.26: Existuje tedy inverzní funkce k exponenciále, která je také ostře rostoucí a zobrazuje $(0, +\infty)$ na $\mathbb{R}$. Tuto funkci nazýváme **přirozeným logaritmem** a značíme symbolem ln.

Věta 4.27 (Vlastnosti přirozeného logaritmu)**:** Přirozený logaritmus ln oplývá následujícími vlastnostmi:

a. pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\ln e^x = x$ a pro každé $x \in (0, +\infty)$ platí $e^{\ln x} = x$,

b. $\ln e = 1$ a $\ln 1 = 0$,

c. pro $x, y \in (0, +\infty)$ platí $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

Důkaz. a. Plyne přímo z definice inverzní funkce (viz definici č. 2.26).

b. Plyne přímo z definice inverzní funkce a vztahů $e^1 = e$ a $e^0 = 1$.

c. Uvažme $x, y \in (0, +\infty)$ a označme $x' := \ln x$ a $y' := \ln y$, čili $e^{x'} = x$ a $e^{y'} = y$. Dle bodu b. věty č. 4.23 platí $xy = e^{x'+y'}$, neboli $\ln(xy) = x' + y' = \ln x + \ln y$.

□

[26]Pozor! Tento fakt jsme zatím neodvodili. O jeho pravdivosti se přesvědčíme až za pomoci spojitosti, konkrétně ve větě 5.48.

4.5 Obecná mocnina

Pomocí exponenciální a logaritmické funkce zavedené v předchozí sekci nyní definujeme obecnou mocninu (definice č. 4.28). Jinak řečeno, cílem této sekce je dát korektní význam symbolu a^x, kde $a > 0$ a $x \in \mathbb{R}$.

Připomeňme, že pro $a \in \mathbb{R}$ a kladné $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-krát}}. \tag{4.8}$$

Pro záporné celé n a nenulové a pak klademe

$$a^n := \frac{1}{a^{-n}}.$$

Tato definice má smysl neboť ve jmenovateli je $-n$ kladné a můžeme proto použít vztah (4.8). Konečně položíme[27] $a^0 := 1$

Symbol a^n má tedy dobrý smysl pro libovolné $n \in \mathbb{Z}$ a nenulové $a \in \mathbb{R}$. Čtenář jistě snadno nahlédne, že při uvedené definici platí rovnosti

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad \text{a} \quad \big(a^n\big)^m = a^{n\cdot m}$$

pro libovolná $n, m \in \mathbb{N}_0$ a $a \in \mathbb{R}$ (resp. $n, m \in \mathbb{Z}$ a $0 \neq a$).

Nyní se zbavíme požadavku na celočíselnost exponentu. Klíčem k úspěchu je následující definice.

Definice 4.28 (Obecná mocnina)**:** Pro $a \in (0, +\infty)$ a $x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$a^x := e^{x \ln a}.$$

Poznamenejme, že tato definice není v kolizi s dříve zavedenou exponenciální funkcí. Pro $a = e$ totiž máme

$$e^x = e^{x \ln e} = e^{x \cdot 1} = e^x.$$

Na levé straně symbol e^x chápeme jako obecnou mocninu a na pravé straně jako exponenciální funkci.

Pojďme si nyní rozmyslet, jaké vlastnosti má námi zavedená obecná mocnina a zda-li rozšiřuje celočíselnou mocninu zmíněnou na začátku této sekce.

Věta 4.29 (Vlastnosti obecné mocniny)**:** Pro $a, b > 0$ platí

1. $a^{x+y} = a^x a^y$,
2. $\big(a^x\big)^y = a^{xy}$,
3. $(ab)^x = a^x b^x$.

pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$.

[27] I pro $a = 0$, pozor na toto časté nedorozumnění!

Důkaz. Uvažme tedy $a, b > 0$ a $x, y \in \mathbb{R}$. Potom dle definice 4.28 platí

$$a^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x\ln a + y\ln a} = e^{x\ln a}e^{y\ln a} = a^x a^y.$$

Podobně

$$\left(a^x\right)^y = e^{y\ln a^x} = e^{y\ln e^{x\ln a}} = e^{yx\ln a} = a^{yx} = a^{xy}.$$

Na konec s využitím věty č. 4.27

$$(ab)^x = e^{x\ln(ab)} = e^{x(\ln a+\ln b)} = e^{x\ln a}e^{x\ln b} = a^x b^x.$$

□

Obdobně jako u exponenciální funkce se můžeme na obecnou mocninu dívat jako na funkci $x \mapsto a^x$. V tomto případě její vlastnosti závisí na konkrétní hodnotě a.

Věta 4.30: Funkce definovaná předpisem a^x je:

- ostře rostoucí pokud $a > 1$,
- konstantní pokud $a = 1$,
- ostře klesající pokud $0 < a < 1$.

Obor hodnot funkce a^x je interval $(0, +\infty)$ pro $a \neq 1$ a $\{1\}$ pro $a = 1$.

Důkaz. Pokud je $a = 1$, pak $a^x = e^{x\ln a} = e^{x\ln 1} = e^0 = 1$. Uvažme $a > 1$. Z definice logaritmu víme, že $\ln a > 0$. Je-li $x < y$ pak $x\ln a < y\ln a$ a růst exponenciální funkce implikuje

$$a^x = e^{x\ln a} < e^{y\ln a} = a^y.$$

Zbývající případ $0 < a < 1$ lze vyšetřit analogicky.

Pokud $a = 1$ pak je oborem hodnot množina $\{1\}$. V ostatních případech má a^x stejný obor hodnot jako exponenciála, tedy $(0, +\infty)$. □

Definice 4.31: Funkce a^x je tedy pro $0 < a \neq 1$ ryze monotonní a tudíž prostá. Její inverzní funkci nazýváme *logaritmem o základu* a a značíme $\log_a$.

Poznámka 4.32: Pro každé $a, x > 0$ dostáváme

$$e^{\log_a x} = e^{\log_a x \cdot \frac{\ln a}{\ln a}} = e^{\left(\log_a x \cdot \ln a\right)\frac{1}{\ln a}} = \left(a^{\log_a x}\right)^{\frac{1}{\ln a}} = x^{\frac{1}{\ln a}} = e^{\frac{\ln x}{\ln a}}.$$

Z prostoty exponenciální funkce tudíž dostáváme $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$. Z tohoto vztahu již plynou všechny ostatní notoricky známé vlastnosti logaritmu.

Podobný způsobem (viz cvičení) lze dokázat známou rovnost

$$\log_a b^x = x\log_a b$$

platnou pro libovolné $0 < a \neq 1$, $b > 0$ a $x \in \mathbb{R}$.

5 Limita a spojitost funkce

5.1 Limita funkce

U posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jsme zkoumali, jak se chovají jejich členy pro velká n. Pokud se jejich členy „blížily“ k jistému $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, pak jsme tuto hodnotu nazývali limitou této posloupnosti. Význam slova „blížit“ přesně popisovala definice č. 3.12, která říkala, že v „každém“ okolí bodu α leží všechny členy posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ až na konečný počet výjimek.

Nyní u funkcí se můžeme ptát, jak se zadaná funkce f chová, když se nezávislá proměnná $x \in D_f$ blíží k zadanému bodu $a \in \mathbb{R}$, případně $\pm\infty$ (tj. roste nad/pod všechny meze). V následující definici limity funkce si všimněte podobnosti s definicí limity posloupnosti (definice 3.12).

Definice 5.1 (Limita funkce / *limit of a function*)**:** Buďte f reálná funkce reálné proměnné a $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Nechť f je definovaná na okolí bodu a, s možnou výjimkou bodu a samotného. Řekneme, že $c \in \overline{\mathbb{R}}$ je **limitou funkce** f **v bodě** a, právě když pro každé okolí H_c bodu c existuje okolí H_a bodu a takové, že z podmínky

$$x \in H_a \setminus \{a\}$$

plyne

$$f(x) \in H_c.$$

V symbolech

$$\big(\forall H_c\big)\big(\exists H_a\big)\big(\forall x \in D_f\big)\big(x \in H_a \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in H_c\big).$$

Tuto skutečnost zapisujeme

$$\lim_{x \to a} f(x) = c, \text{ případně } \quad \lim_{a} f = c.$$

Poznámka 5.2: Je možné, že z dřívějšího studia znáte pojmy „vlastní“ a „nevlastní“ limita ve „vlastním“ / „nevlastním“ bodě. V BI-ZMA tyto pojmy nepoužíváme. Definice všech těchto pojmů je *obsažena* v naší definici č. 5.1.

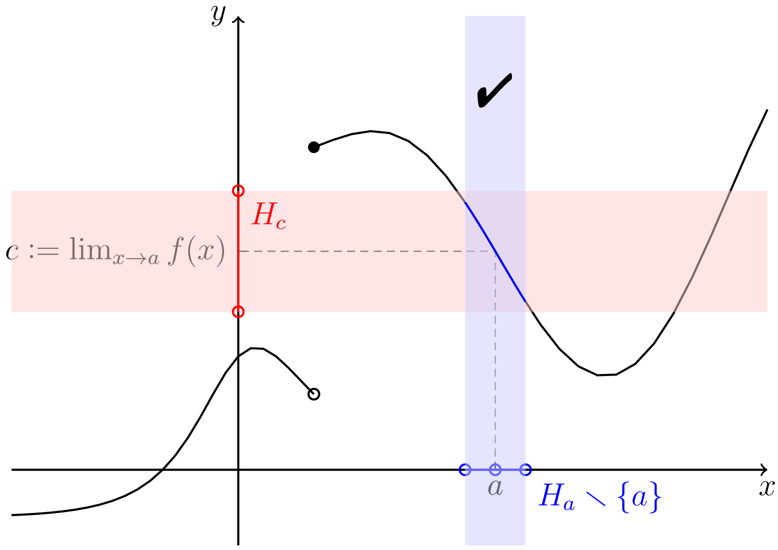
Poznámka 5.3: V případě kdy a i c jsou prvky $\mathbb{R}$ je podmínka

$$\lim_{x \to a} f(x) = c$$

ekvivalentní požadavku, aby f byla definována na okolí bodu a s možnou výjimkou bodu a samotného a

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists \delta > 0\big)\big(\forall x \in D_f\big)(0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - c| < \varepsilon\big).$$

Analogické formule lze zformulovat pro různé kombinace případů $a, c \in \overline{\mathbb{R}}$.



Obrázek 5.1: Limita funkce, ilustrace pro $a, c \in \mathbb{R}$.

Hodnota limity funkce f v bodě a závisí pouze na chování funkce f na okolí bodu a *mimo* bod a. Limita funkce f v bodě a může být různá od funkční hodnoty $f(a)$. Příkladem budiž funkce $f(x) := \operatorname{sgn} x^2$ definovaná na celém $\mathbb{R}$. Ačkoliv pro funkční hodnotu platí $f(0) = 0$, pro limitu máme $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

Funkce f v bodě a ani nemusí být definovaná, přesto limita může existovat. Příkladem je funkce $f(x) := \operatorname{sgn} \frac{1}{x^2}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ačkoliv 0 nepatří do D_f platí $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

K snazšímu představení si požadavků v definici 5.1 uvádíme obrázek 5.1.

V definici 5.1 jsme se dívali na chování funkce f na celém okolí bodu a (vyjma bodu a samotného). Podobně můžeme zkoumat chování funkce pouze vpravo, či vlevo, od zadaného bodu a. Získáváme tak pojem limity funkce zprava, či zleva.

Definice 5.4: Buďte f reálná funkce reálné proměnné a $a \in \mathbb{R}$. Nechť f je definovaná na levém, resp. pravém, okolí bodu a s možnou výjimkou bodu a samotného. Řekneme, že $c \in \overline{\mathbb{R}}$ je **limitou funkce f v bodě a zleva, resp. zprava**, právě když pro každé okolí H_c bodu c existuje levé okolí H_a^-, resp. pravé okolí H_a^+, bodu a takové, že z podmínky

$$x \in H_a^- \setminus \{a\}, \text{ resp. } x \in H_a^+ \setminus \{a\},$$

plyne

$$f(x) \in H_c.$$

Zapisujeme

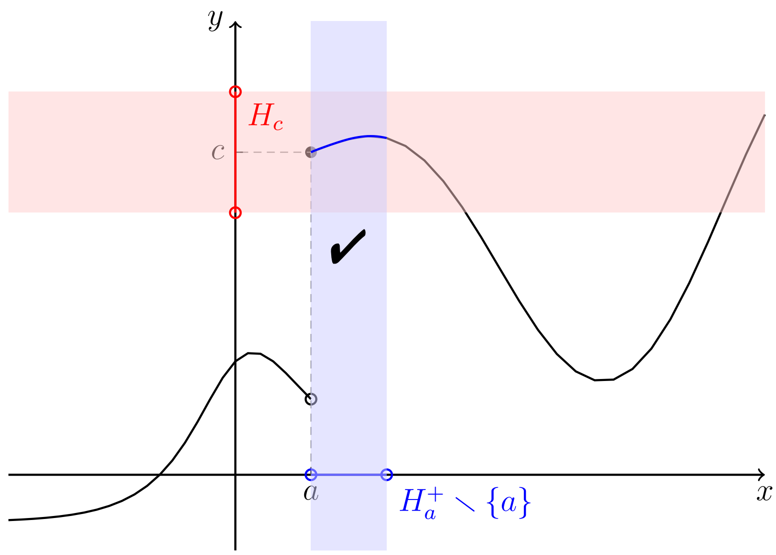
$$\lim_{x\to a-} f(x) = c, \text{ případně } \lim_{a-} f = c,$$

resp.

$$\lim_{x\to a+} f(x) = c, \text{ případně } \lim_{a+} f = c.$$

Pro lepší představu odkazujeme čtenáře na obrázek 5.2. Na závěr této podkapitoly uveďme několik příkladů výpočtů limit jednoduchých funkcí.

Příklad 5.5: Limita konstantní funkce je rovna dané konstantě.



Obrázek 5.2: Jednostranná limita funkce, ilustrace pro $a, c \in \mathbb{R}$.

Je-li $c \in \mathbb{R}$ zadaná konstanta a $f(x) = c$ pro každé $x \in D_f = \mathbb{R}$, pak pro libovolný bod $a \in \mathbb{R}$ platí $\lim_{x\to a} f(x) = c$. Skutečně, buď $H_c(\varepsilon)$ libovolné okolí bodu c s poloměrem $\varepsilon > 0$. V případě naší konstantní funkce můžeme zvolit libovolné okolí $H_a(\delta)$ bodu a s poloměrem $\delta > 0$. Pak totiž pro $x \in H_a(\delta) \setminus \{a\}$ jistě platí $f(x) = c \in H_c(\varepsilon)$.

Příklad 5.6: Pro libovolné $a \in \overline{\mathbb{R}}$ platí

$$\lim_{x\to a} x = a.$$

Skutečně, vezmeme-li libovolné okolí H_a bodu a pak pro $x \in H_a \setminus \{a\}$ zcela jistě platí, že $x \in H_a$.

Příklad 5.7: Platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Skutečně, buď $H_{+\infty}(c)$ okolí bodu $+\infty$ a $c > 0$. Hledáme okolí $H_0(\delta)$ bodu 0 o poloměru $\delta > 0$ takové, že pokud $x \in H_0(\delta) \setminus \{0\}$ pak $\frac{1}{x^2} \in H_{+\infty}(c)$. Požadujeme tedy aby

$$\frac{1}{x^2} > c \;\Leftrightarrow\; x^2 < \frac{1}{c} \;\Leftrightarrow\; |x| < \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

Stačí proto zvolit třeba $\delta := \frac{1}{\sqrt{c}}$.

Pokud bychom uvažovali $H_{+\infty}(d)$ s $d \leq 0$, pak stačí zvolit třeba $c = 1$ z předchozího odstavce, $H_{+\infty}(c) \subset H_{+\infty}(d)$, a zkonstruovat δ jak je popsáno v předchozím odstavci.

Příklad 5.8: Platí

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Ukažme nejprve první z limit. Buď $H_{+\infty}(c)$ libovolné okolí bodu $+\infty$ dané konstantou $c > 0$ (nekladné c můžeme ošetřit podobně jako v předchozím příkladu). Zvolíme-li $\delta = \frac{1}{c} > 0$, pak pro $x \in (0, \delta) = H_0^+(\delta) \setminus \{0\}$ platí

$$0 < x < \delta \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} = c.$$

Podobně v druhém příkladě pro libovolné okolí $H_{-\infty}(c)$ bodu $-\infty$ zadané konstantou $c < 0$ stačí položit $\delta = \frac{1}{|c|} > 0$. Pak pro libovolné $x \in H_0^-(\delta) \setminus \{0\} = (-\delta, 0)$ platí

$$-\delta < x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < -\frac{1}{\delta} = -|c| = c.$$

Vzpomeňte, že $c < 0$. Na tomto místě je dobré si připomenout graf hyperboly $y = \frac{1}{x}$.

5.2 Vlastnosti limit funkcí

Při výpočtu limit posloupností často nevyužíváme přímo definici, ale znalost několika základních limit, viz předchozí kapitolu. Znalosti těchto základních limit lze využívat při výpočtu limit složitějších funkcí. Podobně tomu bylo i u posloupností. Ukažme si tedy, jak s limitami funkcí pracovat.

Nejprve si rozmysleme, jaký je vztah mezi jednostrannými a oboustrannými limitami.

Věta 5.9: Nechť $a \in \mathbb{R}$. Limita $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existuje a je rovna $c \in \overline{\mathbb{R}}$, právě když existují obě jednostranné limity $\lim\limits_{x \to a_+} f(x)$ a $\lim\limits_{x \to a_-} f(x)$ a obě jsou rovny c.

Důkaz. K důkazu si stačí rozmyslet obě implikace.

- Nechť existuje oboustranná limita $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$. Je-li H_c libovolné okolí bodu c, pak existuje H_a okolí bodu a takové, že je-li $x \in H_a \setminus \{a\}$, pak $f(x) \in H_c$. Tudíž pro $x \in H_a^{\pm} \setminus \{a\}$ je $f(x) \in H_c$. Jednostranné limity $\lim\limits_{x \to a_{\pm}} f(x)$ proto obě existují a obě jsou rovny c.

- Naopak. Nechť obě jednostranné limity existují a obě jsou rovny c. Buď H_c libovolné okolí bodu c. Pak existuje levé okolí $H_a^-(\varepsilon_1)$ bodu a a pravé okolí $H_a^+(\varepsilon_2)$ bodu a tak, že pokud $x \in H_a^-(\varepsilon_1) \setminus \{a\}$ nebo $x \in H_a^+(\varepsilon_2) \setminus \{a\}$, pak $f(x) \in H_c$. Položíme-li $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, pak pro $x \in H_a(\varepsilon) \setminus \{a\}$ platí $f(x) \in H_c$. Oboustranná limita funkce f v bodě a tedy existuje je rovna c.

□

Předešlou větu často využíváme na vyvracení existence oboustranné limity. Přesněji formulujeme následující tvrzení.

Důsledek 5.10: Nechť f je funkce a bod $a \in \mathbb{R}$. Platí-li aspoň jedna z podmínek

- obě jednostranné limity funkce f v bodě a existují a jsou různé,

- alespoň jedna z jednostranných limit funkce f v bodě a neexistuje,

potom limita funkce f v bodě a neexistuje.

Příklad 5.11: Limita

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$$

neexistuje. Skutečně, pro jednostranné limity platí

$$\lim_{x \to 0_+} \operatorname{sgn} x = 1,$$
$$\lim_{x \to 0_-} \operatorname{sgn} x = -1.$$

Podle předchozího důsledku oboustranná limita nemůže existovat ($1 \neq -1$). Na tomto místě je vhodné si připomenout graf funkce signum!

Příklad 5.12: Limita
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$
neexistuje. Opravdu, na konci předešlé podkapitoly jsme odvodili, že
$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Další věta nám ukazuje, jak souvisí pojmy „limita posloupnosti" a „limita funkce". Díky této větě můžeme některé limity posloupností počítat pomocí znalosti limity funkcí. Výhoda tohoto postupu spočívá v tom, že na limity funkcí můžeme použít nástroje diferenciálního počtu (jako například l'Hospitalovo pravidlo), které pro posloupnosti nemáme k dispozici.

Věta 5.13 (Heine)**:** $\lim_{x\to a} f(x) = c$, právě když je f definována na okolí bodu a (s možnou výjimkou bodu a) a pro každou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ s limitou a a splňující
$$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset D_f \setminus \{a\} \tag{5.1}$$
platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$.

Důkaz. Vynecháváme. □

Podmínku v rovnici (5.1) lze slovně přeformulovat takto: všechny členy posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ patří do definičního oboru funkce f a žádný z nich není roven a.

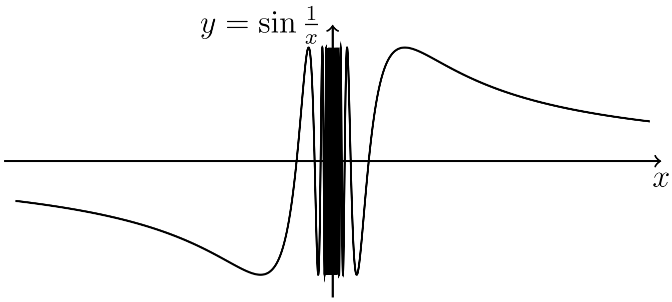
Důkaz Heineho věty vynecháváme. Implikace v jednom směru je snadná (rozmyslete která), druhá je již komplikovanější. Po drobné modifikaci platí Heineho věta i pro jednostranné limity funkce.

Věta 5.14 (Heine pro jednostranné limity)**:** $\lim_{x\to a-} f(x) = c$, resp. $\lim_{x\to a+} f(x) = c$, právě když je f definována na levém, resp. pravém, okolí bodu a a pro každou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ s limitou a a splňující
$$\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset D_f \cap (-\infty, a), \quad \text{resp.} \quad \{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset D_f \cap (a, +\infty),$$
platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$.

Příklad 5.15: Z dřívější přednášky o posloupnostech víme (viz větu 3.36), že pro libovolné $k \in \mathbb{N}$ a pro libovolnou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňující $a_n \geq 0$ a $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \langle 0, +\infty)$ platí $\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\alpha}$. Heineho věta (věta č. 5.13) pak implikuje
$$\lim_{x\to\alpha} \sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{\alpha}$$
pro každé $\alpha \in \langle 0, +\infty)$.

Tento fakt lze alternativně dokázat i přímo z definice limity funkce $\sqrt[k]{x}$ v bodě α.

Heineho věta nám dále umožňuje zformulovat jednoduché kritérium pro vyvrácení existence (jednostranné) limity.



Obrázek 5.3: Graf funkce $\sin\frac{1}{x}$. Limita této funkce v bodě 0 neexistuje.

Důsledek 5.16: Nechť f je funkce definovaná na okolí bodu $a \in \overline{\mathbb{R}}$ a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě reálné posloupnosti patřící do D_f, mající limitu a a splňující podmínky $x_n \neq a$ a $z_n \neq a$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pokud limity

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} f(z_n)$$

existují a jsou různé, nebo alespoň jedna z nich neexistuje, potom limita $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ neexistuje.

Příklad 5.17: Limita

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

neexistuje. Označme $f(x) := \sin\frac{1}{x}$ a položme

$$x_n := \frac{1}{2\pi n}, \quad z_n := \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Tyto posloupnosti splňují

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = 0 \quad \text{a} \quad \{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{z_n | n \in \mathbb{N}\} \subset D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Konečně

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(2\pi n) = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Pro představu uvádíme obrázek 5.3. Z obrázku je patrné, že limita posloupnosti obrazů závisí na způsobu jakým se k bodu 0 blížíme[28].

Velmi často se setkáváme se součtem, součinem, či podílem funkcí. Pro jejich limity platí analogická věta jako v případě posloupností. Porovnejte tuto větu s větou 3.31.

Věta 5.18: Nechť f a g jsou funkce a a prvek $\overline{\mathbb{R}}$. Potom

$$\lim_a (f+g) = \lim_a f + \lim_a g,$$
$$\lim_a f \cdot g = \lim_a f \cdot \lim_a g,$$
$$\lim_a \frac{f}{g} = \frac{\lim_a f}{\lim_a g},$$

platí v případě, že výrazy na pravé straně jsou definovány a v posledním případě za předpokladu, že $\frac{f}{g}$ je definována na okolí bodu a s možnou výjimkou bodu a samotného.

[28] „Způsob blížení se k 0“ v tomto případě přesně definují posloupnosti (x_n) a (z_n).

Důkaz. Důkaz této věty je potřeba provést ve všech možných případech[29]. Ukážeme pouze případ součtu konečných limit, $\lim_a f = c \in \mathbb{R}$, $\lim_a g = d \in \mathbb{R}$,

$$x \in H_a \quad \Rightarrow \quad |f(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ a } |g(x) - d| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Je-li tedy $x \in H_a$, pak pomocí trojúhelníkové nerovnosti platí

$$|f(x) + g(x) - c - d| = \big|\big(f(x) - c\big) + \big(g(x) - d\big)\big| \leq |f(x) - c| + |g(x) - d| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tudíž $\lim_a (f + g) = c + d$. □

Poznamenejme, že analogická věta platí i pro jednostranné limity. Počítat limitu polynomů je díky předcházející větě velmi jednoduché.

Příklad 5.19: Buď $P(x)$ libovolný polynom a $a \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a).$$

Již jsme ukázali, že $\lim\limits_{x \to a} x = a$ a víme $\lim\limits_{x \to a} c = c$. Použijeme-li mnohonásobně větu o limitě součtu a součinu funkcí (věta 5.18), ihned dostaneme tvrzení uvedené na začátku našeho příkladu. Například tedy platí

$$\lim_{x \to 2} \left(x^2 - 3x + 1\right) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = -1.$$

O něco složitější je počítat limitu racionálních lomených funkcí. Zde už může nastat více možných situací. Veškeré nástroje už ale máme připravené a následující příklad jen demonstruje jejich aplikaci.

Příklad 5.20: Vypočtěte limitu funkce

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^3 - 3x^2 + 2x}$$

v bodech $a = -1$, $b = 1$, $c = 2$ a $d = -\infty$.

Nejprve si všimněme, že jmenovatel lze rozložit na kořenové činitele

$$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x - 1)(x - 2),$$

tudíž $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$. Pro výpočet limity v bodě $a = -1$ můžeme proto použít větu o limitě podílu,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\lim_{x \to a} x^4 + 2x^2 - 3}{\lim_{x \to a} x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{0}{-6} = 0.$$

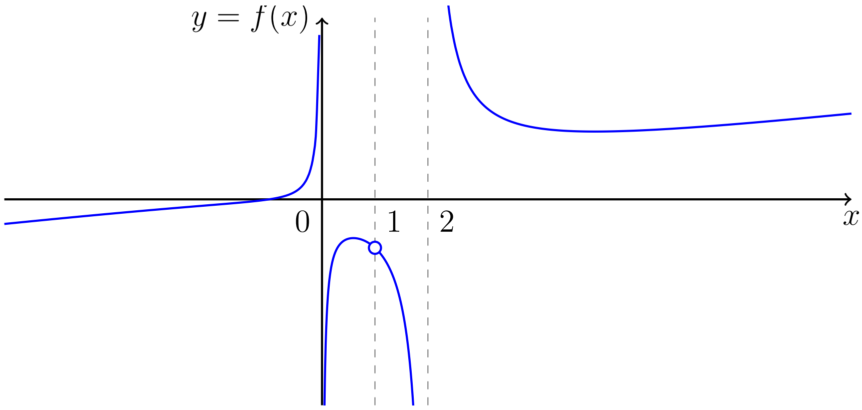
Dále, před výpočtem limity v bodě d upravme výraz pro $f(x)$ následovně

$$f(x) = \frac{x^4 \left(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}\right)}{x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = x \cdot \frac{1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}.$$

Použijeme-li nyní větu o limitě součtu a podílu, dostáváme

$$\lim_{x \to d} f(x) = -\infty \cdot \frac{1}{1} = -\infty.$$

[29] Alternativně bychom se mohli odvolat na Heinehu větu a znalost analogické věty pro posloupnosti.



Obrázek 5.4: Graf racionální lomené funkce z příkladu č. 5.20.

Pro výpočet limit v bodech b a c je vhodné upravit na součin kořenových činitelů i čitatel,

$$f(x) = \frac{(x^2+3)(x^2-1)}{x(x-1)(x-2)} = \frac{(x^2+3)(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x-2)} = \frac{(x^2+3)(x+1)}{x(x-2)}, x \in D_f.$$

Tudíž, opět pomocí předešlých vět,

$$\lim_{x\to b} = \frac{8}{-1} = -8, \quad \lim_{x\to c} f(x) \text{ neexistuje.}$$

Neexistence poslední limity plyne z nerovnosti jednostranných limit,

$$\lim_{x\to c+} f(x) = \frac{21}{2}\cdot(+\infty) = +\infty, \quad \lim_{x\to c-} f(x) = \frac{21}{2}\cdot(-\infty) = -\infty$$

Je dobré porovnat naše výsledky s grafem uvažované funkce, viz obrázek č. 5.4.

Příklad 5.21: Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-2}{x^3-x^2-x+1}.$$

V bodě $x = 2$ je jmenovatel roven 3, což je nenulové číslo. Podle věty o limitě podílu proto ihned dostáváme

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-2}{x^3-x^2-x+1} = \frac{4}{3}.$$

Příklad 5.22: Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^3-x^2-x+1}.$$

Nyní je limita typu $\frac{0}{0}$. Z polynomů v čitateli a jmenovateli proto můžeme vytknout kořenový činitel $x-1$,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^3-x^2-x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x+1}\cdot\frac{1}{x-1}.$$

Protože ale pro jednostranné limity platí

$$\lim_{x\to 1\pm} \frac{x+2}{x+1}\cdot\frac{1}{x-1} = \frac{3}{2}\cdot(\pm\infty) = \pm\infty,$$

původní limita podle důsledku 5.10 neexistuje.

Mnoho funkcí, na které narazíme, jsou složené funkce. Následující důležitá věta nám umožňuje počítat jejich limity, aniž bychom se museli obracet na definici limity.

Věta 5.23 (O limitě složené funkce)**:** Nechť f a g jsou funkce, a, b, c jsou prvky $\overline{\mathbb{R}}$ a platí tři podmínky

1. $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$,
2. $\lim\limits_{x\to b} f(x) = c$,
3. buď $(\exists H_a)(\forall x \in D_g \cap H_a \setminus \{a\})(g(x) \neq b)$ nebo $(b \in D_f$ a $f(b) = c)$.

Potom platí $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = c$.

Důkaz. Vynecháváme. □

Poznámka 5.24: Podmínka v bodě tři je důležitá. Například pokud uvážíme $f(x) = \operatorname{sgn} \frac{1}{x^2}$ a $g(x) = 0$, pak

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 1.$$

Podmínky v bodě jedna a dva jsou tedy splněny, ale ani jedna podmínka v bodě tři neplatí. Dále, složená funkce $f \circ g$ neexistuje, její definiční obor je prázdná množina. Nemá proto ani smysl počítat její limitu.

Hrubě řečeno lze říci, že pokud se vnitřní funkce na okolí bodu a nechová „pěkně“, nesplňuje bod tři předchozí věty, pak limita složené funkce nemusí existovat.

Příklad 5.25: Vypočtěme limitu

$$\lim_{x\to 1} e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}.$$

Označme

$$f(x) = e^x \quad \text{a} \quad g(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Na cvičení ověříte, že (1. a 2. předpoklad věty o limitě složené funkce)

$$\lim_{x\to 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to -\infty} e^x = 0.$$

Dále například pro $H_1(1) = (0, 2)$ platí $g(x) \neq -\infty$ pro všechna $x \in H_1(1) \setminus \{1\}$. První možnost v 3. předpokladu je tedy splněna. Větu o limitě složené funkce lze aplikovat a dostáváme výsledek

$$\lim_{x\to 1} e^{-\frac{1}{(x-1)^2}} = 0.$$

5.3 Nerovnosti v limitách funkcí

K výpočtům limit posloupností jsme často s výhodou používali větu o limitě sevřené posloupnosti (věta č. 3.54). Analogická tvrzení platí i pro limitu funkce. Těmito tvrzeními se budeme zabývat v této podkapitolce.

Věta 5.26: Mějme funkce f a g a nechť existují limity $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)$. Pak platí následující dvě tvrzení:

a. Pokud $\lim\limits_{x \to a} f(x) < \lim\limits_{x \to a} g(x)$, potom existuje okolí H_a bodu a takové, že pro všechna $x \in H_a \smallsetminus \{a\}$ platí $f(x) < g(x)$.

b. Pokud existuje okolí H_a bodu a takové, že pro všechna $x \in H_a \smallsetminus \{a\}$ je $f(x) \le g(x)$, potom $\lim\limits_{x \to a} f(x) \le \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

Důkaz. Dokažme postupně obě tvrzení.

a. Označme $\alpha = \lim_a f$ a $\beta = \lim_a g$. Podle předpokladu $\alpha < \beta$ lze zvolit disjunktní okolí H_α bodu α a H_β bodu β. Podle předpokladu existence limit existuje jisté okolí H_a bodu a pro které platí

$$x \in H_a \smallsetminus \{a\} \ \Rightarrow f(x) \in H_\alpha \text{ a } g(x) \in H_\beta.$$

Pro stejná x proto platí $f(x) < g(x)$.

b. Plyne ihned z předchozího bodu (např. sporem a využitím již dokázaného bodu a.). $\square$

Hlavním výsledkem této podkapitoly je pak následující věta (srovnejte s větou o limitě sevřené posloupnosti).

Věta 5.27 (O limitě sevřené funkce)**:** Nechť pro funkce f, g, h a body $a, c \in \overline{\mathbb{R}}$ platí:

1. existuje okolí H_a bodu a takové, že pro každé $x \in H_a \smallsetminus \{a\}$ platí $f(x) \le g(x) \le h(x)$,
2. existují $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = c$.

Potom existuje i $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ a je rovna c.

Důkaz. Uvažme nejprve případ $c \in \mathbb{R}$. Buď $\varepsilon > 0$. Existuje okolí U_a bodu a takové, že pokud $x \in U_a \smallsetminus \{a\}$ pak $f(x) \in H_c(\varepsilon)$ a $h(x) \in H_c(\varepsilon)$. Pro $x \in U_a \cap H_a$ platí $f(x) \le g(x) \le h(x)$. Proto i $g(x) \in H_c(\varepsilon)$. $\square$

Poznamenejme, že pokud např. $c = +\infty$, pak stačí pouze dolní odhad. Pro libovolné $K \in \mathbb{R}$ máme k dispozici U_a okolí bodu a takové, že pro $x \in U_a$ je $f(x) > K$. Je-li $x \in U_a \cap H_a$ pak $h(x) \ge f(x) > K$. Podobná poznámka platí i pro $c = -\infty$.

Příklad 5.28: Vypočtěte $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$.

Zřejmě nelze použít větu o součinu limit, limita $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ totiž neexistuje. Ovšem nerovnost

$$f(x) := 0 \le g(x) := \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \le |x| =: h(x)$$

platí pro libovolné $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$. Zvolíme-li např. $H_a = (-1, 1)$ okolí bodu $a = 0$, pak

1. nerovnost $f(x) \le g(x) \le h(x)$ platí pro každé $x \in (-1, 1) \smallsetminus \{0\}$,
2. existují $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0$.

Podle věty o limitě sevřené funkce pak $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left| x \sin \dfrac{1}{x} \right| = 0$.

Poznámka 5.29: V předchozím výpočtu jsme využili následující ekvivalence

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} |f(x)| = 0,$$

jejíž platnost se ověří úplně stejně jako u limity posloupnosti (viz větu č. 3.34).

Poznámka 5.30: Dále platí následující tvrzení: je-li $f(x)$ definována a nezáporná na okolí bodu a, a existuje $\lim_{x\to a} f(x) = c$, pak $\lim_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{c}$. Toto tvrzení se dokáže velmi podobně jako v případě posloupností (viz větu č. 3.36). Můžeme se na něj ale také dívat jako na speciální případ věty o limitě složené funkce kde jsme využili toho, že odmocnina je spojitá. Ke spojitosti se dostaneme v příští kapitole.

Příklad 5.31: Ověřte správnost následujících tvrzení

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0, \qquad \lim_{x\to 0} \cos x = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

V tento okamžik máme k dispozici pouze geometrickou definici goniometrických funkcí, vizte obrázek č. 5.5. Pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ platí

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

Skutečně, porovnejte obsahy trojúhelníku OAB, výseče OAB a trojúhelníku OAC na obrázku 5.5. Funkce sin je lichá a tudíž

$$-|x| \le \sin x \le |x|, \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Potom $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$. A z rovnosti $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ pak i $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$. (Rozmyslete znaménko!) Funkce sin i tg jsou liché a proto z nerovnosti

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x, \qquad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

plyne nerovnost

$$1 < \left|\frac{x}{\sin x}\right| < \left|\frac{1}{\cos x}\right|, \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}.$$

Odtud pomocí Věty č. 5.27 dostáváme poslední hledanou limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

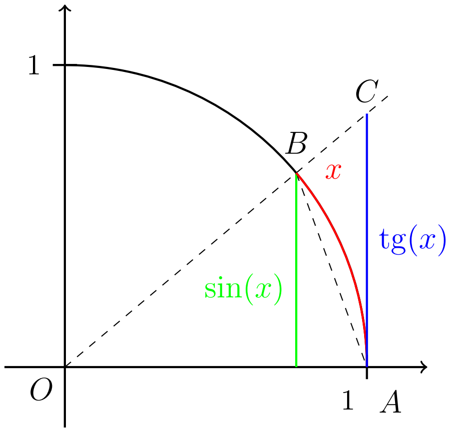
Funkce $\frac{\sin x}{x}$ je totiž kladná na jistém okolí nuly.

5.4 Definice a kriteria spojitosti

Jak již bylo řečeno, hodnota limity funkce v bodě $a \in \mathbb{R}$ nezávisí na funkční hodnotě funkce f v tomto bodě (funkce v daném bodě ani nemusí být definována a přesto v něm může mít limitu). Zavádíme proto pojem spojité funkce, který spojuje pojem limity a funkční hodnoty. Funkce je spojitá v bodě $a \in D_f$ právě tehdy, když její funkční hodnota v bodě a je rovna její limitě v bodě a. Uvědomíme-li si, že bod a může být i na kraji definičního oboru funkce f, dostáváme následující definici.

Definice 5.32: Nechť f je reálná funkce reálné proměnné a nechť bod $a \in D_f$. Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** a jestliže nastává jedna z následujících možností

- $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$,



Obrázek 5.5: Jednotková kružnice a výpočet funkcí sinus a tangens.

- funkce f je definována jen na pravém okolí bodu a, přesněji $(\exists H_a)(H_a \cap D_f = H_a^+)$, a $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$,
- funkce f je definována jen na levém okolí bodu a, přesněji $(\exists H_a)(H_a \cap D_f = H_a^-)$, a $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a)$.

Funkce f je **spojitá v bodě a zprava**, pokud $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$. Funkce f je **spojitá v bodě a zleva**, pokud $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a)$.

Spojitost funkce je velmi důležitá pro praktické aplikace. Na tomto místě zatím jenom poznamenejme, že je-li funkce f spojitá v bodě a, pak z rovnosti $f(a) = b$ plyne, že $f(x)$ je blízko b pokud x je blízko a. Přesně to totiž korektně říká definice č. 5.32.

Jako první pozorování uveďme, že pokud $a \notin D_f$, pak takováto funkce nemůže být z definice spojitá i kdyby $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existovala. V definici spojitosti se totiž *předpokládá*, že funkce je definována v bodě a. V takovémto bodě bychom mohli danou funkci tzv. **spojitě dodefinovat** touto limitní hodnotou. Vytvořili bychom tedy novou funkci, která by v bodě a byla spojitá.

Protože $a \in D_f \subset \mathbb{R}$ a $f(a) \in \mathbb{R}$, dostáváme přeformulováním definice limity následující $\varepsilon - \delta$ formulaci spojitosti:

Poznámka 5.33: Funkce f definovaná na okolí bodu a je spojitá v bodě $a \in D_f$, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňující $|x - a| < \delta$ platí $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Následující tvrzení jsou bezprostředním důsledkem vlastností limity funkce:

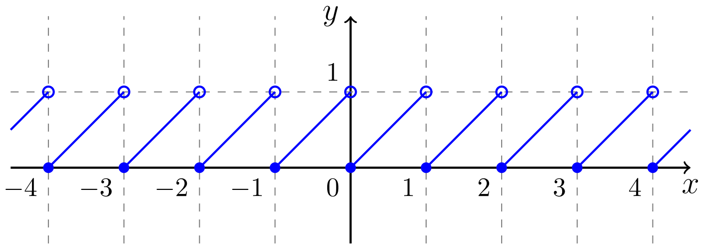
Věta 5.34: Funkce f definovaná na okolí bodu $a \in D_f$ je spojitá v bodě $a \in D_f$, právě když je spojitá v bodě a zleva i zprava.

Důkaz. Viz větu 5.9. □

Věta 5.35: Součet a součin dvou funkcí f a g definovaných na okolí bodu a a spojitých v bodě a je funkce spojitá v bodě a. Pokud navíc $g(a) \neq 0$, pak podíl $\frac{f}{g}$ je funkce spojitá v bodě a.

Důkaz. Viz větu 5.18. □

Věta 5.36: Buďte g funkce definovaná na okolí bodu a a spojitá v bodě a a f funkce definovaná na okolí bodu $g(a)$ a spojitá v bodě $g(a)$. Potom složená funkce $f \circ g$ je spojitá v bodě a.



Obrázek 5.6: Graf funkce $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

Důkaz. Viz větu 5.23. Povšimněte si, že třetí předpoklad věty 5.23 je pro spojité funkce automaticky splněn. □

Jako první příklad spojité funkce zmiňme příklad libovolného polynomu.

Příklad 5.37: V předchozí podkapitole jsme ukázali, že pro libovolné reálná a a libovolný polynom $P(x)$ platí

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a).$$

Každý polynom je proto spojitou funkcí v každém bodě $a \in \mathbb{R}$.

Všimněte si, že díky znalosti vlastností pojmu limity (konkrétně věty o limitě součtu a součinu) a pouze znalosti spojitosti funkce $f(x) = x$ a konstantní funkce jsme odvodili spojitost libovolného polynomu. Vůbec jsme nepotřebovali explicitně použít definici spojitosti/limity.

Dále se podívejme na komplikovanější příklad, který pěkně ilustruje všechny možné druhy spojitosti (zleva/zprava).

Příklad 5.38: Zkoumejte spojitost funkce $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

Přirozeným definičním oborem funkce f je $D_f = \mathbb{R}$. Funkce f je spojitá v každém bodě $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. V bodech $a \in \mathbb{Z}$ je spojitá zprava, ale ne zleva.

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a) \quad \text{a} \quad \lim_{x \to a-} f(x) = f(a) + 1.$$

Graf této funkce je uveden na obrázku 5.6.

Doposud jsme pojem spojitosti měli zaveden pouze v jednom jediném bodě. Nyní ho rozšíříme na celý interval.

Definice 5.39: **Funkce f je spojitá na intervalu** J, právě když je spojitá v každém bodě intervalu J.

Poznámka 5.40: Speciálně tedy platí

- *spojitá na intervalu* (a, b), právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$.
- *spojitá na intervalu* $\langle a, b)$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$ a v bodě a je spojitá zprava.
- *spojitá na intervalu* $(a, b\rangle$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$ a v bodě b je spojitá zleva.
- *spojitá na intervalu* $\langle a, b\rangle$, právě když f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$, v bodě a je spojitá zprava a v bodě b je spojitá zleva.

Spojitost funkce na uzavřeném intervalu má závažné důsledky pro řešení rovnic. Následující věta dává postačující podmínku pro existenci řešení rovnice $f(x) = 0$ a dokonce i nabízí algoritmus jak toto řešení nalézt. Mimo to ji ještě dále s výhodou využijeme.

Povšimněte si, že není žádným omezením mít na pravé straně rovnice číslo 0. Pokud bychom měli řešit rovnici $h(x) = g(x)$ pro neznámou x, vždy můžeme tento problém přeformulovat do tvaru $f(x) := g(x) - h(x) = 0$.

Věta 5.41 (Metoda půlení intervalu)**:** Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potom existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že $f(c) = 0$.

Důkaz. Položme $a_1 := a$ a $b_1 := b$. Protože znaménka $f(a_1)$ a $f(b_1)$ jsou *různá*, nastane právě jedna ze tří možností

1. $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$,
2. znaménka $f(a_1)$ a $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ jsou různá,
3. znaménka $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$ a $f(b_1)$ jsou různá.

Dále postupujeme podle toho, která z těchto možností nastala:

1. Hledaným bodem c je $\frac{a_1+b_1}{2}$ a věta je dokázána.
2. Položme $a_2 := a_1$ a $b_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$.
3. Položme $a_2 := \frac{a_1+b_1}{2}$ a $b_2 = b_1$.

Pokud nenastala první možnost, proveďme stejnou úvahu s a_2 a b_2 místo a_1 a b_1. Tímto způsobem postupně konstruujeme další a_3, b_3, atd. Pokud v některém z kroků nastane první možnost (tj. existuje n tak, že $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$), pak je věta dokázána.

V opačném případě jsme zkonstruovali posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, (b_n) splňující

$$a_n, b_n \in \langle a, b\rangle, \quad a \le a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n \le b, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}},$$

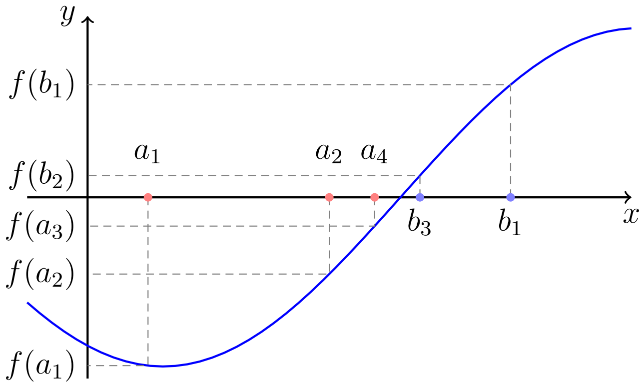
pro každé $n \in \mathbb{N}$. Obě posloupnosti jsou monotónní a omezené, tudíž existují jejich konečné limity, $a_n \to \alpha$ a $b_n \to \beta$ při $n \to \infty$. Navíc

$$\beta - \alpha = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^{n-1}} = 0.$$

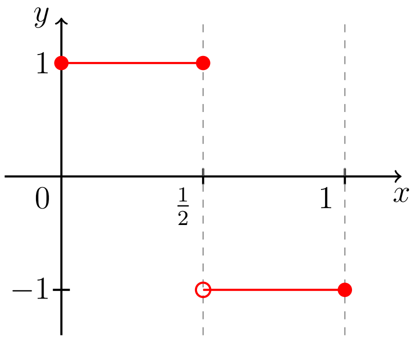
Obě posloupnosti tedy mají stejnou limitu, označme ji $c := \alpha = \beta \in \langle a, b\rangle$. Ze spojitosti funkce f v bodě c a Heineho věty nyní plyne

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c).$$

Ale protože všechny $f(a_n)$ mají různé znaménko od $f(b_n)$ můžou poslední rovnosti nastat pouze v případě že $f(c) = 0$. Tím je důkaz věty dokončen. $\square$



Obrázek 5.7: Demonstrace k metodě půlení intervalu, větě č. 5.41.



Obrázek 5.8: Předpoklad spojitosti pro tvrzení věty 5.41 je podstatný.

Důkaz předcházející věty se nazývá **konstruktivní**. Tvrzení věty, existenci čísla c, jsme dokázali jeho konstrukcí. Algoritmus použitý v důkazu se nazývá *metoda půlení intervalu* a lze ho prakticky použít k hledání řešení rovnice $f(x) = 0$. Jeho výhodou je, že máme pod kontrolou chybu výpočtu, hledané řešení c vždy leží v intervalu (a_n, b_n). Pokud délka tohoto intervalu je již kratší než požadovaná přesnost, můžeme algoritmus zastavit a třeba o průměru $\frac{a_n+b_n}{2}$ prohlásit, že se jedná o hledané řešení (v dané přesnosti). Nevýhodou metody půlení intervalu je její ne příliš vysoká rychlost (typicky je potřeba udělat více iterací než se dostaneme k požadované přesnosti).

Poznámka 5.42: Předpoklad spojitosti v předešlé větě 5.41 je podstatný. Jako příklad uvažme funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle, \\ -1, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right\rangle \end{cases}$$

na intervalu $\langle a, b\rangle = \langle 0, 1\rangle$. Sice $f(0) \cdot f(1) = -1 < 0$, ale neexistuje bod $x \in (0, 1)$ splňující $f(x) = 0$.

Důsledkem předchozí věty 5.41 je následující tvrzení.

Důsledek 5.43: Buď f spojitá funkce na intervalu J a nechť platí $f(x) \neq 0$ pro všechna $x \in J$. Potom pro všechna $x \in J$ platí buď $f(x) > 0$ nebo $f(x) < 0$.

Další vlastností spojitých funkcí je, že zobrazují intervaly na intervaly. To pro nespojité funkce nemusí být pravda (rozmyslete!).

Věta 5.44: Buď f funkce spojitá na intervalu J. Potom obraz $f(J)$ intervalu J je buď interval, nebo jednoprvková množina.

Důkaz. $f(J)$ je jednoprvková množina právě tehdy, když funkce f je konstantní. Ve zbytku důkazu předpokládejme, že f není konstantní.

Ukažme, že $f(J)$ je interval. K tomu je třeba ukázat, že pro libovolné dva prvky $\alpha, \beta \in f(J)$, $\alpha \neq \beta$, leží všechna k mezi α a β také v $f(J)$.

Jistě existují $a, b \in J$, $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$ a bez újmy na obecnosti $a < b$. Položme $g(x) := f(x) - k$. Funkce g je spojitá na $\langle a, b\rangle$, $g(a) = \alpha - k$ a $g(b) = \beta - k$ jsou nenulová s rozdílným znaménkem. Podle věty existuje $c \in (a, b)$ takové, že $g(c) = 0$, tj. $f(c) = k$. $\square$

Spojitým obrazem intervalu je tedy interval. Zachovává spojitost i uzavřenost, resp. otevřenost, intervalu? Není těžké si rozmyslet, že obrazem otevřeného intervalu nemusí být opět otevřený interval[30]. Spojitým obrazem uzavřeného intervalu už ale vždy bude uzavřený interval. Platí totiž následující věta.

Věta 5.45: Buď f funkce spojitá na uzavřeném intervalu J. Potom obraz $f(J)$ intervalu J je buď jednoprvková množina, nebo uzavřený interval.

Důkaz. Podle věty 5.44 již víme, že $f(J)$ je buď jednoprvková množina (pokud je funkce konstantní) a nebo interval (pokud je funkce nekonstantní). Ukažme nyní uzavřenost $f(J)$ pro nekonstantní f.

Označme $J = \langle a, b\rangle$. Postupujme sporem, bez újmy na obecnosti tedy předpokládejme, že obraz je tvaru $(c, d\rangle$ kde $c \in \mathbb{R}$ nebo $c = -\infty$. Existuje posloupnost (y_n) konvergující k c jejíž členy leží v $f(J)$. Skutečně, v případě $c \in \mathbb{R}$ můžeme volit $y_n = c + \frac{1}{n}$ od dostatečně velkého n a v případě $c = -\infty$ lze volit $y_n = -n$ opět pro dostatečně velké n. Protože $y_n \in f(J)$, existují $x_n \in J$ splňující $y_n = f(x_n)$. Posloupnost (x_n) patří do $\langle a, b\rangle$ a je proto omezená. Podle Bolzano–Weierstrassovy věty 3.43 lze z této posloupnosti vybrat konvergentní podposloupnost (x_{k_n}). Existuje tedy $x \in J = \langle a, b\rangle$ splňující $\lim_n x_{k_n} = x$. Ze spojitosti dostáváme $c = \lim_n f(x_{k_n}) = f\big(\lim_n x_{k_n}\big) = f(x)$. Proto $c \in f(J)$, což je spor s naším předpokladem. $\square$

Věta 5.46 (O inverzní funkci)**:** Buď f ryze monotónní a spojitá funkce na intervalu I. Potom její inverzní funkce f^{-1} je také ryze monotónní a spojitá na intervalu $J := f(I)$.

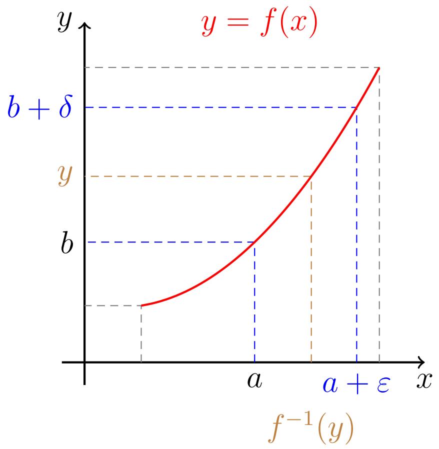
Důkaz. f^{-1} existuje a je ryze monotónní. J je skutečně interval, jak tvrdí věta 5.44. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že funkce f je ostře rostoucí. Ukažme, že f^{-1} je spojitá zprava v každém bodě $b \in J$, který není pravým koncovým bodem. Ozn. $a := f^{-1}(b)$, tj. $f(a) = b$.

Buď $\varepsilon > 0$. Potom pro $\delta := f(a + \varepsilon) - b$ a $y \in (b, b + \delta)$ platí

$$\begin{aligned} b <& y < b + \delta = f(a+\varepsilon) \\ a = f^{-1}(b) <& f^{-1}(y) < a + \varepsilon. \end{aligned}$$

Pro lepší orientaci je dobré nakreslit si obrázek, viz obrázek 5.9. Tedy $f^{-1}(y) \in H_a(\varepsilon)$, $a = f^{-1}(b)$. Podobně pro spojitost zleva. $\square$

[30] Uvažte například funkci $f(x) = \sin x$ a otevřený interval $J = (0, 2\pi)$. Obrazem tohoto otevřeného intervalu je uzavřený interval $\langle -1, 1\rangle$.



Obrázek 5.9: K důkazu věty o vlastnostech inverzní funkce.

5.5 Spojitost elementárních funkcí

V této kapitole rozebereme spojitost některých elementárních funkcí. Připomeňme, že v dřívějším textu jsme již odvodili spojitost libovolného polynomu. Podívejme se nyní na spojitost některých trigonometrických funkcí.

Příklad 5.47: Funkce sin a cos jsou spojité v každém bodě $a \in \mathbb{R}$. Připomeňme známé, v minulé podkapitole vypočtené, limity

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

Podle součtového vzorce pro funkci sin platí

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin\big((x-a)+a\big) \\ &= \sin(x-a)\cos(a) + \cos(x-a)\sin(a) \end{aligned}$$

Tudíž podle věty o limitě složené funkce (věta 5.23) a součinu/součtu limit (věta 5.18) platí

$$\lim_{x \to a} \sin x = 0 \cdot \cos(a) + 1 \cdot \sin a = \sin a.$$

Což ukazuje spojitost funkce sin. Spojitost funkce cos se ukáže analogicky.

Z posledního příkladu a z věty o spojitosti podílu dvou funkcí (věta 5.18) ihned plyne, že funkce tg a cotg jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru.

Věta 5.48 (Spojitost exponenciály)**:** Exponenciální funkce je spojitá na $\mathbb{R}$.

Důkaz. Nejprve dokažme, že exponenciála je spojitá v bodě 0, tedy že platí

$$\lim_{x \to 0} e^x = e^0 = 1.$$

Pro každé přirozené n a $x \in (-1, 1)$ platí nerovnost

$$\begin{aligned} 0 \le \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - 1 \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \le \sum_{k=1}^{n} \frac{|x|^k}{k!} = \\ = |x| \sum_{k=1}^{n} \frac{|x|^{k-1}}{k!} \le |x| \sum_{k=1}^{n} \frac{|x|^{k-1}}{2^{k-1}} \le \frac{|x|}{1-|x|/2} \le 2|x|. \end{aligned}$$

V odhadu jsme využili nerovnost $k! \geq 2^{k-1}$ platnou pro každé $k \in \mathbb{N}$ a nerovnost

$$\frac{1}{1-|x|/2} \leq \frac{1}{1-1/2} = 2$$

platnou pro každé $x \in (-1, 1)$. Dle věty o nerovnosti mezi limitami posloupností (věta 3.50) dostáváme nyní nerovnost

$$0 \leq |e^x - 1| \leq 2|x|$$

platnou pro každé $x \in (-1, 1)$. Věta o limitě sevřené funkce (věta 5.27) nyní implikuje

$$\lim_{x\to 0} |e^x - 1| = 0$$

a tedy i

$$\lim_{x\to 0} e^x = 1.$$

Z předchozích úvah, z bodu b) věty 4.23 a z věty o limitě složené funkce (věta 5.23) nyní plyne spojitost exponenciální funkce v libovolném bodě $a \in \mathbb{R}$. Skutečně, platí

$$\lim_{x\to a} e^x = \lim_{x\to a} e^{a+x-a} = e^a \lim_{x\to a} e^{x-a} = e^a \cdot 1 = e^a.$$

□

Věta 5.49: Pro exponenciální funkci platí

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

Oborem hodnot exponenciální funkce je neomezený interval $(0, +\infty)$.

Důkaz. Pro $x > 0$ platí $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > 1 + x$. Podobný argument jsme již použili v důkazu bodu d) věty 4.23. Je-li $K > 0$ dáno pevně, pak pro $x \in (K-1, +\infty)$ platí $e^x > 1+x > 1+K-1 = K$. Tedy $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Naopak,

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Dle věty 5.48 víme, že exponenciála je spojitá na intervalu $(-\infty, \infty)$. Věta 5.44 pak implikuje, že obor hodnot exponenciály je také interval. Vzhledem k výše odvozeným limitám a bodu c) věty 4.23 tento interval nutně musí být interval $(0, +\infty)$. □

Důsledek 5.50: Logaritmus je spojitá funkce na intervalu $(0, +\infty)$, tj. pro každé $a \in (0, +\infty)$ platí

$$\lim_{x\to a} \ln x = \ln a.$$

Navíc

$$\lim_{x\to 0_+} \ln x = -\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty.$$

Důkaz. Spojitost logaritmu plyne okamžitě z věty 5.46. Dodatek je pak důsledkem věty 5.49. □

Příklad 5.51: Protože už víme, že funkce sin, cos, tg a cotg jsou spojité na svých definičních oborech, a vhodně zúžené jsou i ryze monotónní, ihned odtud dostáváme spojitost inverzních funkcí

$$\begin{aligned}
\arcsin &= \left(\sin\Big|_{\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle}\right)^{-1},\\
\arccos &= \left(\cos\Big|_{\langle 0,\pi\rangle}\right)^{-1},\\
\operatorname{arctg} &= \left(\operatorname{tg}\Big|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1},\\
\operatorname{arccotg} &= \left(\operatorname{cotg}\Big|_{(0,\pi)}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Poznámka 5.52: Na závěr této podkapitoly poznamenejme, že ze známých limit posloupností a Heineho věty okamžitě plyne spojitost odmocnin a absolutní hodnoty. Víme, že platí

$$\lim_{x\to a}\sqrt[k]{x}=\sqrt[k]{a} \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0_+}\sqrt[k]{x}=0$$

pro $a>0$ a $k=2,3,\ldots$, a tedy $\sqrt[k]{x}$ je spojitá na intervalu $\langle 0,+\infty)$. Obdobně, protože

$$\lim_{x\to a}|x|=|a|$$

pro $a\in\mathbb{R}$, platí, že $|x|$ je spojitá na $\mathbb{R}$.

5.6 Další důležité limity a důsledky Heineho věty

V této podkapitole odvodíme několik vlastností exponenciální funkce a přirozeného logaritmu, které později využijeme v následující kapitole při odvození derivace exponenciální funkce a logaritmu. Dále se podíváme na dvě zajímavé limity funkcí i posloupností vedoucí na Eulerovo číslo.

Lemma 5.53: Platí

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Důkaz. Uvažme $x\in(-1,1)$, $x\neq 0$, a $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Potom

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}-1}{x}-1 &= \frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}}{x}-1=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{k!}-1=\\
&=\sum_{k=2}^{n}\frac{x^{k-1}}{k!}=x\sum_{k=2}^{n}\frac{x^{k-2}}{k!}.
\end{aligned}$$

Z těchto rovností plyne odhad

$$\begin{aligned}
0\leq\left|\frac{\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}-1}{x}-1\right| &\leq |x|\sum_{k=2}^{n}\frac{|x|^{k-2}}{k!}\leq |x|\sum_{k=2}^{n}\frac{|x|^{k-2}}{2^{k-1}}=\\
&=\frac{|x|}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{|x|}{2}\right)^{k-2}\leq\frac{|x|}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{|x|}{2}\right)^{k-2}=\\
&=\frac{|x|}{2}\frac{1}{1-|x|/2}\leq\frac{|x|}{2}\frac{1}{1-1/2}=|x|.
\end{aligned}$$

Odtud ihned plyne (věta 3.50) nerovnost

$$0 \leq \left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| \leq |x|$$

pro každé $x \in (-1, 1)$, $x \neq 0$. Konečně věta 5.27 implikuje

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| = 0$$

čili

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

□

Tvrzení o exponenciálná funkci v předchozím lemmatu lze přímočaře přeformulovat na tvrzení o přirozeném logaritmu.

Lemma 5.54: Platí

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Důkaz. Nejprve zkoumaný výraz vhodně upravme,

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln(x+1)}{x+1-1} = \frac{1}{\frac{e^{\ln(x+1)}-1}{\ln(x+1)}}.$$

Ze spojitosti logaritmu (důsledek 5.50) víme, že $\lim_{x \to 0} \ln(x+1) = 0$. Věta o limitě složené funkce (věta 5.23) a lemma 5.53 ihned dávájí kýžený výsledek. □

V předchozích částech jsme se již zabývali limitami součtů, součinů a podílů funkcí (a posloupností) a dále limitami složených funkcí. V následující podkapitole se podrobněji podíváme na výpočet limit tvary $f(x)^{g(x)}$. Nyní začneme speciálním případem, kdy základ $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ jde k 1 a exponent $g(x) = x$ do $+\infty$, případně $-\infty$. Po prvním zamyšlení by člověka napadlo, že limita takovéto funkce bude rovna 1. Následující lemma nás ovšem vyvádí z omylu.

Lemma 5.55: Platí

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{a} \quad \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Důkaz. Opět zkoumaný výraz nejprve upravme (v podstatě podle definice obecné mocniny),

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}.$$

Díky spojitosti exponenciály (věta č. 5.48) stačí zkoumat limitu jejího argumentu. Pro ten však platí

$$x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}.$$

O funkci $\frac{1}{x}$ víme, že má limitu v $+\infty$ i v $-\infty$ rovnou 0. Z předchozího lemmatu a věty o limitě složené funkce (věta č. 5.23) pak dostáváme

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=1 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=1.$$

Tudíž

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^1=e \quad \text{a} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^1=e.$$

□

Poznámka 5.56: Tento výsledek je často při prvním setkání překvapivý. Naivní intuice studentů je typicky takováto: základ jde k 1 a 1^∞ (ať jedničku násobím kolikrát chci) je jednička. Předchozí Lemma ukazuje tuto intuici jako chybnou.

V čem je problém? Když například uvažujeme libovolné kladné x, tak $1+\frac{1}{x}$ je *vždy ostře větší* než 1 a se zvětšujícím se x se zmenšuje a blíží shora k 1. Naopak ale když pak toto číslo umocňujeme na (stále větší a větší) kladné x, tak se od 1 vzdalujeme (pokud $z>1$ pak $z^2>z$). Základ se tedy snaží dostat k jedné, ale umocňování ho od jedné vzdaluje. *Výsledek pak záleží na tom, která z těchto tendencí je silnější.* Podrobně se tomuto jevu budeme věnovat v následující podkapitole č. 5.7.

Pro posloupnosti pak na základě předchozího lemmatu dostáváme následující důsledek.

Důsledek 5.57: Pro libovolnou posloupnost $(a_n)_{n=1}^\infty$ splňující $\lim_{n\to\infty}|a_n|=+\infty$ platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e.$$

Speciálně platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Důkaz. V důsledku lemmatu 5.55 a Heineho věty 5.13 dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{|a_n|}\right)^{|a_n|}=e \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-|a_n|}\right)^{-|a_n|}=e.$$

Vezměme nyní libovolné $\varepsilon>0$. Z platnosti předchozích limit plyne existence $m_0\in\mathbb{N}$ a $k_0\in\mathbb{N}$ takových, že pro každé $n>m_0$ platí

$$\left|\left(1+\frac{1}{|a_n|}\right)^{|a_n|}-e\right|<\varepsilon$$

a pro každé $n>k_0$ platí

$$\left|\left(1+\frac{1}{-|a_n|}\right)^{-|a_n|}-e\right|<\varepsilon.$$

Položme $n_0=\max(m_0,k_0)$. Pro každé $n\in\mathbb{N}$ je $a_n=|a_n|$ nebo $a_n=-|a_n|$. Tudíž pro každé $n>n_0$ dostáváme

$$\left|\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}-e\right|<\varepsilon,$$

čímž je platnost limity dokázána z definice. □

Důležité limity	Hodnota
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$	1
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$	1
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$	1
$\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$	e
$\lim\limits_{x\to -\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$	e

Tabulka 5.2: Důležité limity funkcí odvozené v této kapitole.

Důsledek 5.58: Pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha \quad \text{a} \quad \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha.$$

Důkaz. Pro $\alpha = 0$ je tvrzení triviální (limita konstantní funkce s hodnotou 1). Pro $\alpha \neq 0$ tento fakt snadno nahlédneme pomocí následující úpravy

$$\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^{\alpha \cdot \frac{\ln(1+\alpha/x)}{\alpha/x}}$$

Pro x jdoucí do $+\infty$ nebo $-\infty$ již víme, že výraz na pravé straně této rovnosti konverguje k $e^{\alpha\cdot 1} = e^\alpha$. □

Příklad 5.59: Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\sin x}.$$

Výraz nejprve upravíme,

$$\frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\sin x} = \frac{e^{\sin 2x} - 1}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2x}{\sin x} - \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}.$$

Použijeme-li nyní větu o limitě složené funkce a známé limity, pak

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\sin x} = 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 = 1.$$

Tabulka 5.2 shrnuje výsledky odvozené v této kapitole.

5.7 Limity funkcí tvaru $f(x)^{g(x)}$ se speciálním přihlédnutím k limitám typu 0^0 a 1^∞

Věta o limitě součtu, součinu a podílu nám dávala nástroj na výpočet limit součtu, součinu a podílu funkcí za předpokladu, že součet, součin či podíl byl definován v $\overline{\mathbb{R}}$. Pokud limita byla například typu $+\infty - (+\infty)$, nebo $0 \cdot +\infty$, tak jsme s danou funkcí ještě museli dále zacvičit.

Nyní se podíváme jak je to s výpočty limit funkcí ve tvaru $f(x)^{g(x)}$. Hlavním výsledkem této podkapitoly bude věta č. 5.60. Tato věta na první pohled může vypadat komplikovaně, protože ošetřuje několik možných situací, které mohou nastat a navíc některé vynechává (viz příklady níže v této podkapitole). I z toho důvodu je toto pěkný příklad věty, kde je důležité pochopit důkaz, protože v konkrétním příkladě je jednoduší uvedený důkaz provést, než si tuto větu pamatovat. Celé tvrzení stojí na tom, že výraz $f(x)^{g(x)}$ přepíšeme pomocí exponenciální funkce na výraz $e^{g(x)\ln f(x)}$ a poté řešíme už limitu součinu $g(x)\ln f(x)$. Pojďme nejprve zformulovat hlavní větu.

Věta 5.60: Uvažme funkce f a g definované na okolí bodu $a \in \overline{\mathbb{R}}$ s možnou výjimkou bodu a samotného a nechť funkce f je kladná na nějakém okolí bodu a. Předpokládejme dále, že existují limity

$$\alpha := \lim_{x\to a} f(x) \quad \text{a} \quad \beta := \lim_{x\to a} g(x).$$

Potom platí následující tři tvrzení:

1. Pokud $0 < \alpha < +\infty$ a $|\beta| < +\infty$ potom $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \alpha^\beta$.
2. Pokud $\alpha = 0$ a $\beta > 0$ (připouštíme i $\beta = +\infty$) potom $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 0$.
3. Pokud $\alpha = +\infty$ a $\beta \neq 0$ potom $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ existuje a je rovna 0 pokud $\beta < 0$ a $+\infty$ pokud $\beta > 0$.

Důkaz. Důkaz stojí na využití vlastností exponenciální a logaritmické funkce a spojitosti exponenciální funkce. Navíc není nijak komplikovaný, takto bychom danou limitu jednoduše i počítali.

Nejprve si povšimněme, že za uvedených předpokladů je funkce

$$h(x) = f(x)^{g(x)}$$

definovaná na okolí bodu a, s možnou výjimkou bodu a samotného, a má tedy smysl počítat její limitu v bodě a. Nyní provedeme úpravu

$$h(x) = e^{g(x)\ln f(x)}$$

a budeme zkoumat limitu argumentu exponenciály v bodě a, tj. limitu

$$\lim_{x\to a} g(x)\cdot \ln f(x).$$

Postupně nyní projdeme uvedené předpoklady:

1. V tomto případě podle věty o limitě součinu platí $\lim_{x\to a} g(x)\cdot\ln f(x) = \beta\cdot\ln\alpha$ (tento výraz je definovaný a patří do $\mathbb{R}$) a proto díky spojitosti exponenciální funkce máme $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\beta\cdot\ln\alpha} = \alpha^\beta$.
2. Za těchto předpokladů platí $\lim_{x\to a} g(x)\cdot\ln f(x) = \beta\cdot(-\infty) = -\infty$ a proto $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 0$.
3. Nyní platí $\lim_{x\to a} g(x)\cdot\ln f(x) = \beta\cdot(+\infty)$, což je $+\infty$ (resp. $-\infty$) pro kladné (resp. záporné) β. Z limit exponenciální funkce v $+\infty$ (resp. $-\infty$) pak plyne dokazované tvrzení.

$\square$

Příklad 5.61: Pokud je limita

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$$

typu 1^∞ (tj. $\lim_a f = 1$ a $\lim_a g$ je $+\infty$ nebo $-\infty$), pak případný výsledek závisí na samotných f a g. Například (ve výpočtech využíváme znalosti známých limit odvozených v předchozí podkapitole č. 5.6):

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2} &= \lim_{x\to+\infty} e^{x\cdot\frac{\ln(1+1/x)}{1/x}} = +\infty,\\
\lim_{x\to 0}\left(1+x^3\right)^{1/x^2} &= \lim_{x\to 0} e^{x\cdot\frac{\ln(1+x^3)}{x^3}} = e^{0\cdot 1} = 1,\\
\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{x} &= e^{\alpha},\\
\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x^2} &= \lim_{x\to+\infty} e^{-x\cdot\frac{\ln(1+1/x)}{1/x}} = 0.
\end{aligned}$$

Všechny tyto limity jsou typu 1^∞. Jako výsledek můžeme dostat libovolný prvek množiny $\langle 0,+\infty)\cup\{+\infty\}$.

Příklad 5.62: Pokud je limita

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$$

typu 0^0 (tj. $\lim_a f = 0$ a $\lim_a g = 0$), pak případný výsledek závisí na konkrétním chování funkcí f a g. Například pro libovolné reálné α máme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}\right)^{-\alpha/x} &= e^{\alpha},\\
\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x^2}\right)^{1/x} &= \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0,\\
\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x^2}\right)^{-1/x} &= \lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty.
\end{aligned}$$

Z těchto příkladů vidíme, že i když je limita typu 0^0, tak výsledek může být libovolný prvek $\langle 0,+\infty)\cup\{+\infty\}$.

Na tomto místě se hodí zmínit i limitu

$$\lim_{x\to 0_+} x^x = \lim_{x\to 0_+} e^{x\ln x} = e^0 = 1.$$

K jejímu výpočtu ale potřebujeme znát limitu $\lim_{x\to 0_+} x\ln(x) = 0$, kterou odvodíme zanedlouho v příkladě č. 6.61.

6 Derivace

6.1 Rychlost a hledání tečny

Začněme nejprve s jednoduchým motivačním příkladem s fyzikálním nádechem. Jaký je vztah mezi polohou a rychlostí tělesa? Uvažme případ tělesa pohybujícího se podle obrázku 6.1.

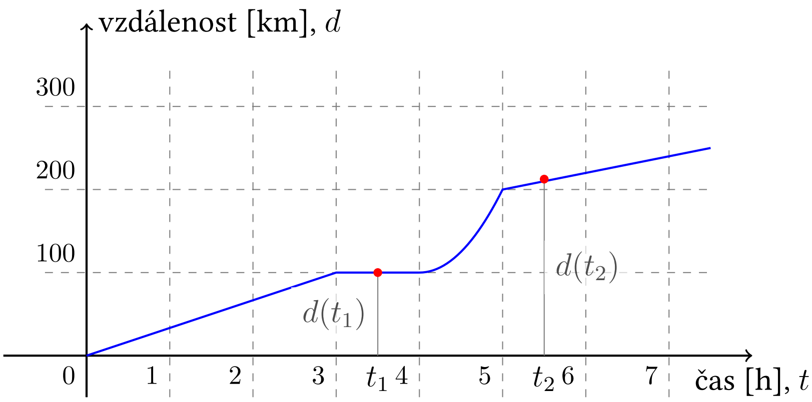
Graf na obrázku 6.1 zachycuje vzdálenost d uraženou tělesem (např. vozidlem) v závislosti na čase. Poloha d tělesa je tedy *funkcí* času t. Průměrná rychlost tělesa mezi okamžiky $t_1 < t_2$ je dána podílem

$$\frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

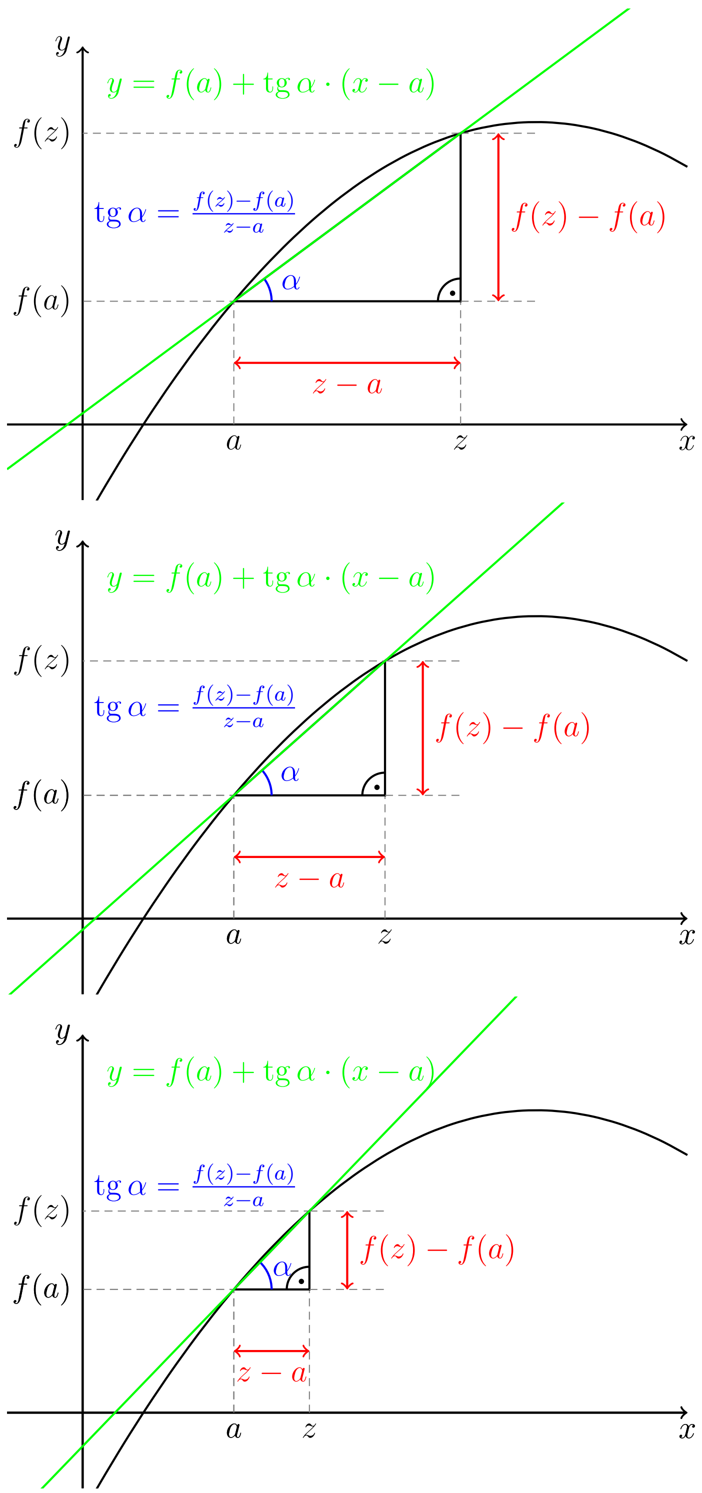
Čím jsou t_1 a t_2 navzájem blíže, tím lépe průměrná rychlost odpovídá okamžité rychlosti vozidla. V čase t_1 se tedy těleso pohybuje okamžitou rychlostí

$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Nad tímto problémem se můžeme zamýšlet i geometricky. Díváme-li se na graf uražené vzdálenosti, pak „sklon" tohoto grafu v daném bodě udává okamžitou rychlost. Podrobněji tento pohled rozebereme na obrázku 6.2, hlavní otázkou je, jak určit „sklon" grafu v daném bodě. Zde vstoupí do hry pojem tečny ke grafu funkce. Na obrázku 6.2 uvádíme grafickou reprezentaci konstrukce tečny limitním procesem pomocí sečen. Vidíme, že výše uvedený podíl lze interpretovat jako tangens úhlu svíraného tečnou grafu funkce a osou x (směrnice).



Obrázek 6.1: Graf uražené vzdálenosti v závislosti na čase.



Obrázek 6.2: Konstrukce tečny.

6.2 Derivace funkce

V souladu s tím, co bylo uvedeno na začátku této kapitoly nyní definujeme:

Definice 6.1: Nechť f je funkce definovaná na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Pokud existuje limita

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{6.1}$$

nazveme její hodnotu **derivací funkce** f **v bodě** a a označíme $f'(a)$. Pokud je tato limita konečná (tj. $f'(a) \in \mathbb{R}$) řekneme, že funkce f je **diferencovatelná v bodě** a.

Derivaci funkce f se můžeme pokoušet počítat ve všech bodech D_f. Získáváme tak novou funkci, derivaci funkce[31]:

Definice 6.2: Buď f funkce s definičním oborem D_f. Nechť M označuje množinu všech $a \in D_f$ takových, že existuje konečná derivace $f'(a)$. **Derivací funkce** f nazýváme funkci s definičním oborem M, která každému $x \in M$ přiřadí $f'(x)$. Tuto funkci značíme symbolem f'.

Poznámka 6.3: Derivace funkce f v bodě a se z různých historických důvodů značí i následujícími ekvivalentními způsoby

$$f'(a), \quad \dot{f}(a), \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a).$$

V tomto textu se budeme důrazně držet značení derivace pomocí čárky v horním indexu.

Všimněte si, že limitu v definici derivace (6.1) lze ekvivalentně přepsat do tvaru

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Tento tvar je často výhodný pro výpočty. Bod a se vyskytuje pouze v předpisu funkce jejíž limitu počítáme.

Díky derivaci nyní můžeme zkonstruovat tečnu udáním její rovnice. Rozlišujeme dva kvalitativně rozdílné případy.

Definice 6.4: Nechť existuje $f'(a)$. *Tečnou funkce* f *v bodě* a nazýváme

- přímku s rovnicí $x = a$ je-li funkce f spojitá v bodě a a $f'(a) = +\infty$ nebo $f'(a) = -\infty$.
- přímku s rovnicí $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ je-li $f'(a) \in \mathbb{R}$ (tj. je-li f je diferencovatelná v bodě a).

V prvním případě svírá tečna grafu funkce f v bodě a úhel $\frac{\pi}{2}$ s osou x, v druhém případě svírá s osou x úhel α splňující $\operatorname{tg} \alpha = f'(a)$.

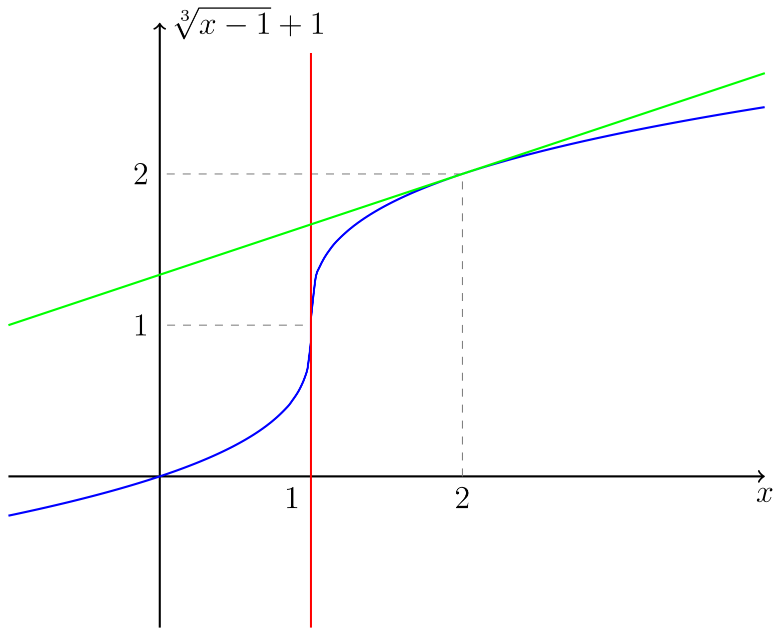
Na obrázku 6.3 je modře znázorněn graf funkce $f(x) = \sqrt[3]{x-1} + 1$, $D_f = \mathbb{R}$. Pro její derivaci v bodě 2 platí

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 + h - 1}{h \cdot \left((1+h)^{\frac{2}{3}} + (1+h)^{\frac{1}{3}} + 1\right)} = \frac{1}{3}.$$

Tečnou grafu funkce f v bodě 2 je přímka

$$y = f(2) + f'(2)(x - 2) = 2 + \frac{1}{3}(x - 2),$$

[31] Všimněte si rozdílu mezi definicemi 6.1 a 6.2, tedy mezi významem f' a $f'(a)$.



Obrázek 6.3: Dva typy tečny grafu funkce.

na obrázku 6.3 vynesena zeleně. Pro derivaci v bodě 1 platí

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h^{-\frac{2}{3}} = +\infty.$$

Protože funkce f je v bodě 1 spojitá, je tečnou v bodě 1 (červená) přímka $x = 1$.

Nyní vypočtěme derivace některých funkcí přímo pomocí její definice. Uvažme nejprve funkci ze všech funkcí nejjednodušší.

Příklad 6.5: Derivace konstantní funkce je rovna 0 v každém bodě.

Je-li $f(x) = c \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, pak

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{c - c}{x - a} = \lim_{x\to a} 0 = 0$$

pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Tento výsledek by nás neměl nijak překvapovat. Grafem konstantní funkce je přímka rovnoběžná s osou x. Tečna tohoto grafu v libovolném bodě je pak opět tato přímka, jež je rovnoběžná s osou x a svírá proto s osou x úhel 0, $\operatorname{tg} 0 = 0$.

Přistupme nyní k odvození vztahů pro derivace dalších elementárních funkcí.

Příklad 6.6: Derivace funkce e^x je opět funkce e^x. Tedy $\left(e^x\right)' = e^x$.

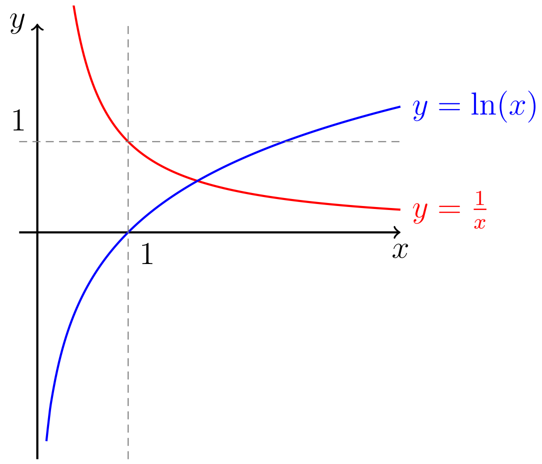
V minulé kapitole jsme odvodili vztah (lemma č. 5.53)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ podle věty o limitě složené funkce a o limitě součinu funkcí platí

$$\lim_{x\to a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = \lim_{x\to a} e^a \cdot \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} = e^a \cdot 1 = e^a.$$

Pro derivaci funkce $f(x) = e^x$ v bodě $a \in \mathbb{R}$ tedy skutečně platí platí $f'(a) = f(a)$.



Obrázek 6.4: Grafy funkcí $f(x) = \ln(x)$ a $g(x) = \frac{1}{x}$ pro $x > 0$.

Příklad 6.7: Derivace funkce $\ln x$ je funkce $\frac{1}{x}$, kde $x > 0$.

Tedy pro $x > 0$ máme rovnost $\ln' x = \frac{1}{x}$. V minulé kapitole jsme odvodili vztah (lemma č. 5.54)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Podobně jako v předchozím příkladu nyní pro kladné a platí

$$\lim_{x\to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\ln \frac{x}{a}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{a} - 1\right)}{a\left(\frac{x}{a} - 1\right)} = \frac{1}{a} \cdot 1 = \frac{1}{a}.$$

Pro derivaci funkce $f(x) = \ln x$ v bodě $a > 0$ platí $f'(a) = \frac{1}{a}$.

Pro grafickou představu o funkci a její derivaci uvádíme obrázek č. 6.4. V závislosti na bodu na ose x si všimněte vztahu mezi sklonem modré křivky (logaritmus $\ln x$) a hodnotou červené křivky ($1/x$)!

Poznámka 6.8: Všimněte si, že funkce $\ln x$ je definovaná na množině $(0, +\infty)$ a v každém bodě x jejího definičního oboru je její derivace rovna $\frac{1}{x}$. Funkce $\frac{1}{x}$ je ale definována pro všechna nenulová x.

Označíme-li $f(x) = \ln|x|$, s definičním oborem $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pak v každém bodě D_f platí $f'(x) = \frac{1}{x}$. Pro kladná x jsme to již ověřili. Pro záporná x není těžké nahlédnout, že stále platí

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{\ln|x+h| - \ln|x|}{h} &= -\lim_{h\to 0} \frac{\ln(-x-h) - \ln(-x)}{-h} = \\ &= -\lim_{t\to 0} \frac{\ln(-x+t) - \ln(-x)}{t} = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Příklad 6.9: Pro kladné přirozené $n \in \mathbb{N}$ je derivací funkce x^n funkce nx^{n-1}.

Nejprve vhodně upravme zkoumaný výraz,

$$\begin{aligned} \frac{x^n - a^n}{x-a} &= \frac{1}{x-a} \cdot (x-a)\left(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}\right) \\ &= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}}_{n \text{ členů}}. \end{aligned}$$

Proto

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1}=na^{n-1}.$$

Příklad 6.10: Speciálně pak například platí

$$\left(x^2\right)'=2x,\quad \text{nebo}\quad \left(x^{22}\right)'=22x^{21}.$$

Příklad 6.11: Derivace funkce $\sin x$ je funkce $\cos x$ a derivace funkce $\cos x$ je funkce $-\sin x$. Pomocí součtového vzorce pro sin dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a}&=\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a+a)-\sin(a)}{x-a}=\\&=\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)\cos(a)+\cos(x-a)\sin(a)-\sin(a)}{x-a}=\\&=\cos(a)\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x-a}+\sin(a)\lim_{x\to a}\frac{\cos(x-a)-1}{x-a}=\\&=\cos(a)\cdot 1+\sin(a)\cdot 0=\cos(a).\end{aligned}$$

Využili jsme znalosti již spočtených limit a věty o limitě složené funkce. Navíc

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{\cos^2 h-1}{h}\cdot\frac{1}{\cos h+1}=\\&=-\lim_{h\to 0}\frac{\sin^2 h}{h^2}\cdot\frac{h}{\cos h+1}=-1\cdot\frac{0}{1+1}=0.\end{aligned}$$

Podobným způsobem můžeme odvodit (proveďte!)

$$\lim_{x\to a}\frac{\cos(x)-\cos(a)}{x-a}=-\sin(a),$$

pro každé $a\in\mathbb{R}$.

6.3 Vlastnosti derivace funkce

Již jsme zavedli dvě lokální vlastnosti funkcí. Máme-li zadánu funkci f a bod a v jejím definičním oboru, můžeme zkoumat spojitost funkce f v bodě a a diferencovatelnost funkce f v bodě a. Jak spolu tyto pojmy souvisí?

Věta 6.12: Je-li f funkce diferencovatelná v bodě a, pak je spojitá v bodě a. Tj. platí implikace

$$f'(a)\in\mathbb{R}\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

Důkaz. Elementární úpravou a použitím věty o limitě součinu

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\big(f(x)-f(a)\big)&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)=\\&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)=f'(a)\cdot 0=0.\end{aligned}$$

Tedy $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$. Poznamenejme, že „diferencovatelnost“ znamená $f'(a)\in\mathbb{R}$ a výraz na konci výpočtu proto má za uvedených předpokladů smysl. □

Obrácené tvrzení neplatí. Přesněji, ze spojitosti funkce f v bodě a neplyne její diferencovatelnost v bodě a. Jako příklad lze uvážit funkci $f(x) = |x|$ a bod $a = 0$. Skutečně, protože

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0_+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0_+} \operatorname{sgn}(h) = +1, \\ \lim_{h\to 0_-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0_-} \operatorname{sgn}(h) = -1 \end{aligned}$$

oboustranná limita (tedy derivace funkce f v bodě 0, $f'(0)$)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

neexistuje. Funkce f je však v bodě 0 spojitá, jak snadno nahlédneme vypočtením její limity v bodě 0.

Dokonce, existují funkce *spojité* na celém $\mathbb{R}$ *nemající derivaci* ani v jednom bodě. Např.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n \cdot x\}}{10^n},$$

kde $\{x\}$ značí vzdálenost reálného čísla x od nejbližšího celého čísla. Protože $0 \leq \{x\} < 1$ konverguje řada absolutně pro každé x. Definičním oborem funkce f je proto celá reálná osa $D_f = \mathbb{R}$. Ukázat spojitost a diferencovatelnost je však už složitější. Potřebovali bychom použít vlastnosti pojmu „stejnoměrné konvergence“ funkčních řad, který však v BI-ZMA studovat nebudeme.

Pokud má funkce v daném bodě nekonečnou derivaci, nemusí v něm být spojitá. Například o funkci $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ víme, že není spojitá v bodě $a = 0$, protože obě jednostranné limity jsou navzájem různé. V bodě $a = 0$ ale *má tato funkce derivaci* a její hodnota je

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} 0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty.$$

Přistupme nyní k problému výpočtu derivace za předpokladu znalosti derivací jistých funkcí. Opět se jedná o aplikaci vět o limitách funkcí.

Věta 6.13 (Derivace součtu, součinu a podílu)**:** Nechť funkce f a g jsou diferencovatelné v bodě a. Potom platí

- $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
- $(f\cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$, pokud $g(a) \neq 0$.

Pravidlo pro derivaci součinu se někdy též nazývá **Leibnizovo pravidlo** (Gottfried Wilhelm von Leibniz, německý matematik a filozof, 1646 – 1716). Platí tedy například

$$\begin{aligned} (\sin(x)\cos(x))' &= \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = \cos(2x), \\ (x\sin(x))' &= 1\cdot\sin(x) + x\cdot\cos(x) \end{aligned}$$

Důkaz pro součet a součin. Ukažme si, jak dokázat pravidla pro derivaci součtu a součinu funkcí. Předpokládejme, že funkce f a g jsou diferencovatelné v bodě a. Potom

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a)+g'(a),\\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)(g(x)-g(a))+g(a)(f(x)-f(a))}{x-a} =\\ &= f(a)\cdot g'(a)+g(a)\cdot f'(a).\end{aligned}$$

Zde jsme vždy použili větu č. 5.18 o limitě součtu a součinu (výrazy jsou díky diferencovatelnosti definovány) a navíc jsme použili spojitost f a g, která, jak víme z věty č. 6.12, plyne z diferencovatelnosti. □

Důkaz vzorečku pro podíl se provede stejným způsobem. Ukažme si nyní použití věty č. 6.13 na několika příkladech.

Příklad 6.14: Pro derivace funkcí tg a cotg platí

$$\begin{aligned}\mathrm{tg}'(x) &= \frac{1}{\cos^2(x)}, \quad x\in\mathbb{R}\smallsetminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\},\\ \mathrm{cotg}'(x) &= -\frac{1}{\sin^2(x)}, \quad x\in\mathbb{R}\smallsetminus\left\{k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}.\end{aligned}$$

Pomocí pravidla pro derivaci podílu dostáváme vztahy

$$\begin{aligned}\mathrm{tg}'(x) &= \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)},\\ \mathrm{cotg}'(x) &= \left(\frac{\cos}{\sin}\right)'(x) = \frac{-\sin^2(x)-\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)},\end{aligned}$$

platné na příslušných definičních oborech.

Nyní tedy umíme derivovat součty, součiny a podíly funkcí, jejichž derivace již známe. Je možné derivovat i složené funkce, s kterými často přicházíme do styku? Odpověď na tuto otázku je kladná.

Věta 6.15 (Derivace složené funkce)**:** Nechť g je funkce diferencovatelná v bodě a, f je diferencovatelná v bodě $g(a)$. Potom funkce $f\circ g$ je diferencovatelná v bodě a a platí

$$(f\circ g)'(a) = f'\big(g(a)\big)\cdot g'(a).$$

Důkaz. Důkaz je založen na úpravě

$$\frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a} = \frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)}\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a},$$

platné pro každé $x\neq a$ pro které navíc $g(x)\neq g(a)$ a větě o limitě složené funkce. Funkce f je diferencovatelná v bodě $g(a)$ a proto je jistě i definována na okolí tohoto bodu, dejme tomu $H_{g(a)}$. Definujme funkci

$$h(x) := \begin{cases}\frac{f(x)-f(g(a))}{x-g(a)}, & x\in H_{g(a)}\smallsetminus\{g(a)\},\\ f'(g(a)), & x=g(a).\end{cases}$$

Tato funkce je definována na $H_{g(a)}$, podle předpokladů pro ni platí

$$\lim_{x\to g(a)} h(x) = f'(g(a))$$

a je proto spojitá v bodě $g(a)$. Díky spojitosti funkce g v bodě a nyní platí rovnost

$$\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x-a} = h(g(x)) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x-a},$$

pro všechna $x \neq a$ z nějakého okolí bodu a (speciálně i ve tvaru $0 = 0$ pro ta, pro která případně platí $g(x) = g(a)$). Podle věty o limitě složené funkce je limita funkce $h(g(x))$ v bodě a rovna $f'(g(a))$. Skutečně, g v bodě a má za limitu $g(a)$, h v bodě $g(a)$ má za limitu $f'(g(a))$ a třetí předpoklad této věty je splněn díky spojitosti h v bodě $g(a)$. Konečně podlě věty o limitě součinu z poslední rovnice dostaneme

$$\lim_{x\to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x-a} = \lim_{x\to a} h(g(x)) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

□

Příklad 6.16: Platí tedy například:

$$\left(e^{x^2}\right)' = e^{x^2} \cdot 2x, \quad \left(\sin\left(\cos(x)\right)\right)' = \cos\left(\cos(x)\right) \cdot \left(-\sin(x)\right).$$

Skutečně, v prvním příkladě je vnější funkcí $f(x) = e^x$ a vnitřní funkcí $g(x) = x^2$. Pak totiž

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = e^{g(x)} = e^{x^2}.$$

A podle věty o derivaci složené funkce

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{x^2} \cdot 2x.$$

Podobně lze postupovat i v druhém příkladě.

Příklad 6.17: Derivace funkce $h(x) = x^\alpha$, $x > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, je opět $h'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Víme, že pro kladné $x > 0$ platí $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$. Označme $f(x) = e^x$ vnější funkci a $g(x) = \alpha \ln(x)$ vnitřní funkcí, tedy $x^\alpha = f(g(x))$. Potom podle věty o derivaci složené funkce máme

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0.$$

Příklad 6.18: Derivace funkce $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, kde $a > 0$ je $f'(x) = a^x \ln a$.

Platí $h(x) = e^{x \ln a}$. Označme vnější funkci $f(x) = e^x$ a vnitřní funkci $g(x) = x \ln a$. Potom podle věty o derivaci složené funkce platí

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a.$$

V poslední části této podkapitoly budeme hledat vzorečky pro derivace zbývajících elementárních funkcí. K nim patří i jejich inverzní funkce. Nyní proto musíme podrobněji prozkoumat vlastnosti inverzních funkcí a ukázat, jak hledat jejich derivace.

Znění následující věty může na první čtení znít komplikovaně. Graf funkce a její inverzní funkce jsou osově symetrické vůči ose prvního kvadrantu. Zkuste si rozmyslet co se stane se směrnicí tečny grafu funkce, pokud ji osově překlopíme vzhledem k ose prvního kvadrantu? To vlastně říká následující věta.

Věta 6.19 (Derivace inverzní funkce)**:** Buďte f spojitá a ryze monotónní na intervalu $I = (a, b)$ a bod $c \in I$. Má-li inverzní funkce f^{-1} konečnou nenulovou derivaci v bodě $f(c)$, potom má f derivaci v bodě c a platí

$$f'(c) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(c))}. \tag{6.2}$$

Důkaz. Označme $d = f(c)$. Všimněme si, že pro $x \in I$, $x \neq c$ platí

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \left(\frac{f^{-1}\big(f(x)\big) - f^{-1}(d)}{f(x) - d} \right)^{-1} = \Big(g\big(f(x)\big)\Big)^{-1},$$

kde

$$g(x) = \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(d)}{x - d}, \quad \text{pro } x \in f(J),\ x \neq d.$$

Podle předpokladu je ale

$$\lim_{x \to d} g(x) = \left(f^{-1}\right)'(d)$$

konečná nenulová, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = d$ a $f(x) \neq d$ pro $x \neq c$. Podle věty č. 5.23 o limitě složené funkce pak tedy

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \frac{1}{\left(f^{-1}\right)'(d)}.$$

□

Poznámka 6.20: Vzorec pro derivaci inverzní funkce uvedený v předchozí větě může být problematické si zapamatovat. Ukažme si jednoduchý formální trik jak si ho případně odvodit. Funkce f a její inverze formálně splňuje rovnici

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x.$$

Zderivujeme-li obě strany této rovnosti podle x a využijeme-li větu o derivaci složené funkce dostanem

$$(f^{-1})'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) = 1$$

odkud ihned plyne (6.2).

Upozorněme čtenáře, že tato poznámka není důkazem věty o derivaci inverzní funkce. Vůbec jsme například neověřili existenci hledané derivace!

Příklad 6.21: Již víme, že derivace ln je funkce $\frac{1}{x}$. Funkce ln je ale inverzní funkce k funkci e^x. Zkusme si na tomto příkladě ukázat použití předcházející věty.

Chceme derivovat $f(x) = \ln(x)$ na intervalu $I = (0, +\infty)$. Tato funkce je spojitá, ryze monotónní a její inverzní funkcí je $f^{-1}(x) = e^x$. Je-li $x \in I$, pak pro derivaci f^{-1} v bodě $f(x)$ platí

$$\left(f^{-1}\right)'\big(f(x)\big) = e^{\ln(x)} = x \in I.$$

Podle předcházející věty o derivaci inverzní funkce tedy je

$$\ln'(x) = f'(x) = \frac{1}{\left(f^{-1}\right)'\big(f(x)\big)} = \frac{1}{x},$$

což jsme očekávali.

Příklad 6.22: Pro derivaci funkce arcsin platí

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1, 1).$$

Funkce $f = \arcsin$ je inverzní funkcí k funkci sin zúžené na interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Tj. $f^{-1} = \sin\big|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle}$. Pro každé $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ již víme, že platí

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \cos x \neq 0.$$

Podle věty o derivaci inverzní funkce máme pro každé $x \in (-1, 1)$ rovnost

$$\arcsin'(x) = f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Pro $x \in (-1, 1)$ je ale

$$\cos\big(\arcsin(x)\big) = \sqrt{1 - \sin^2\big(\arcsin(x)\big)} = \sqrt{1-x^2} \neq 0,$$

a tudíž

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1, 1).$$

Příklad 6.23: Pro derivaci funkce arctg platí

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Chceme derivovat $f = \operatorname{arctg}$ na $I = \mathbb{R}$, kde je spojitá a ryze monotónní. Její inverzní funkce je $f^{-1} = \operatorname{tg}\big|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$. Pro každé $x \in I$ platí

$$\left(f^{-1}\right)'\big(f(x)\big) = \operatorname{tg}'\big(\operatorname{arctg}(x)\big) = \frac{1}{\cos^2\big(\operatorname{arctg}(x)\big)} \neq 0,$$

protože $\operatorname{arctg}(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Navíc je

$$\cos^2\big(\operatorname{arctg} x\big) = \frac{\cos^2\big(\operatorname{arctg} x\big)}{\sin^2\big(\operatorname{arctg} x\big) + \cos^2\big(\operatorname{arctg} x\big)} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\big(\operatorname{arctg} x\big)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Odtud

$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Velmi podobným způsobem bychom odvodili derivace zbývajících funkcí arccos a arccotg. Jejich derivace budou uvedeny níže v přehledné tabulce.

$f(x)$	$f'(x)$	podmínky
x^n	nx^{n-1}	$x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$
x^n	nx^{n-1}	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n = -1, -2, \dots$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
a^x	$a^x \ln a$	$x \in \mathbb{R}$, $a > 0$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{tg}(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{cotg}(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$	$x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\mathrm{arctg}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{arccotg}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$

Tabulka 6.2: Tabulka doposud známých derivací elementárních funkcí.

6.4 Derivace elementárních funkcí: přehled a příklady

Shrňme si přehledně doposud odvozené vztahy pro derivace. Uvádíme tabulku 6.2 zatím známých derivací.

Příklad 6.24: Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \mathrm{arctg}\, x, \quad x \neq 0.$$

Přímým výpočtem získáváme

$$f'(x) \overset{1}{=} \left(\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x}\right)' + \mathrm{arctg}'(x) \overset{2}{=} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{1+x^2} \overset{3}{=} 0$$

V označených rovnostech jsme postupně použili

1. derivace součtu,
2. znalost derivace funkcí $\mathrm{arctg}(x)$, x^{-1} a derivace složené funkce,
3. algebraické úpravy.

Příklad 6.25: Nalezněte derivaci funkce

$$f(x) = x^x, \quad x > 0.$$

V tomto případě postupujeme následovně

$$f'(x) \stackrel{1}{=} \left(e^{x \ln x}\right)' \stackrel{2}{=} e^{x \ln x} \cdot \left(x \ln x\right)' \stackrel{3}{=} e^{x \ln x} \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) \stackrel{4}{=} x^x\left(1 + \ln x\right).$$

Postupně jsme použili:

1. úprava výrazu před samotnou derivací,
2. derivace složené funkce, znalost derivace funkce e^x,
3. derivace součinu a znalost derivace $\ln x$, resp. x,
4. algebraické úpravy.

Úprava použitá v předchozím příkladě, tedy přepis na exponenciálu se často používá právě u takovýchto druhů funkcí. Jako další příklad ještě uveďme

$$\begin{aligned}\left((2 + \sin x)^{\cos x}\right)' &= \left(e^{\cos(x) \ln(2+\sin x)}\right)' = \\ &= e^{\cos(x) \ln(2+\sin x)} \cdot \left(-\sin(x) \ln(2 + \sin x) + \frac{\cos^2(x)}{2 + \sin x}\right).\end{aligned}$$

6.5 Jednostranné derivace a derivace vyšších řádů

Ještě uvedeme malou poznámku k **jednostranné derivaci** a k derivacím vyšších řádů.

Lze definovat derivaci funkce f v bodě a zleva i zprava jako limity

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a_+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{a} \quad f'_-(a) = \lim_{x \to a_-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Příklad 6.26: Uvažme funkci $f(x) = |x|$. Pro $x \neq 0$ a $a = 0$ platí

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sgn} x.$$

Tudíž

$$f'_+(0) = 1 \quad \text{a} \quad f'_-(0) = -1,$$

ale $f'(0)$ neexistuje.

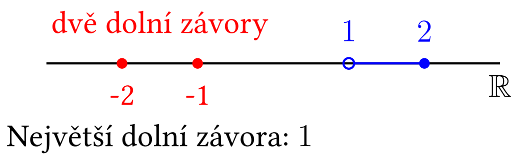
Derivací funkce f dostáváme novou funkci f', jejíž definiční obor ovšem může být menší než původní D_f. Nyní můžeme znovu derivovat f', tj. sestrojit f''. Rekurzivně tedy definujeme **derivace vyšších řádů** (dokud existují)

$$f^{(0)}(x) = f(x), \quad f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x), \quad n \geq 1.$$

Příklad 6.27: Například pro $f(x) = x^3 - 2x + 4$ máme

$$f'(x) = 3x^2 - 2, \quad f''(x) = 6x, \quad f'''(x) = 6, \quad f^{(n)}(x) = 0 \; n \geq 4.$$

Poznámka 6.28 (Mathematica)**:** K výpočtu derivace lze využít příkazu D[f, x], zde f je derivovaná funkce (výraz) a x proměnná, podle které se derivuje. Derivaci vyššího, n-tého, řádu lze zapsat například takto D[f, {x, n}].



Obrázek 6.5: Ilustrace ke konstrukci infima množiny, zde $A = (1, 2\rangle$. Množina dolních závor je $(-\infty, 1\rangle$, čili největší dolní závorou je 1.

6.6 Maximum, minimum, supremum a infimum

Než se v následující podkapitole pustíme do vyšetřování extrému funkce je vhodné připomenout pojem maxima a minima množiny. Buď $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $\alpha \in M$ nazýváme

- **maximem množiny** M, právě když pro všechna $x \in M$ platí $x \leq \alpha$,
- **minimem množiny** M, právě když pro všechna $x \in M$ platí $\alpha \leq x$.

Některé množiny $M \subset \mathbb{R}$ nemusí mít minimum ani maximum. Například otevřený interval $M = (0, 1)$. Čísla 0 a 1 nejsou minimem ani maximem, neboť $0, 1 \notin M$. Každá konečná množina ovšem má minimum i maximum.

Abychom tento problém odstranili, zavádíme pojem infima a suprema množiny. Čtenáři nabízíme grafickou ilustraci definice infima množiny na obrázku č. 6.5.

Definice 6.29: Buď A neprázdná zdola omezená podmnožina množiny reálných čísel. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazveme **infimem množiny** A, značíme $\inf A$, právě když

1. pro každé $x \in A$ platí $\alpha \leq x$ (α je **dolní závora** A),
2. pokud $\beta \in \mathbb{R}$ také splňuje předchozí bod, pak $\beta \leq \alpha$ (α je největší dolní závora A).

Pokud množina A není zdola omezená, pak klademe $\inf A := -\infty$. Pro prázdnou množinu klademe $\inf \emptyset := +\infty$.

Definice 6.30: Buď A neprázdná shora omezená podmnožina množiny reálných čísel. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazveme **supremem množiny** A, značíme $\sup A$, právě když

1. pro každé $x \in A$ platí $x \leq \alpha$ (α je **horní závora** A),
2. pokud $\beta \in \mathbb{R}$ také splňuje předchozí bod, pak $\alpha \leq \beta$ (α je nejmenší horní závora A).

Pokud množina A není shora omezená, pak klademe $\sup A := +\infty$. Pro prázdnou množinu klademe $\sup \emptyset := -\infty$.

Věta 6.31: Buď A podmnožina množiny reálných čísel. Potom existuje její infimum ($\inf A$) a supremum ($\sup A$).

Důkaz. Vynecháváme, plyne z axiomu úplnosti množiny reálných čísel. □

Příklad 6.32: Pro interval $J = (-2, 1\rangle$ platí

$$\max J = 1, \quad \sup J = 1, \quad \min J \text{ neexistuje}, \quad \inf J = -2.$$

V dalším textu nás budou zajímat hodnoty funkce nabývané na různých množinách. Zavádíme proto následující značení. Pro $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a množinu $M \subset D_f$ klademe

$$\begin{aligned} \inf_M f &= \inf_{x\in M} f(x) := \inf\{f(x) \mid x \in M\}, \\ \sup_M f &= \sup_{x\in M} f(x) := \sup\{f(x) \mid x \in M\}. \end{aligned}$$

Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá funkce a $M \subset D_f$ uzavřený omezený interval. Potom klademe

$$\begin{aligned} \max_M f &= \max_{x\in M} f(x) := \max\{f(x) \mid x \in M\}, \\ \min_M f &= \min_{x\in M} f(x) := \min\{f(x) \mid x \in M\}. \end{aligned}$$

Připomeňme, že tato min a max existují díky spojitosti f a uzavřenosti M.

6.7 Extrémy funkce

Řada praktických problémů může být formulována jako optimalizační (minimalizační či maximalizační) úloha. Ve své nejjednodušší podobě zní následovně: různé „případy“ jsou očíslovány parametrem x a hledáme takové řešení, které minimalizuje/maximalizuje jistou funkci $f(x)$ (např. zisk). Uveďme několik jednoduchých příkladů.

- Jak distribuovat objednané zboží mezi zákazníky co nejefektivněji, tj. s co *nejmenšími* náklady na dopravu?
- Jak sestavit jídelníček splňující zadané dietologické podmínky a *minimalizovat* při tom náklady?
- Jak efektivně distribuovat pohonné hmoty a materiál na frontu a současně *maximalizovat* protivníkovy ztráty?

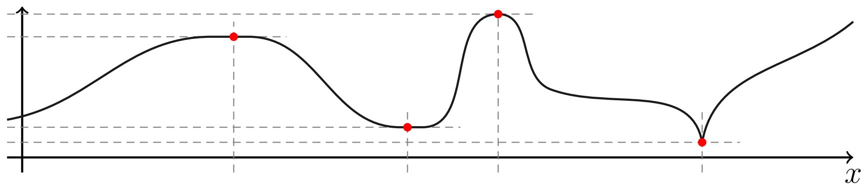
Na optimalizační úlohy často narazíte ve strojovém učení. V řadě metod z této oblasti (např. rozpoznávání) pod termínem „učení“ nenajdeme nic jiného než hledání maxima/minima jisté komplikované funkce.

Zde v BI-ZMA se při hledání maxim a minim omezíme na reálné funkce reálné proměnné. Samozřejmě v realitě je často zapotřebí uvažovat ne jen jednu proměnnou x, ale dvě a nebo více. Řešením těchto otázek se zabývá teorie funkce více proměnných, resp. teorie optimalizace. Řada zde zaváděných konceptů se ovšem dále používá i v případě funkcí více proměnných a pro čtenáře je snazší se s nimi v tomto snadno představitelném světě funkcí jedné proměnné seznámit.

Započněme výklad této problematiky přesným zavedením pojmů minima a maxima funkce.

Definice 6.33: Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in D_f$

1. **lokální maximum**
2. **lokální minimum**
3. **ostré lokální maximum**
4. **ostré lokální minimum**



Obrázek 6.6: K definici různých typů extrémů.

právě když existuje okolí (v případném krajním bodě definičního oboru jednostranné) $H_a \subset D_f$ bodu a tak, že

1. pro všechna $x \in H_a$ platí $f(x) \leq f(a)$,
2. pro všechna $x \in H_a$ platí $f(x) \geq f(a)$,
3. pro všechna $x \in H_a \setminus \{a\}$ platí $f(x) < f(a)$,
4. pro všechna $x \in H_a \setminus \{a\}$ platí $f(x) > f(a)$.

Lokální maximum a lokální minimum společně nazýváme **lokální extrém**. Následující věta dává nutnou podmínku pro existenci lokálního extrému. Pro lepší představu a orientaci mezi těmito typy extrémů uvádíme obrázek 6.6.

Nyní se můžeme snažit odpovědět na otázku, jak extrémy funkcí hledat. První výsledek je negativního charakteru, říká nám kde zcela jistě extrémy funkce nenastávají. Můžeme se pak soustředit na prozkoumávání bodů, kde extrémy být mohou.

Věta 6.34 (Nutná podmínka existence lokálního extrému)**:** Nechť funkce f má v bodě a lokální extrém. Potom $f'(a) = 0$, nebo derivace v bodě a neexistuje.

Důkaz. Kdyby např. $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$, potom lze nalézt $\varepsilon > 0$ tak, že pro všechna $x \in (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon) \setminus \{a\}$ platí

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Potom ale platí $f(x) > f(a)$ pro $x \in (a,\ a + \varepsilon)$ a $f(x) < f(a)$ pro $x \in (a - \varepsilon, a)$. Funkce f tedy v bodě a nemá lokální extrém. Podobně lze postupovat v případě $f'(a) < 0$. □

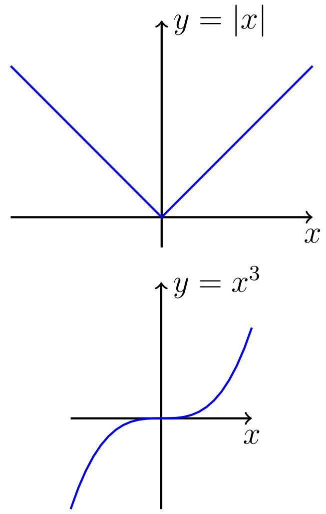
Tato věta udává *pouze nutnou podmínku* pro existenci lokálního extrému. Zdůrazněme tento fakt pomocí následujících příkladů.

Příklad 6.35: Uvažme funkci $f(x) := |x|$. Funkce f má jistě ostré lokální minimum v bodě 0 (to vidíme přímo z definice ostrého lokálního minima: pro všechna nenulová reálná x platí $|x| > 0$ a $0 = 0$), ale její derivace v bodě 0 neexistuje (vypočteno v předchozí části textu).

Příklad 6.36: Funkce $f(x) := x^3$ má v bodě 0 nulovou derivaci, $f'(0) = 0$, avšak nenabývá v něm lokálního extrému (opět viz definici: pro kladné reálné x platí $x^3 > 0$ a pro záporné reálné x platí $x^3 < 0$). Je dokonce rostoucí na celém $\mathbb{R}$. Jinak řečeno, k tomu aby funkce v bodě a měla extrém *nestačí* aby $f'(a) = 0$. Tento omyl je *častým zdrojem chyb*.

Grafy funkcí z předchozích dvou příkladů jsou uvedeny na obrázku 6.7.

Obecně ani nevíme, jestli daná funkce vůbec extrém má. Jedná-li se ale o funkci spojitou na uzavřeném intervalu, pak je existence extrémů zaručena následující větou.



Obrázek 6.7: Graf absolutní hodnoty (v bodě 0, kde neexistuje derivace, nabývá minima) a funkce x^3 (v bodě 0 sice má nulovou derivaci, ale v tomto bodě nenabývá extrému).

Věta 6.37 (Extrém spojité funkce na uzavřeném intervalu)**:** Funkce f spojitá a definovaná právě na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ nabývá maxima a minima, přesněji existují $\alpha, \beta \in \langle a, b\rangle$ splňující $f(\alpha) = \max_{\langle a,b\rangle} f$ a $f(\beta) = \min_{\langle a,b\rangle}$. Extrém může být nabyt pouze v krajních[32] bodech a, b a v bodech kde je derivace rovna 0 nebo neexistuje.

Důkaz. Již víme, že je-li f spojitá, pak obrazem uzavřeného intervalu $J = \langle a, b\rangle$ je opět uzavřený interval $f(J)$ (nebo jednoprvková množina, v tom případě je situace triviální). Vzpomeňte na větu 5.45. Krajní body tohoto intervalu $f(J)$ pak jsou příslušným maximem, resp. minimem, dané funkce na intervalu J. □

Tuto větu lze s výhodou použít, hledáme-li pouze největší a nejmenší hodnotu spojité funkce f na uzavřeném intervalu J a nezajímají nás další detaily o průběhu funkce f. Stačí pouze porovnat funkční hodnoty v bodech podezřelých z extrému, tedy bodech kde je derivace funkce f nulová nebo neexistuje, nebo v krajních bodech intervalu na kterém extrémy funkce zkoumáme.

Příklad 6.38: Jako příklad uvažme funkci

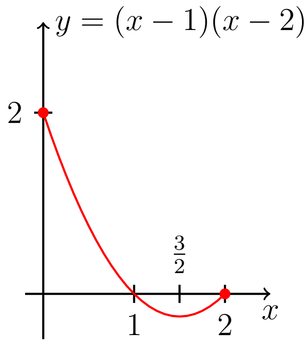
$$f(x) = (x - 1)(x - 2)$$

na intervalu $\langle 0, 2\rangle$. Derivace je nulová v bodě $\frac{3}{2}$, porovnáním funkčních hodnot

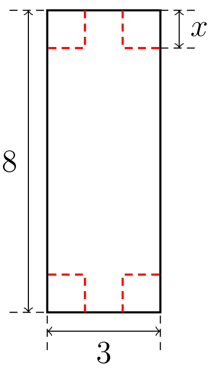
$$f(0) = 2, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}, \quad f(2) = 0$$

uzavíráme že globální maximum je v bodě 0 s hodnotou 2 a globální minimum je v bodě $\frac{3}{2}$ s hodnotou $-\frac{1}{4}$. Graf uvažované funkce je na obrázku 6.8. Povšimněte si ale, že jsme extrémní hodnoty nalezli bez jakékoliv grafické představy (kterou často nemáme k dispozici), využili jsme pouze spojitost dané funkce a uzařenost zadaného intervalu!

[32] Krajní body také patří do kategorie bodů, kde derivace neexistuje, protože funkce není definována na celém jejich okolí a proto nemůže mít derivaci. Explicitně je ale uvádíme, aby na ně případný čtenář nezapomněl.



Obrázek 6.8: Ukázka globálních extrémů spojité funkce na uzavřeném intervalu.



Obrázek 6.9: Konstrukce krabičky z papíru tvaru obdélníka.

Příklad 6.39: Z papíru tvaru obdélníka se stranami 8 cm a 3 cm vyrobíme krabičku tak, že vystřihneme ze všech čtyř rohů stejné čtverce. Krabička bude mít výšku rovnou straně tohoto čtverce. Viz obrázek 6.9. Nalezněte délku strany čtverce, při níž bude objem krabičky největší.

Označme stranu vystřihnutých čtverců symbolem x. Pro objem krabičky $O(x)$ platí

$$O(x) = x(8-2x)(3-2x) = 4x^3 - 22x^2 + 24x,$$

kde $x \in \langle 0, \frac{3}{2} \rangle$. Derivace $O(x)$ je nula pouze v bodech 3 a $\frac{2}{3}$, ovšem pouze $\frac{2}{3} \in \langle 0, \frac{3}{2} \rangle$. V tomto bodě nastává i maximum $O(\frac{2}{3}) = \frac{200}{27}\,\mathrm{cm}^3$, protože $O(0) = O(\frac{3}{2}) = 0$.

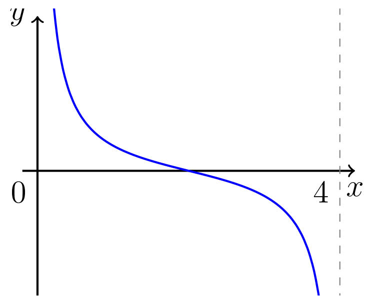
Na závěr této podkapitoly ještě poznamenejme, že uzavřenost intervalu v předchozí větě č. 6.37 je podstatná. Jako příklad uvažme funkci

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-4}$$

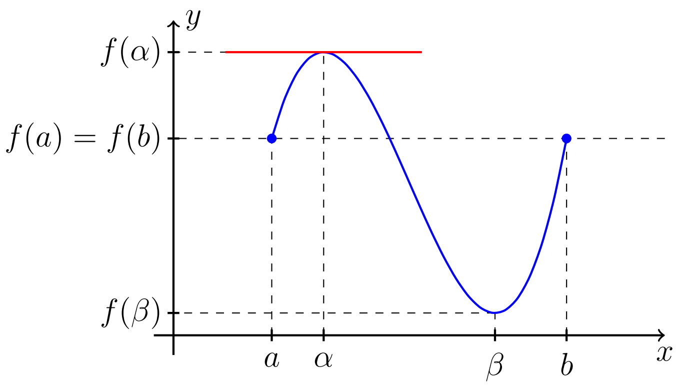
spojitou na otevřeném intervalu $J = (0, 4)$. Tato funkce nemá na J ani maximum ani minimum. Skutečně, platí totiž

$$\lim_{x \to 0_+} f(x) = +\infty - \frac{1}{4} = +\infty,$$
$$\lim_{x \to 4_-} f(x) = \frac{1}{4} + (-\infty) = -\infty.$$

Graf této funkce je uveden na obrázku 6.10.



Obrázek 6.10: Funkce spojitá na otevřeném intervalu nemusí mít minimum ani maximum.



Obrázek 6.11: Demonstrace k Rolleově větě.

6.8 Věta o přírůstku funkce

Intuitivně (z geometrické interpretace derivace jako tečny) tušíme, že pokud je derivace funkce kladná na intervalu I, pak je funkce rostoucí na intervalu I. Pomocí Lagrangeovy věty, kterou zanedlouho zformulujeme, bude snadné správnost této intuice ověřit.

Pozorování: pro „pěknou" funkci, mající v krajních bodech jistého intervalu stejné funkční hodnoty, existuje uvnitř tohoto intervalu bod, kde má její graf tečnu rovnoběžnou s osou x. Viz obrázek č. 6.11.

Věta 6.40 (Rolleova): Nechť funkce f splňuje podmínky

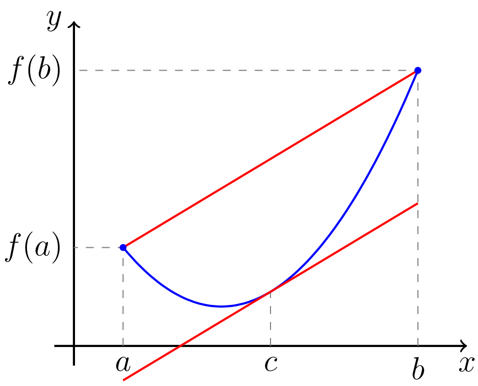
1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b),
3. $f(a) = f(b)$.

Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

Důkaz. Pokud je funkce f konstantní, lze za c volit libovolné číslo z intervalu (a, b).

V případě, že f není konstantní, je $f(\langle a, b\rangle) = \langle A, B\rangle$ uzavřený interval (to jak víme, plyne ze spojitosti f). Existují tedy $\alpha, \beta \in \langle a, b\rangle$ tak, že $A = f(\alpha) < f(\beta) = B$.

Protože $f(a) = f(b)$ leží alespoň jeden z bodů α, β uvnitř (a, b). Označme tento bod c. Funkce f má v bodě c lokální extrém, a proto $f'(c) = 0$. Skutečně, funkce f má totiž derivaci v každém bodě intervalu (a, b). $\square$



Obrázek 6.12: Demonstrace k Lagrangeově větě.

Přírůstek funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ je $f(b) - f(a)$ (tj. změna funkční hodnoty mezi a a b). Lze ho nějak odhadnout pomocí derivace? Odpověď na tuto otázku je obsahem následující věty[33].

Věta 6.41 (Lagrangeova, O přírustku funkce)**:** Nechť funkce f splňuje podmínky

1. f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,
2. f má derivaci v každém bodě intervalu (a, b).

Potom existuje bod $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, nebo ekvivalentně $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Důkaz. Položme $g(x) := f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. Tato funkce je spojitá na $\langle a, b\rangle$, má derivaci v každém bodě intervalu (a, b) a navíc $g(a) = g(b) = f(a)$. Proto podle Rolleovy věty existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

6.9 Vyšetřování průběhu funkce a hledání jejích extrémů

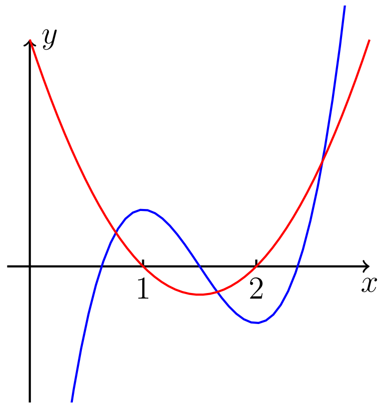
Pomocí věty o přírůstku funkce (věta č. 6.41) můžeme přesně zformulovat vztah mezi monotonií a první derivací funkce. Nejprve si zaveďme vhodné značení.

Definice 6.42: Nechť J je interval s krajními body a a b. Potom **vnitřkem intervalu** J nazveme otevřený interval (a, b). Značíme ho $J^\circ = (a, b)$.

Věta 6.43: Nechť f je spojitá na intervalu J a nechť pro každé $x \in J^\circ$ existuje $f'(x)$. Potom platí následujících pět tvrzení,

1. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) \geq 0\big) \Rightarrow f$ je rostoucí na J,

[33] Uveďme ještě jeden způsob jak se dívat na následující větu. Pokud jsme se v daném časovém intervalu pohybovali průměrnou rychlostí v, pak musí existovat časový okamžik v němž naše okamžitá rychlost byla rovna v.



Obrázek 6.13: Funkce a její derivace. Znaménko derivace rozhoduje o monotonii funkce.

2. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) \leq 0\big) \Rightarrow f$ je klesající na J,
3. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) > 0\big) \Rightarrow f$ je ostře rostoucí na J,
4. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) < 0\big) \Rightarrow f$ je ostře klesající na J,
5. $\big(\forall x \in J^\circ\big)\big(f'(x) = 0\big) \Rightarrow f$ je konstantní na J.

Důkaz 1. tvrzení, ostatní naprosto analogicky. Buďte $x_1, x_2 \in J$ taková, že $x_1 < x_2$. Podle Lagrangeovy věty o přírůstku funkce aplikované na interval $\langle x_1, x_2\rangle$ existuje $c \in (x_1, x_2)$ tak, že

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Protože $c \in J^\circ$, je $f'(c) \geq 0$. Tudíž

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

$\square$

Hlavním výsledkem předchozí věty tedy je: Je-li funkce f diferencovatelná, pak o tom zda roste či klesá rozhoduje znaménko její derivace. Pro lepší představu uvažme funkci

$$f(x) := 2x^3 - 9x^2 + 12x - \frac{9}{2}$$

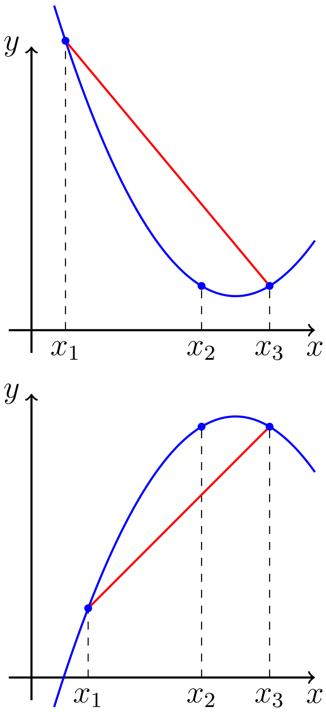
pro jejíž derivaci platí

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 18x + 12 \\ &= 6(x-1)(x-2). \end{aligned}$$

Porovnejte funkci a její derivaci na obrázku č. 6.13.

Zjistili jsme, že první derivace funkce f souvisí s monotonií funkce f. Nyní ukážeme, že druhá derivace funkce f dále souvisí s tvarem grafu funkce f. Nejprve zaveďme potřebné pojmy.

Definice 6.44: Funkci f definovanou na intervalu J nazveme **konvexní na intervalu** (resp. **konkávní na intervalu**) J, právě když pro každé $x_1, x_2, x_3 \in J$ splňující $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $(x_2, f(x_2))$ buďto pod (resp. nad) přímkou spojující body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$, nebo na ní.



Obrázek 6.14: Konvexní (vlevo) a konkávní (vpravo) funkce na intervalu.

Definice 6.45: Funkci f definovanou na intervalu J nazveme **ryze konvexní na intervalu** (resp. **ryze konkávní na intervalu**) J, právě když pro každé $x_1, x_2, x_3 \in J$ splňující $x_1 < x_2 < x_3$, leží bod $(x_2, f(x_2))$ pod (resp. nad) přímkou spojující body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$.

Očividně, f je konkávní na intervalu J, právě když $-f$ je konvexní na intervalu J. Stačí se tedy soustředit například na konvexní funkce.

K osvětlení terminologie uveďme etymologický význam obou pojmů. *Convexum* má v latině význam údolí a *concavum* význam výdutě. Ukázka konvexní a konkávní funkce je dále uvedena na obrázku č. 6.14.

Přepišme požadavek v definici konvexnosti explicitně. Máme funkci f definovanou na intervalu J a body $x_1 < x_2 < x_3$. Přímka procházející body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_3, f(x_3))$ je dána rovnicí

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x - x_1).$$

Požadavek, aby bod $(x_2, f(x_2))$ ležel pod (nebo na) této přímce pak lze po několika drobných úpravách vyjádřit jako nerovnost

$$f(x_2)(x_3 - x_1) \leq f(x_1)(x_3 - x_2) + f(x_3)(x_2 - x_1).$$

Často bývá zvykem vyjádřit konvexitu alternativním způsobem. Uvažme body $x_1 := x < y =: x_3$ a bod $x_2 := \lambda x + (1 - \lambda)y$, $\lambda \in (0, 1)$ ležící mezi x a y. Potom lze předchozí nerovnost přepsat do tvaru

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y)(y - x) \leq f(x)(\lambda y - \lambda x) + f(y)((\lambda - 1)x + (1 - \lambda)y),$$

což po jednoduché úpravě přechází na

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Není těžké rozmyslet, že f je konvexní na J, právě když pro každé $x, y \in J$ a $\lambda \in (0,1)$ platí předchozí nerovnost.

Věta 6.46: Buď f funkce spojitá na intervalu J, která má druhou derivaci v každém bodě intervalu J°.

- Funkce f je konvexní na intervalu J, právě když $f''(x) \geq 0$ pro každé $x \in J^\circ$.
- Je-li $f''(x) > 0$ v každém bodě $x \in J^\circ$, pak je f ryze konvexní na J.

Důkaz implikace zprava doleva. Z předpokladu $f''(x) \geq 0$, $x \in J^\circ$ plyne, že f' je rostoucí na J°. Buďte $x_1, x_2, x_3 \in J$ splňující $x_1 < x_2 < x_3$. Dle Lagrangeovy věty existují ξ, η splňující $x_1 < \eta < x_2 < \xi < x_3$ a platí

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(\xi) \geq f'(\eta) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Po elementárních úpravách

$$f(x_2)(x_3 - x_1) \leq f(x_1)(x_3 - x_2) + f(x_3)(x_2 - x_1).$$

Tím je dokázán i druhý bod věty ($\geq$ se změní na $>$). □

Důkaz implikace zleva doprava. Postupujme sporem. Předpokládejme, že f je konvexní na J a současně existuje bod $x_2 \in J^\circ$ splňující $f''(x_2) = \lim_{x \to x_2} \frac{f'(x) - f'(x_2)}{x - x_2} < 0$. Existuje tedy $H_\delta(x_2) \subset J$ takové, že

$$\frac{f'(x) - f'(x_2)}{x - x_2} < 0 \quad \text{kdykoliv } x \in H_\delta(x_2) \setminus \{x_2\}.$$

Celkem tedy $f'(x) > f'(x_2)$ kdykoliv $x \in (x_2 - \delta, x_2)$ a $f'(x_2) > f'(x)$ kdykoliv $x \in (x_2, x_2 + \delta)$. Položme $x_1 = x_2 - \delta$ a $x_3 = x_2 + \delta$. Pak existují η a ξ pro které $x_2 - \delta < \eta < x_2 < \xi < x_2 + \delta$ a

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(\xi) < f'(\eta) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Což po elementárních úpravách dává spor s konvexností,

$$f(x_2)(x_3 - x_1) > f(x_1)(x_3 - x_2) + f(x_3)(x_2 - x_1).$$

□

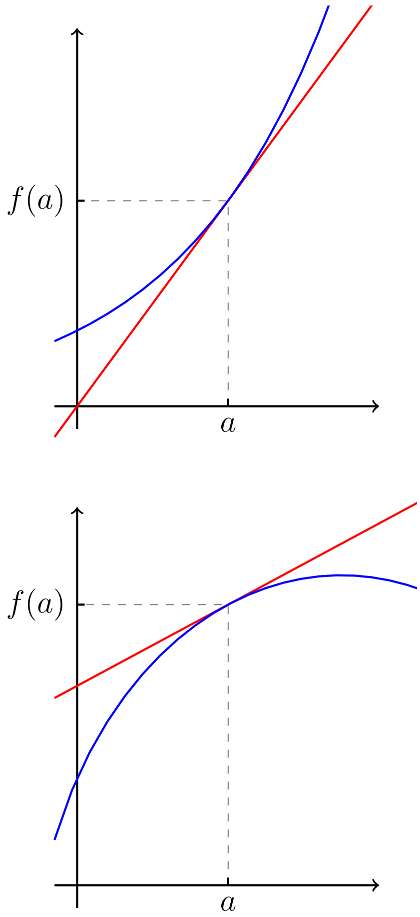
Poznámka 6.47: Stejná věta platí i pro konkávní funkce. V tomto případě je znaménko druhé derivace (jejíž existence je předpokladem věty) záporné.

Definice 6.48: Nechť funkce f má konečnou derivaci v bodě $a \in D_f$. Pokud existuje okolí H_a bodu a takové, že pro všechna $x \in H_a \setminus \{a\}$ leží všechny body $(x, f(x))$ nad (resp. pod) tečnou funkce f v bodě a,

$$y = f(a) + f'(a)(x - a),$$

nebo na ní, pak f nazveme **konvexní v bodě** a (resp. **konkávní v bodě** a).

Poznámka 6.49: Konvexnost na intervalu nevyžaduje diferencovatelnost, na rozdíl od konvexnosti v bodě, která vychází z pojmu tečny (kterou konstruujeme pomocí derivace). Podobně bychom mohli definovat ryzí konvexnost/konkávnost funkce v bodě. Ale pro naše účely to není nutné. Pro ilustrace bodové konvexity/konkavity uvádíme obrázek č. 6.15.



Obrázek 6.15: Konvexní a konkávní funkce.

Jaký je vztah mezi konvexitou na intervalu a konvexitou v každém bodě intervalu? Na to odpovídá následující věta.

Věta 6.50: Buď f funkce konvexní na intervalu J diferencovatelná v každém bodě J°. Potom je f konvexní v každém bodě intervalu J°.

Důkaz. Buď $x, c \in J^\circ$, $x \neq c$ a $\lambda \in (0, 1)$, potom

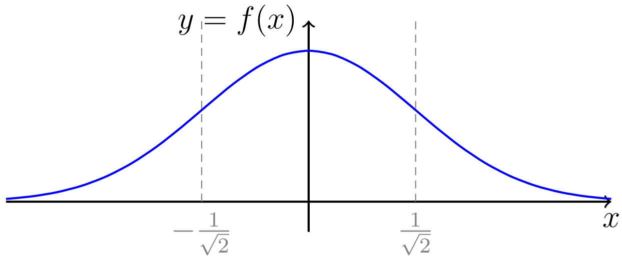
$$f\big(\lambda c + (1-\lambda)x\big) \leq \lambda f(c) + (1-\lambda) f(x).$$

Tuto nerovnost lze přepsat do tvaru

$$(x-c) \cdot \frac{f\big(\lambda c + (1-\lambda)x\big) - f(c)}{\lambda c + (1-\lambda x) - c} = \frac{f\big(\lambda c + (1-\lambda)x\big) - f(c)}{1-\lambda} \leq -f(c) + f(x).$$

Podle věty o limitě složené funkce pro $\lambda \to 1$ ihned dostáváme nerovnost $(x-c)f'(c) \leq -f(c) + f(x)$, čili $f(x) \geq f(c) + f'(c)(x-c)$. Funkční hodnota v bodě x je tedy větší než funkční hodnota ve stejném bodě lineární funkce jejíž graf je tečnou funkce f v bodě c. $\square$

Z předchozí věty ihned plyne následující důsledek.



Obrázek 6.16: Inflexní body.

Důsledek 6.51: Buď f funkce diferencovatelná v každém bodě intervalu J a nechť $f'(c) = 0$ pro jisté $c \in J^{\circ}$.

- Pokud je f konvexní na intervalu J, pak má funkce f v bodě c lokální minimum.
- Pokud je f konkávní na intervalu J, pak má funkce f v bodě c lokální maximum.

Důkaz. Stačí si uvědomit, že tečna v bodě c je dána přímkou $y = f(c)$ a využít definici konvexity/konkavity funkce f v bodě c. □

Poznámka 6.52: Předchozí věta se často používá pokud víme, že f má kladnou (nebo zápornou) druhou derivaci na okolí bodu c. Pokud bychom požadovali ryzí konvexitu/konkavitu, pak dostaneme ostrá lokální minima/maxima.

Body, kde se mění konvexita na konkavitu, případně naopak, jsou důležité pro tvar grafu funkce. Zavádí se pro ně proto zvláštní označení.

Definice 6.53: Nechť f je spojitá v bodě c. Bod c nazýváme **inflexním bodem** funkce f, právě když existuje $\delta > 0$ takové, že f je ryze konvexní na intervalu $(c-\delta, c)$ a ryze konkávní na intervalu $(c, c+\delta)$, nebo naopak.

Příklad 6.54: Nalezněte inflexní body funkce $f(x) = e^{-x^2}$. Je potřeba vypočíst druhou derivaci zadané funkce,

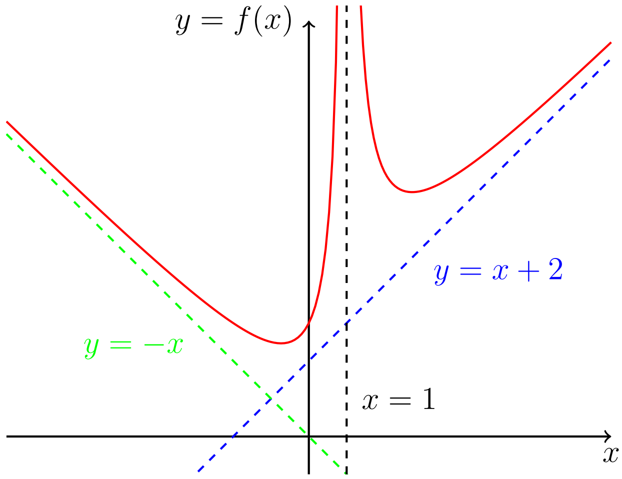
$$\begin{aligned} f'(x) &= -2xe^{-x^2}, \\ f''(x) &= -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2(2x^2-1)e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Vidíme, že znaménko druhé derivace je kladné pro $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ a záporné pro $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Funkce f je proto konvexní na $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ a $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ a konkávní na $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Inflexními body tedy jsou body $\frac{1}{\sqrt{2}}$ a $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Funkce je znázorněna na obrázku č. 6.16.

Konečně, poslední vlastností grafu, kterou bude zkoumat, je existence asymptot. Rozlišujeme dva kvalitativně rozdílné případy zavedené v následující definici.

Definice 6.55: Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ **asymptotu** $x = a$, právě když $\lim_{x\to a+} f(x)$ nebo $\lim_{x\to a-} f(x)$ je rovna $+\infty$ nebo $-\infty$. Řekneme, že přímka $y = kx + q$ je **asymptotou** funkce f v $+\infty$, resp. v $-\infty$, když

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - kx - q\big) = 0 \text{ resp. } \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - kx - q\big) = 0.$$



Obrázek 6.17: Asymptoty funkce.

Poznámka 6.56: Má-li být přímka $y = kx + q$ asymptotou funkce f v $+\infty$, pak nutně $0 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - (kx+q)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} - k$ a proto

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}. \tag{6.3}$$

Podobně

$$q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - kx, \tag{6.4}$$

kde k jsme spočetli v předchozím bodu. Podobnou poznámku můžeme učinit i pro $-\infty$.

Příklad 6.57: Nalezněte asymptoty funkce $f(x) = \frac{x^2+2}{|x-1|} + 1$. Proberme postupně možné body, kde může mít zadaná funkce asymptotu.

Bod $x = 1$ nepatří do D_f a $\lim_{x\to 1_\pm} f(x) = +\infty$. Tudíž přímka $x = 1$ je asymptotou f v bodě 1.

Hledejme asymptotu v $+\infty$,

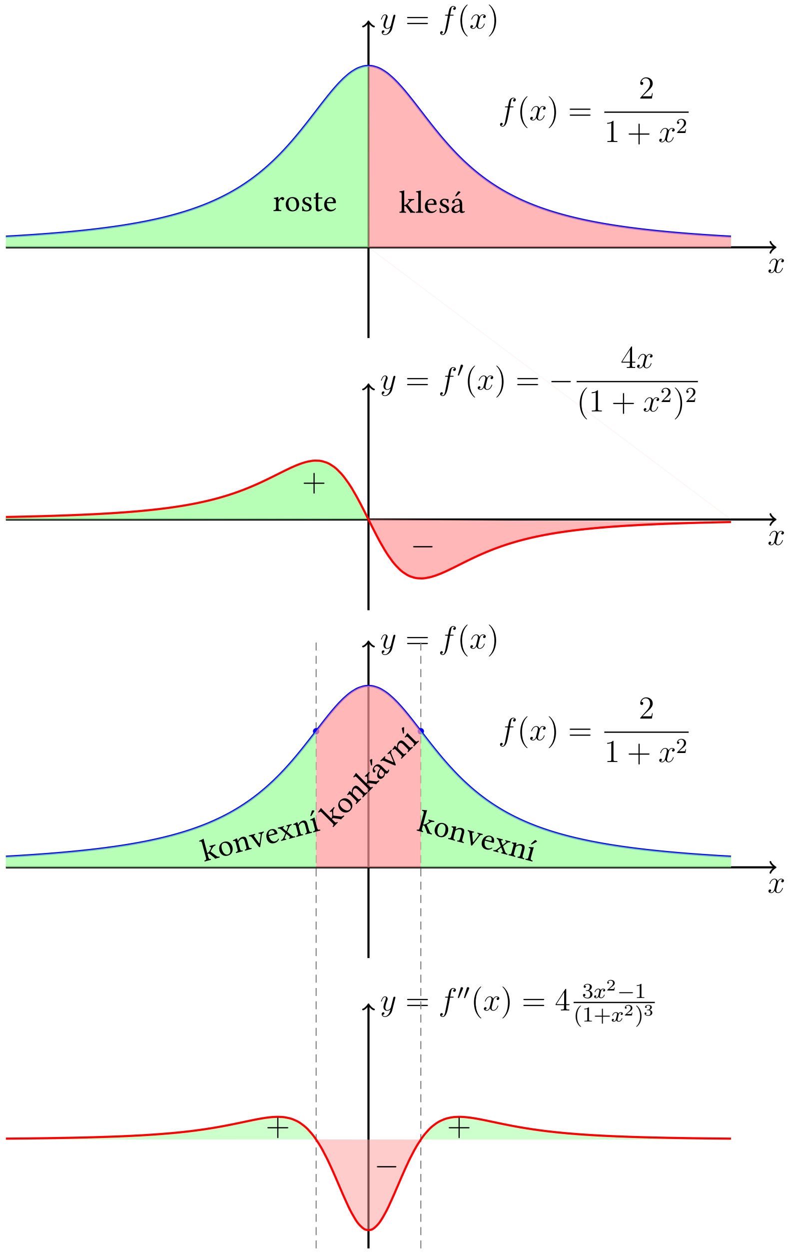
$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2}{x^2-x} + \frac{1}{x} = 1,$$
$$q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2}{x-1} + 1 - 1\cdot x = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+x}{x-1} + 1 = 2.$$

Podobně, pro asymptotu v $-\infty$ máme

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2}{-x^2-x} + \frac{1}{x} = -1,$$
$$q = \lim_{x\to-\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+2}{-x+1} + 1 - (-1)\cdot x = 0.$$

Nalezené asymptoty jsou uvedeny na obrázku č. 6.17.

Shrňme si vztah mezi funkcí a její první a druhou derivací na několika názorných ukázkách, vizte obrázek č. 6.18.



Obrázek 6.18: Vztah první derivace a monotonie funkce, druhé derivace a konvexnosti resp. konkávnosti.

Poznámka 6.58: Na závěr této podkapitoly poznamenejme co máme na mysli pod *vyšetřováním průběhu funkce*. Při vyšetřování průběhu funkce f zkoumáme:

1. definiční obor funkce f, průsečíky grafu s osami, symetrie (sudost, lichost, periodicita),
2. spojitost, body nespojitosti, existenci asymptot, limity v krajních bodech definičního oboru (do této kategorie případně zahrnujeme i $+\infty$ a $-\infty$),
3. existenci derivace f', monotonii funkce, lokální a globální extrémy,
4. existenci druhé derivace f'', konvexnost a konkávnost,
5. na základě těchto výsledků načrtneme graf funkce f.

6.10 l'Hospitalovo pravidlo

K výpočtu limit funkcí vedoucích k neurčitým výrazům se často hodí l'Hospitalovo pravidlo.

Věta 6.59 (l'Hospitalovo pravidlo)**:** Nechť pro funkce f a g a bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$ platí

1. $\lim\limits_a f = \lim\limits_a g = 0$ nebo $\lim\limits_a |g| = +\infty$
2. existuje okolí H_a bodu a splňující $H_a \smallsetminus \{a\} \subset D_{f/g} \cap D_{f'/g'}$,
3. existuje $\lim\limits_a \dfrac{f'}{g'}$.

Potom existuje $\lim\limits_a \dfrac{f}{g}$ a platí $\lim\limits_a \dfrac{f}{g} = \lim\limits_a \dfrac{f'}{g'}$.

Důkaz. Důkaz vynecháváme. □

Příklad 6.60: Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{\sin(x)}.$$

Pomocí l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{\sin(x)} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos(x)} = 1.$$

Použití l'Hospitalovala pravidla je korektní. Jednalo se o limitu typu $\frac{0}{0}$, limita podílů derivací existuje, oba podíly jsou definovány na okolí bodu 0 vyjma bod 0 samotný (podíl derivací dokonce definovaný i v 0).

Příklad 6.61: Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0_+} x\ln(x)$. Nejprve musíme výraz upravit do tvaru kdy lze aplikovat l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to 0_+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0_+} (-x) = 0.$$

Opět poznamenejme, že l'Hospitalovo pravidlo je použito korektně. Po vhodné úpravě se jedná o limitu typu $\frac{\infty}{\infty}$, limita podílu derivací existuje a oba podíly jsou definovány na pravém okolí bodu 0 vyjma bod 0 samotný (např. $(0,1)$).

K tomuto příkladu ještě poznamenejme, že pokud bychom výraz upravili takto,

$$x \ln x = \frac{x}{\frac{1}{\ln x}},$$

tak bychom sice získali limitu typu $\frac{0}{0}$, ale limitu podílu derivací bychom vypočítat nedokázali. Dostali bychom se tedy do slepé uličky.

Příklad 6.62: Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}.$$

Nyní je třeba l'Hospitalovo pravidlo použít dvakrát,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

L'Hospitalovo pravidlo je použito korektně. Jedná se vždy o limitu typu $\frac{\infty}{\infty}$, podíly jsou definovány na okolí bodu $+\infty$ a poslední z limit existuje, tudíž existují i všechny předchozí.

Poznámka 6.63: Upozorněme na častý omyl vyskytující se u příkladů podobných předchozímu. Často se objevuje argument „limita je rovna $+\infty$ protože exponenciála roste rychleji než polynom“. To je sice dobrá intuice, ale není dostatečně přesná. Jak rychleji musí růst čitatel vůči jmenovateli, aby limita byla $+\infty$? Na to intuice vůbec nestačí. Například v limitě

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\sqrt{x}}{x+1}$$

také čitatel roste rychleji než jmenovatel, ale hodnota této limity je 2 a ne nekonečno.

Na předchozí příklad je nutné se dívat právě naopak. Pomocí l'Hospitalova pravidla jsme vypočetli limitu

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty.$$

Protože tato limita vyšla $+\infty$, ***můžeme tvrdit***, že exponenciála e^x roste rychleji než x^2. Všimněte si, že původní intuitivní úvaha jde přesně opačným směrem.

Příklad 6.64: Při použití l'Hospitalova pravidla je nutné zkontrolovat předpoklady. Slepým použitím formule můžeme dostat špatný výsledek:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+\sin(x)}{x+\sin(x)} \overset{1}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2+\cos(x)}{1+\cos(x)} \overset{2}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{-\sin(x)}{-\sin(x)} = 1.$$

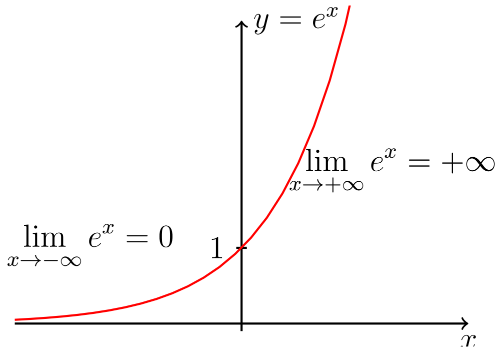
Chyba v tomto výpočtu je dvojnásobná:

1. Není splněn 2. ani 3. předpoklad l'Hospitalova pravidla.

2. Limita nalevo od $\overset{2}{=}$ vůbec neexistuje. Nemá tedy smysl pokračovat ve výpočtu.

Limitu lze snadno spočíst bez l'Hospitalova pravidla,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+\sin(x)}{x+\sin(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{\sin(x)}{x}}{1+\frac{\sin(x)}{x}} = 2.$$



Obrázek 6.19: Graf funkce e^x.

Příklad 6.65: V následujícím případě sice všechny předpoklady platí, ale ani opakované použití l'Hospitalova pravidla nevede k cíli

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Po druhém použití dostaneme stejný výraz s kterým jsme začínali. Tuto limitu můžeme snadno spočítat bez použití l'Hospitalova pravidla,

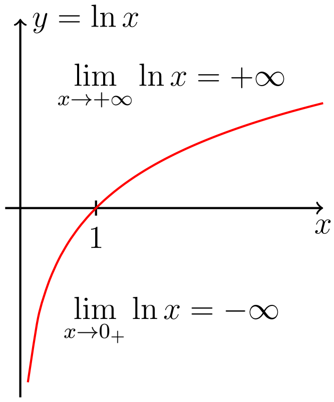
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = 1.$$

6.11 Příklady

Nejprve si ukážeme vyšetřování průběhu na velmi jednoduchých příkladech.

Příklad 6.66: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = e^x$. Protože $f'(x) = f''(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ je funkce $f(x)$ rostoucí a konvexní na celém $\mathbb{R}$. Asymptota funkce existuje pouze v $-\infty$ a její přímkou je $y = 0$. Graf této známé funkce uvádíme na obrázku 6.19.

Příklad 6.67: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \ln x$. Nyní $D_f = (0, +\infty)$ a $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ a $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ pro každé $x > 0$. Tudíž f je rostoucí a konkávní, jedinou asymptotou je přímka $x = 0$. Graf této známé funkce uvádíme na obrázku 6.20.



Obrázek 6.20: Grafu funkce $\ln x$.

Příklad 6.68: Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}.$$

Odmocnina je lichá, tedy $D_f = \mathbb{R}$. Průsečík s osou y je $f(0) = 0$. Průsečíky s osou x jsou řešením rovnice

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(3 - x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \text{ a } x_2 = 3.$$

Odtud ihned plyne, že funkce nemůže být sudá, lichá ani periodická (ve všech těchto případech by muselo být průsečíkem i $x = -3$).

Funkce je spojitá na celém $\mathbb{R}$. Zkoumejme existenci asymptot v $\pm\infty$,

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{3}{x} - 1} = -1,$$
$$q = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - kx\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{3x^2 - x^3} + x = 1.$$

Přímka $y = -x + 1$ je tedy asymptotou v $+\infty$ i $-\infty$.

Pro derivaci funkce f platí

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x-x^2}{(3x^2-x^3)^{2/3}}, & x \neq 0, 3, \\ -\infty, & x = 3, \\ \text{neexistuje}, & x = 0. \end{cases}$$

Nulovým bodem derivace je 2. Kandidáty na lokální extrém jsou tudíž body 0 (derivace neexistuje) a 2 (derivace je 0). Z první derivace podle znaménka určíme typ monotonie.

interval	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
znaménko f'	$-$	$+$	$-$	$-$
monotonie f	klesá	roste	klesá	klesá

Spojitost funkce na celém $\mathbb{R}$ implikuje lokální minimum v bodě 0 ($f(0) = 0$) a maximum v bodě 2 ($f(2) = \sqrt[3]{4}$). Navíc ze spojitosti na $\mathbb{R}$ a z limit $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$ plyne $H_f = \mathbb{R}$.

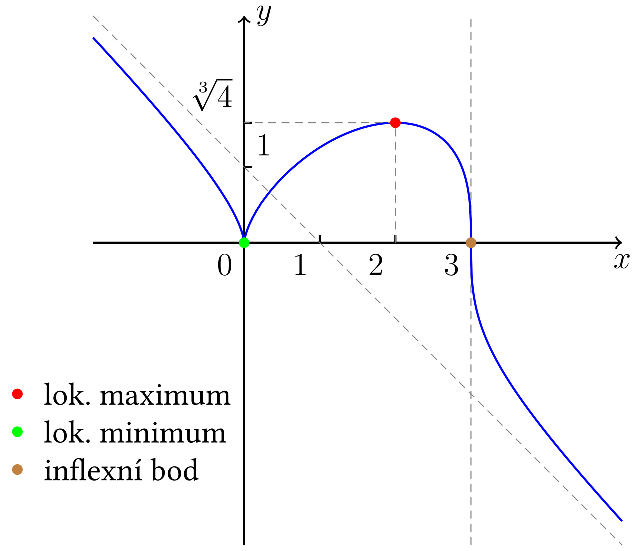
Pro druhou derivaci v bodech $x \neq 0, 3$ dostáváme

$$f''(x) = \frac{2x^{-4/3}}{(x-3)^{5/3}}.$$

Znaménko závisí pouze na znaménku jmenovatele (čitatel je kladný),

interval	$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, +\infty)$
znaménko f''	$-$	$-$	$+$
	konkávní	konkávní	konvexní

Nyní můžeme načrtnout graf funkce f, vizte obrázek 6.21.



Obrázek 6.21: Průběh funkce $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$.

Příklad 6.69: Tuhost T trámu s obdélníkovým průřezem je úměrná součinu jeho šířky (horizontální rozměr) w a třetí mocnině tloušťky (vertikální rozměr) t. Při jakých rozměrech lze dosáhnout největší tuhosti trámu, máme-li k dispozici strom o kruhovém průřezu s poloměrem R?

Parametrizujme trám pomocí parametru x podle obrázku 6.22. Tedy $w = 2x$ a $t = 2\sqrt{R^2 - x^2}$. Uvažujeme $2x = w \in \langle 0,\, 2R \rangle$, resp. $x \in \langle 0, R \rangle$.

Tudíž,

$$T(x) = c \cdot w \cdot t^3 = 2^4 \cdot c \cdot x \left(R^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Hledáme extrém této funkce, derivací je

$$T'(x) = 2^4 \cdot c \cdot \left(\left(R^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}} - 3x^2 \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \right) = 2^4 \cdot c \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \left(R^2 - 4x^2\right).$$

Nulovým bode derivace je bod $x_* = \frac{R}{2}$. Funkci T vyšetřujeme pouze na intervalu J. Vidíme, že na intervalu $\left(0,\, \frac{R}{2}\right)$ funkce T roste a na intervalu $\left(\frac{R}{2}\,, R\right)$ klesá. V bodě x_* tudíž nastává lokální maximum. Pro extremální rozměry trámu platí

$$w_* = 2x_* = R \quad \text{a} \quad t_* = 2\sqrt{R^2 - x_*^2} = \sqrt{3}R.$$

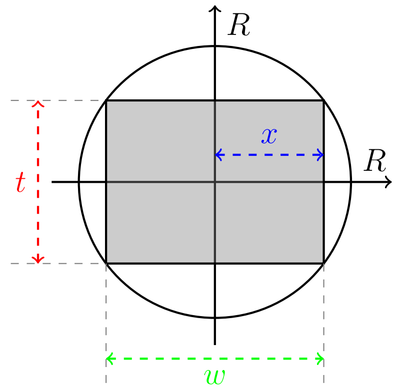
Příklad 6.70: Vyšetřete průběh funkce (včetně konvexnosti/konkávnosti) funkce

$$f(x) = \frac{1}{x} + x^2.$$

Načrtněte graf této funkce.

Definičním oborem je očividně množina $D_f = \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$. f je spojitá v každém bodě množiny D_f. Vypočtěme derivaci,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2x = \frac{2x^3 - 1}{x^2}.$$



Obrázek 6.22: Parametrizace problému s trámem.

Znaménko derivace je, vzhledem ke kladnosti jmenovatele, kontrolováno výrazem $2x^3 - 1$. Dostáváme

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff x > 2^{-1/3}, \\ f'(x) < 0 &\iff x < 2^{-1/3} \text{ a } x \neq 0, \\ f'(x) = 0 &\iff x = 2^{-1/3}. \end{aligned}$$

Funkce f je rostoucí na intervalu $(2^{-1/3}, +\infty)$ a klesající na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, 2^{-1/3})$. V bodě $a = 2^{-1/3}$ má tedy funkce f lokální minimum (na pravém okolí bodu a je rostoucí, na levém okolí bodu a je klesající a je spojitá v bodě a). Podívejme se na limity v nekonečnech a v bodě 0,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} + x^2 = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0\pm} \frac{1}{x} + x^2 = \pm\infty.$$

Funkce f není spojitě dodefinovatelná v bodě 0. Přímka s rovnicí $x = 0$ je asymptotou funkce f v bodě 0. Asymptoty v nekonečnech neexistují,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} + x = \pm\infty.$$

Vyšetřeme konvexitu a konkavitu. Pro druhou derivaci platí

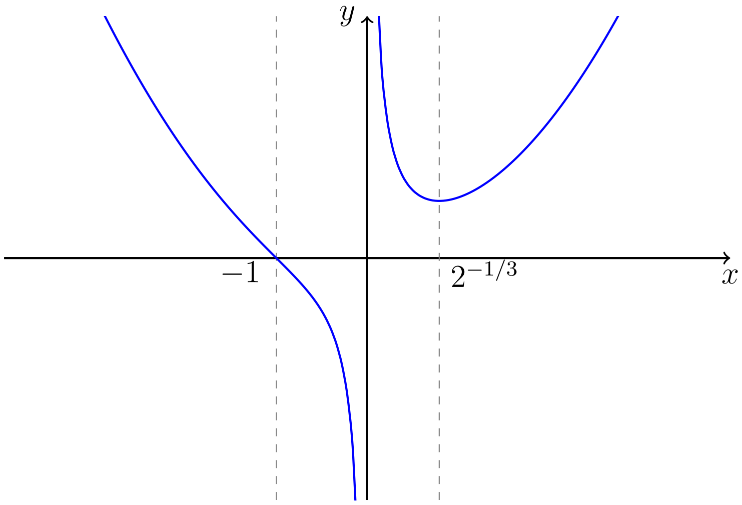
$$f''(x) = \frac{6x^2 \cdot x^2 - (2x^3 - 1) \cdot 2x}{x^4} = 2\frac{x^3 + 1}{x^3}.$$

Odtud vidíme, že

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\iff x < -1 \text{ nebo } 0 < x, \\ f''(x) < 0 &\iff -1 < x < 0, \\ f''(x) = 0 &\iff x = -1. \end{aligned}$$

Funkce f je proto konvexní na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(0, +\infty)$, konkávní na intervalu $(-1, 0)$. V bodě $x = -1$ má inflexní bod.

Na základě těchto informací nyní můžeme nakreslit graf (viz obrázek 6.23).



Obrázek 6.23: Newtonův trojzubec

6.12 Separace kořenů

Pokud máme pro funkci f spojitou na intervalu J řešit rovnici

$$f(x) = 0,$$

pak máme k dispozici metodu půlení intervalu. Abychom ji ale mohli použít, musíme nalézt intervaly $\langle a, b\rangle \subset J$ tak, že $f(a) \cdot f(b) < 0$. Metoda půlení intervalu pak vždy dá aspoň jeden kořen, v intervalu $\langle a, b\rangle$ jich však může být více. Je proto vhodné kořeny **separovat**, čili vždy nalézt interval $\langle a, b\rangle$ tak, že v něm leží právě jeden kořen.

Příklad 6.71: Určete počet reálných kořenů polynomu $f(x) = x^5 - 5x + 2$ a separujte je.
Řešíme tedy rovnici

$$f(x) = x^5 - 5x + 2 = 0.$$

Definičním oborem funkce f je celé $\mathbb{R}$, funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$. Limity v krajních bodech jsou

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} x^5\left(1 - \frac{5}{x^4} + \frac{2}{x^5}\right) = \\ &= \lim_{x\to-\infty} x^5 \cdot \lim_{x\to-\infty}\left(1 - \frac{5}{x^4} + \frac{2}{x^5}\right) = -\infty \cdot 1 = -\infty. \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \text{(analogicky)} = +\infty.\end{aligned}$$

První derivací funkce f je

$$f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^4 - 1) = 5(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 5(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1).$$

Shrnujeme, že

- pro $x \in (-\infty, -1)$ je $f'(x) > 0$, tudíž na tomto intervalu f *ostře roste*,
- pro $x \in (-1, 1)$ je $f'(x) < 0$ a f je spojitá na $\langle -1, 1\rangle$, tudíž je na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ funkce f *ostře klesající*,

- pro $x \in (1, +\infty)$ je $f'(x) > 0$, tudíž f na tomto intervalu *ostře roste.*

Proto

- v bodě -1 je lokální maximum s hodnotou $f(-1) = 6$,
- v bodě 1 je lokální minimum s hodnotou $f(1) = -2$.

Jelikož $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ uzavíráme, že v každém z intervalů

$$(-\infty, -1\rangle, \quad \langle -1, 1\rangle, \quad \langle 1, +\infty)$$

leží *právě jeden kořen.* Rovnice má právě 3 kořeny. Protože navíc $f(-2) < 0$ a $f(2) > 0$, lze pro metodu půlení intervalu použít intervaly

$$\langle -2, -1\rangle, \quad \langle -1, 1\rangle, \quad \langle 1, 2\rangle.$$

6.13 Newtonova metoda

K numerickému řešení rovnic typu $f(x) = 0$ existuje mnoho metod. My zatím známe jen metodu půlení intervalu (viz větu č. 5.41). V této kapitole si ukážeme Newtonovu metodu (Sir Isaac Newton anglický fyzik a matematik, 1642 – 1727). Newtonův přístup podrobně prozkoumáme na následujícím příkladu.

Příklad 6.72: Vypočtěte třetí odmocninu z kladného reálného čísla c.

Zamyslete se, jak tento problém vyřešit, máme-li k dispozici kalkulátor umožňující pouze sčítat, odčítat, násobit a dělit čísla. Tedy operace, které může provádět stroj i člověk (s pomocí papíru). Tato otázka může vyvstat v praxi: máme-li zjistit jak velký má být poloměr kulového tankeru o daném objemu V, dostáváme $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}V}$. Pro krychli dostaneme délku hrany rovnou $a = \sqrt[3]{V}$. Vedle toho třetí odmocnina je jistě sama o sobě zajímavá funkce, jejíž funkční hodnotu je občas potřeba umět vyhodnotit.

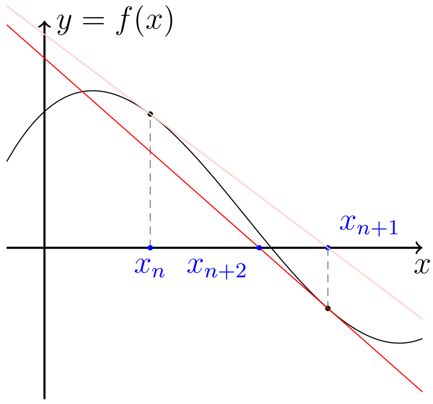
Buď $c > 0$. Označme hledanou třetí odmocninu symbolem x, tj. $x = \sqrt[3]{c}$ (toto je ale jen symbolický zápis, jakou hodnotu x pro zadané c má?). Ekvivalentně to znamená řešit rovnici $x^3 = c$ s neznámou c. Označíme-li $f(x) := x^3 - c$, je námi hledané číslo x *řešením rovnice*

$$f(x) = 0.$$

Tuto úlohu bychom se mohli pokusit řešit nám již známou metodou půlení intervalu (jaké dva počáteční body byste zvolili?). Nyní si však ukážeme další způsob, tzv. Newtonovu metodu.

Myšlenka Newtonovy metody spočívá v konstrukci posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ aproximující řešení rovnice $f(x) = 0$. Konstrukce posloupnosti je následující:

1. Je dáno x_n.
2. Sestroj tečnu funkce f v bodě x_n: $y = f(x_n) + f'(x_n) \cdot (x - x_n)$.
3. Průsečík této tečny s osou x nechť je další člen posloupnosti, tj. $x_{n+1} := x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
4. Opakuj s x_{n+1} místo x_n.



Obrázek 6.24: Dvě iterace Newtonovy metody.

Graficky je tento proces znázorněn na obrázku 6.24.

Z předchozího obrázku se může zdát, že vše je jasné. Ihned se však nabízí následující otázky:

- Jak zvolit první člen posloupnosti? Závisí výsledek metody na této volbě?
- Má rovnice $f(x) = 0$ vůbec řešení?
- Konverguje takto zkonstruovaná posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$?
- Co když $f'(x_n) = 0$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$?

Odpovědí na tyto otázky se v obecném případě nebudeme zabývat. Vraťme se k našemu konkrétnímu případu s třetí odmocninou, kde uvidíme jak na některé z nich odpovědět.

Shrňme si dosavadní výsledky. Je dáno $c > 0$ a funkce $f(x) = x^3 - c$. Newtonova metoda nám dává rekurentní vztah

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - c}{3x_n^2} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}.$$

V našem případě si lze snadno všimnout, že:

- Funkce f je prostá, $f\big((0, +\infty)\big) = (-c, +\infty)$ a tudíž *existuje právě jedno* kladné řešení rovnice $f(x) = 0$. (Tj. vyšetřili jsme průběh funkce f a zjistili jsme, že rovnice má právě jedno řešení.)
- Konverguje-li posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ke konečné kladné limitě a, tedy platí $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ a současně $a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}\right) = \frac{2}{3}a + \frac{c}{3a^2}$. Tudíž a je hledané řešení, $a^3 = c$, nebo-li $f(a) = 0$.

Nyní si tedy zbývá rozmyslet, jestli naše posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ skutečně konverguje.

Věta 6.73: Buď $c > 0$ a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost kladných reálných čísel splňující rekurentní vztah

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}, \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Potom tato posloupnost konverguje ke konečné kladné limitě.

Důkaz. Položme $g(x) := \frac{2}{3}x + \frac{c}{3x^2}$ pro $x > 0$. Vyšetřením průběhu zjistíme, že $g(x) \geq \sqrt[3]{c}$, kde rovnost nastává právě tehdy, když $x = \sqrt[3]{c}$. Tudíž:

- Pokud $x_1 = \sqrt[3]{c}$, potom $x_n = \sqrt[3]{c}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.
- Pokud $x_1 > \sqrt[3]{c}$, potom $x_n > \sqrt[3]{c}$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Navíc posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je klesající: $x_{n+1} - x_n = \frac{c - x_n^3}{3x_n^2} < 0$, a zdola omezená číslem $\sqrt[3]{c}$. Tudíž je konvergentní s konečnou limitou.
- Pokud $0 < x_1 < \sqrt[3]{c}$, pak $x_2 > \sqrt[3]{c}$ a můžeme použít předchozí bod.

□

Nyní víme, že posloupnost konverguje nezávisle na volbě první aproximace. To je dobré, ale k praktickému použití nedostatečné. Kdy máme iteraci zastavit? Je potřeba odhadnout chybu mezi členy posloupnosti a skutečnou (*neznámou*) hodnotou hledané třetí odmocniny.

Důsledek 6.74 (Odhad chyby)**:** Buď $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost popsaná v předešlé větě. Potom platí

$$0 \leq x_{n+1} - \sqrt[3]{c} \leq 2(x_n - x_{n+1}), \quad \text{pro } n = 2, 3 \ldots .$$

Důkaz. Z předešlé věty víme, že pro $n = 2, 3, \ldots$ jistě platí $\sqrt[3]{c} \leq x_{n+1} \leq x_n$. Potom pro tato n platí i

$$0 \leq x_{n+1} - \sqrt[3]{c} = -2x_{n+1} + 3x_{n+1} - \sqrt[3]{c} = -2x_{n+1} + 2x_n + \underbrace{\frac{c}{x_n^2} - \sqrt[3]{c}}_{\leq 0} \leq 2(x_n - x_{n+1}).$$

□

Poznámka 6.75: Toto je pro praktické účely *velmi* důležitý výsledek. Pomocí dvou naposledy vypočtených členů posloupnosti můžeme odhadnout chybu mezi posledním členem a skutečnou hodnotou $\sqrt[3]{c}$ (tu neznáme!) a tím *dodržet požadovanou přesnost.*

Shrňme si vlastnosti Newtonovy metody aplikované na problém hledání třetí odmocniny. Posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zadaná rekurentně vztahem

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{c}{3x_n^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

konverguje pro libovolně zvolené $x_1 > 0$ k číslu $\sqrt[3]{c}$. Chybu mezi x_n a skutečnou hodnotou $\sqrt[3]{c}$ lze odhadnout pomocí posledních dvou vypočtených členů:

$$0 < x_{n+1} - \sqrt[3]{c} < 2(x_n - x_{n+1}), \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Tato informace nám umožňuje výpočet zastavit po dosažení požadované přesnosti.

Jako ukázku použití metody uvádíme tabulku 6.6 s výpočtem třetí odmocniny z čísla 7. Jako první iteraci volíme číslo 7 samotné. To není optimální volba.

Na výpočtu v tabulce 6.6 lze pozorovat, že od 6. iterace se počet správných cifer přibližně zdvojnásobuje. Tento efekt nazýváme **kvadratickou konvergencí** a přesně ho pro naši posloupnost formulujeme níže.

Věta 6.76: Je-li $c > 1$ a $x_1 > \sqrt[3]{c}$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$x_{n+1} - \sqrt[3]{c} \leq \left(x_n - \sqrt[3]{c}\right)^2.$$

Důkaz. Vynecháváme. □

Je-li tedy chyba n-tého členu například 10^{-5}, pak chyba dalšího členu je již pouze 10^{-10}!

Člen posloupnosti	Hodnota
x_1	7,0
x_2	4,714285714285714285714285714285714429
x_3	3,247846429664611482793300975119156994
x_4	2,386431304900375939356688957580011112
x_5	2,000666416795918176357774580392267767
x_6	1,916722395612086993699326262678646600
x_7	1,912938676720493702886648330496511171
x_8	1,912931182801746647022804241458421154
x_9	1,912931182772389101199567386596418893
x_{10}	1,912931182772389101199116839548760030
$\sqrt[3]{7}$	1,912931182772389101199116839548760028

Tabulka 6.6: Výpočet třetí odmocniny ze sedmi pomocí Newtonovy metody. Poslední řádek obsahuje přesnou hodnotu zaokrouhlenou na 36 desetinných míst.

Newtonova metoda: záludnosti

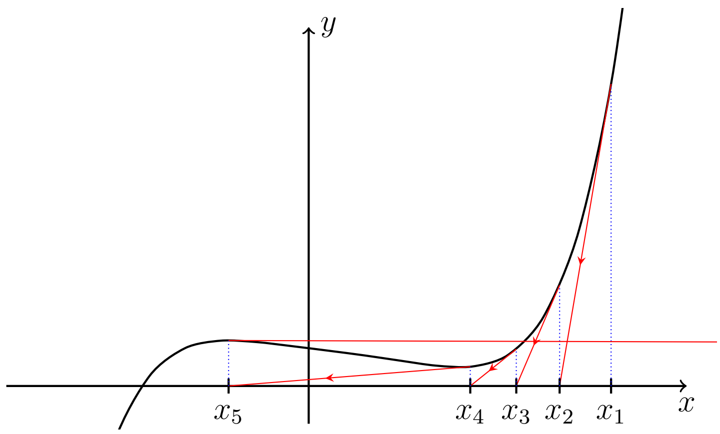
Rekurentní posloupnost pocházející z Newtonovy metody se pro „špatně“ zvolenou počáteční podmínku může chovat neočekávaně. Například může oscilovat (tj. posloupnost vůbec nebude mít limitu), nebo může divergovat do nekonečna.

Příklad 6.77: Zkoumejte chování Newtonovy metody aplikované na $p(x) = x^5 - x^4 - x + 2$ s počátečním bodem $x_1 = 2$.

Rekurentní vzorec Newtonovy metody v tomto případě zní

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 - x_n^4 - x_n + 2}{5x_n^4 - 4x_n^3 - 1}.$$

Na obrázku uvádíme prvních několik členů této rekurentní posloupnosti



Obrázek 6.25: Patologické chování posloupnosti aproximací generovaných Newtonovou metodou. Problém zřejmě spočívá ve špatné volbě počáteční aproximace.

7 Taylorovy polynomy

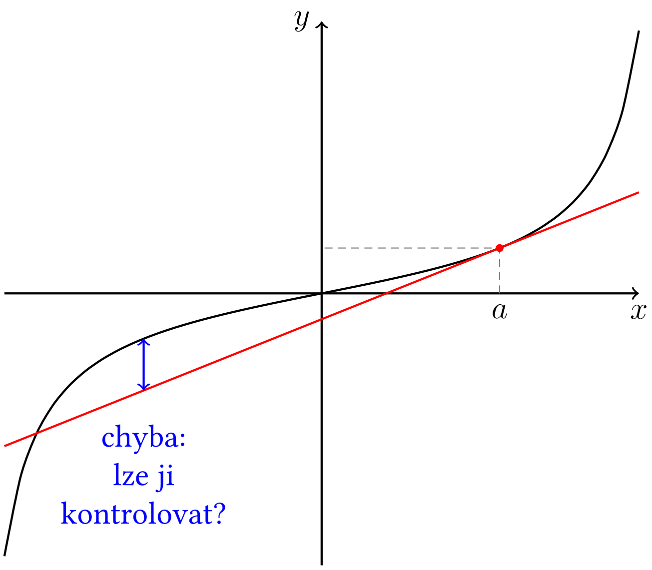
7.1 Aproximace funkcí pomocí polynomů

Tečna funkce f v bodě a představuje tzv. lineární aproximaci funkce f v bodě a. V blízkosti bodu a dobře vystihuje chování funkce f. Ilustrativní graf funkce a její tečny je uveden na obrázku 7.1.

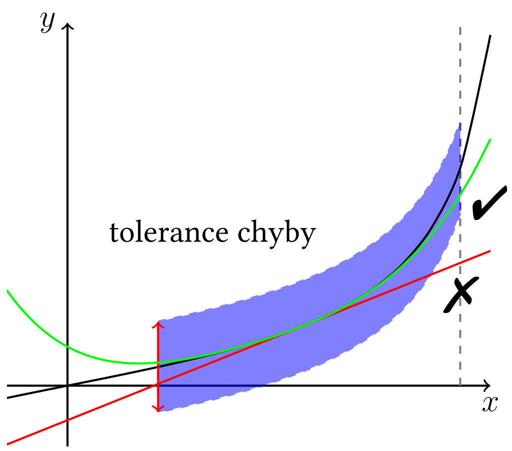
Pokud chceme funkce aproximovat i na větších intervalech, zřejmě nevystačíme pouze s přímkami, viz obrázek 7.2. Nabízí se uvažovat místo polynomů prvního stupně (přímky) polynomy vyšších stupňů (kvadratické, kubické, atd.). V této kapitole se budeme zabývat problémem, jak tyto aproximační polynomy zkonstruovat. S pomocí derivací vyšších stupňů se naučíme sestrojit tzv. Taylorovy polynomy, které představují v jistém smyslu nejlepší možnou aproximaci k dané funkci.

Typickým využitím Taylorových polynomů je úloha vypočíst hodnotu dané funkce s předem zadanou přesností pouze pomocí algebraických operací sčítání a násobení (dělení). Tedy například: Jak numericky určit hodnotu $\sin(37°)$?

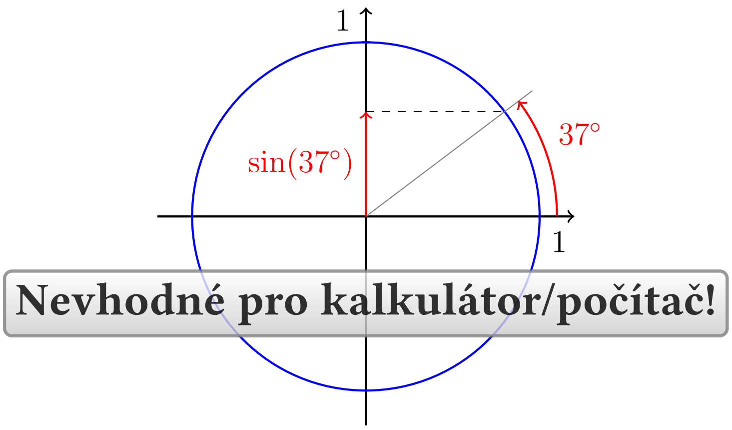
Podle známe geometrické definice funkce sin k odpovědi na tuto otázku potřebujeme použít pravítko, kružítko a úhloměr. Přesnost „výpočtu“ je pak dána přesností našich nástrojů. Viz obrázek 7.3.



Obrázek 7.1: Tečna jakožto lineární aproximace funkce. Lze očekávat, že souhlas je dobrý na malém okolí bodu, kde uvažujeme tečnu. Jak odhadnout chybu mezi funkcí a aproximací?



Obrázek 7.2: Aproximace zadané funkce (černá křivka) pomocí polynomu na zadaném intervalu se zadanou přesností.



Obrázek 7.3: Geometrická definice funkce sin pomocí jednotkové kružnice je nevhodná pro výpočetní aplikace.

7.2 Taylorův polynom

Nejprve si připomeňme pojem polynomu, který bude v celé této kapitole hrát centrální roli.

Definice 7.1 (Polynom)**:** Reálnou funkci reálné proměnné $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazveme **polynomem**, právě když existují nezáporné celé číslo $n \in \mathbb{N}_0$ a reálná čísla $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ taková, že rovnost

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

platí pro všechna reálná $x \in \mathbb{R}$.

Je-li $a_n \neq 0$, nazýváme číslo n **stupněm polynomu** p. Jsou-li všechny koeficienty a_k, $k = 0, \dots, n$ nulové, nazýváme p **nulovým polynomem** a jeho stupeň nedefinujeme.

Podstatnou výhodou polynomů je fakt, že k vyhodnocení funkční hodnoty polynomu stačí operace sčítání (odčítání) a násobení. Navíc polynom stupně n je zadán $n + 1$ konstantami.

Notoricky známými příklady polynomů jsou:

1. **Lineární funkce** $f(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$ parametry) je polynomem nejvýše prvního stupně[34].
2. **Kvadratická funkce** $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ parametry) je polynomem druhého stupně.

Pokusme se nyní podívat na tečnu z jiného úhlu. Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak rovnice její *tečny v bodě* a má tvar

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Je to přímka nejvíce „připomínající" funkci f v okolí bodu a. Tečnu také můžeme chápat jako graf lineární funkce

$$g(x) := f(a) + f'(a)(x - a).$$

Pro funkce f a g platí

$$g(a) = f(a), \quad g'(a) = f'(a).$$

Tj. *funkce* f a její *tečna v bodě* a mají stejnou 0. a 1. derivaci v bodě a.

Přirozeně se nabízí otázka proč neuvažovat polynom vyššího stupně s podobnou vlastností? Nechť funkce f má derivace v bodě a až do řádu $n \in \mathbb{N}$ včetně. Lze nalézt polynom p takový, že $p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ pro všechna $k = 0, 1, \ldots, n$?

Odpověď je *kladná*. Hledejme polynom ve tvaru

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - a)^k.$$

Je potřeba určit konstanty a_k, $k = 0, 1, \ldots, n$ tak, aby derivace polynomu a funkce v bodě a až do řádu n včetně byly shodné. Pro funkční hodnoty derivací polynomu p v bodě a platí

$$\begin{aligned}
f(a) &= p(a) & &\Longrightarrow & a_0 &= f(a)\\
f'(a) &= p'(a) = a_1 & &\Longrightarrow & a_1 &= f'(a)\\
f''(a) &= p''(a) = 2a_2 & &\Longrightarrow & a_2 &= \frac{1}{2} f''(a)\\
f^{(k)}(a) &= p^{(k)}(a) = k! \cdot a_k & &\Longrightarrow & a_k &= \frac{1}{k!} f^{(k)}(a),\ k = 0, 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

Uzavíráme, že hledaný polynom p požadovaných vlastností je tvaru

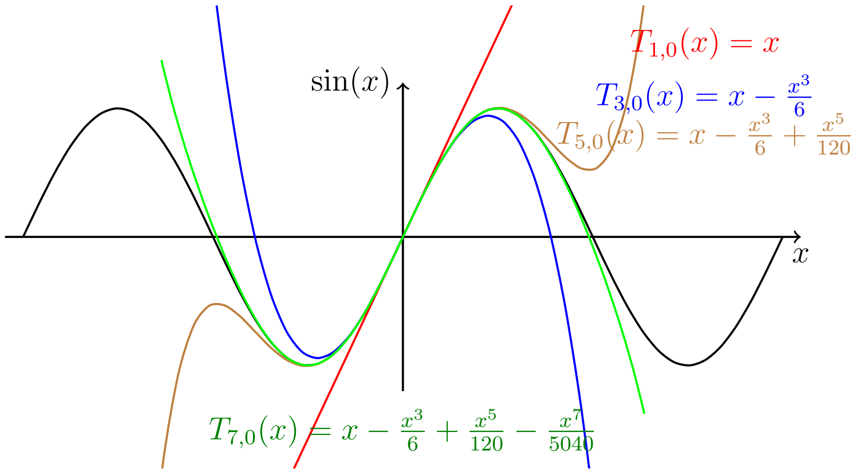
$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

Shrňme si toto pozorování do následující věty.

Věta 7.2: Nechť reálná funkce reálné proměnné f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ konečnou n-tou derivaci. Potom existuje právě jeden polynom $T_{n,a}$ stupně nejvýše n takový, že

$$T_{n,a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \text{ pro každé } k = 0, 1, \ldots, n.$$

[34] Slovíčko „lineární" výše používáme ke zdůraznění, že grafem dané funkce je přímka, lineární objekt. Nejedná se nutně o lineární zobrazení ve smyslu Lineární algebry.



Obrázek 7.4: Příklady Taylorových polynomů funkce sinus v bodě 0 malých stupňů.

Tento polynom má tvar

$$T_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

a nazýváme ho n-**tým Taylorovým polynomem funkce** f **v bodě** a.

Důkaz. Existenci i jednoznačnost jsme dokázali v předchozích odstavcích. □

Příklad 7.3: Nalezněme n-tý Taylorův polynom funkce $f(x) = e^x$ v bodě 0. Pro libovolné $k \in \mathbb{N}_0$ platí $f^{(k)}(x) = e^x$ a proto $f^{(k)}(0) = 1$. Dostáváme

$$T_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k.$$

Příklad 7.4: Nalezněme n-tý Taylorův polynom funkce $f(x) = \sin(x)$ v bodě 0. Derivace funkce f se cyklicky opakují, v závislosti na $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin(x) \quad \text{a} \quad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos(x).$$

Proto

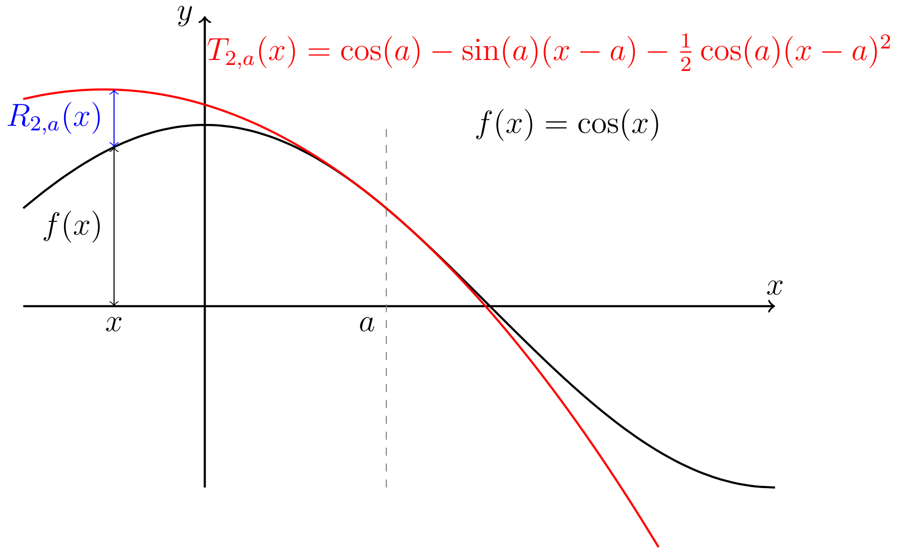
$$f^{(2k)}(0) = 0 \quad \text{a} \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k.$$

Taylorův polynom pro $n = 2\ell$ je stejný jako Taylorův polynom pro $n = 2\ell - 1$ a platí

$$T_{n,0}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!}x^j = \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}.$$

Speciálně tedy platí $T_{2n,0} = T_{2n-1,0}$, $n \in \mathbb{N}$ a ještě speciálněji třeba $T_{40,0} = T_{39,0}$. Ukázka několika Taylorových polynomů funkce sinus v bodě 0 je uvedena na obrázku 7.4.

Poznámka 7.5 (Terminologická)**:** Z předchozího příkladu je pěkně vidět, proč používáme název „n-tý Taylorův polynom“ místo studenty často používaného a nesprávného „Taylorův polynom stupně n“ když mluvíme o T_n: n-tý Taylorův polynom totiž nutně nemusí mít stupeň n! Pro funkci sin jsme v bodě 0 odvodili $T_{2,0}(x) = x$, tedy její druhý Taylorův polynom má stupeň 1.



Obrázek 7.5: Grafické znázornění Taylorova vzorce, tedy vztahu mezi funkční hodnotou funkce f, Taylorova polynomu $T_{n,a}$ a zbytku $R_{n,a}$.

7.3 Chyba aproximace

V této podkapitole se budeme zabývat chybou mezi původní funkcí a Taylorovým polynomem. Kdybychom tuto chybu nebyli schopni alespoň odhadnout, pak by aproximace byla prakticky nepoužitelná. Nebyli bychom schopni zajistit požadovanou přesnost aproximace. Definujme si nejprve jasně chybu (zbytek), který zkoumáme.

Definice 7.6: Nechť funkce f má v bodě a konečnou n-tou derivaci. Pro všechna přípustná x položme $R_{n,a}(x) := f(x) - T_{n,a}(x)$. Potom vztah

$$f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$$

nazýváme **Taylorovým vzorcem** a $R_{n,a}$ nazýváme n**-tým zbytkem** v Taylorově vzorci.

Poznámka 7.7 (Značení)**:** V případě, že mluvíme o Taylorově polynomu v bodě $a = 0$ píšeme pro jednoduchost T_n místo $T_{n,0}$. Podobně v případě zbytku $R_n = R_{n,0}$ a Peanova zbytku (zaveden dále) $\omega_n = \omega_{n,0}$. Taylorův polynom pro $a = 0$ se také někdy nazývá **Maclaurinův polynom**.

První informaci o zbytku v Taylorově vzorci nám dává následující věta. Hrubě řečeno, když $x \to a$, pak zbytek v Taylorově vzorci jde k nule rychleji, než poslední člen n-tého Taylorova polynomu.

Věta 7.8: Nechť funkce f má v jistém okolí H_a bodu a spojitou n-tou derivaci. Pak pro zbytek v Taylorově vzorci platí

$$\lim_{x \to a} \frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a = 0$. Z definice zbytku a vlastností Taylorova polynomu plyne

$$R_n(0) = R_n'(0) = \cdots = R_n^{(n-1)}(0) = R_n^{(n)}(0) = 0.$$

Pro výpočet limity lze použít l'Hospitalovo pravidlo (zdůvodněte proč!). Potom

$$\lim_{x\to 0}\frac{R_n(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{R_n'(x)}{nx^{n-1}}=\cdots=\lim_{x\to 0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{R_n^{(n)}(x)}{n!}=0.$$

Poslední rovnost platí, protože $R_n^{(n)}=f^{(n)}-T_n^{(n)}$ je podle předpokladu spojitá funkce na H_a a $R_n^{(n)}(0)=0$. □

Důsledek 7.9: Za stejných předpokladů jako v předchozí větě. Taylorův vzorec lze vyjádřit ve tvaru

$$f(x)=T_{n,a}(x)+\omega_{n,a}(x)\cdot(x-a)^n,$$

kde $\lim\limits_{x\to 0}\omega_n(x)=0$. Výraz $\omega_{n,a}(x)\cdot(x-a)^n$ se nazývá **Peanův tvar** zbytku.

Důkaz. Stačí položit $\omega_{n,a}(x):=\frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)^n}$ a použít předchozí věty. □

Příklad 7.10: Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}.$$

Protože $\sin x=x+\omega_{1,0}(x)\cdot x$, kde $\lim\limits_{x\to 0}\omega_{1,0}(x)=0$, dostáváme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\big(1+\omega_{1,0}(x)\big)=1+0=1.$$

Hrubě řečeno, n-tý Taylorův polynom je nejlepší aproximace mezi všemi polynomy stupně n. Přesný smysl tohoto výroku je obsažen v následující větě.

Věta 7.11 (O nejlepší aproximaci)**:** Nechť funkce f má v jistém okolí bodu 0 konečnou n-tou derivaci a nechť Q je polynom stupně nejvýše n, různý od Taylorova polynomu T_n funkce f v bodě 0. Potom existuje okolí H_0 bodu 0 takové, že

$$|f(x)-T_n(x)|<|f(x)-Q(x)|\quad\text{pro každé } x\in H_0\smallsetminus\{0\}.$$

Důkaz. Vynecháváme. □

Výraz $|f(x)-Q(x)|$ představuje absolutní velikost chyby pří aproximaci funkce f pomocí polynomu Q v bodě x. Pokud $T_{n-1}\neq T_n$, pak pro jisté okolí H_0 podle předchozí věty platí

$$|f(x)-T_n(x)|<|f(x)-T_{n-1}(x)|\quad\text{pro každé } x\in H_0\smallsetminus\{0\}.$$

Tedy, každý další Taylorův polynom aproximuje funkci f lépe než předchozí (pokud není shodný s předchozím).

Jak ale ukazuje příklad č. 7.23, mohou existovat i „patologické“ situace, kdy aproximace pomocí Taylorových polynomů nedává dobře použitelné výsledky.

Nejdůležitější větou této kapitoly je následující Taylorova věta. Tato věta nám dává způsob jak kontrolovat zbytek v Taylorově vzorci (tj. chybu).

Věta 7.12 (Taylorova)**:** Nechť existuje okolí H_a bodu a takové, že funkce f v něm má konečnou $(n+1)$-ní derivaci. Pak zbytek v Taylorově vzorci $f(x)=T_{n,a}(x)+R_{n,a}(x)$ lze pro každé $x\in H_a$ zapsat ve tvaru

$$R_{n,a}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

kde číslo ξ závisí na x a n a leží uvnitř intervalu s krajními body x a a. Tento tvar zbytku nazýváme **Lagrangeův**.

Důkaz. Vynecháváme. □

Poznámka 7.13: Pro číslo ξ z předchozí věty tedy platí $0 < |\xi - a| < |x - a|$. Interval, o kterém se v předchozí větě mluví nemůžeme zapsat snadno explicitně, protože nevíme, jestli x leží vpravo či vlevo od bodu a. Proto se raději uchylujeme k slovnímu popisu, případně nerovnosti uvedené v této poznámce. Hodnota ξ ***závisí*** na hodnotě x a a.

Tato věta nám dává velmi důležitou informaci o zbytku v Taylorově vzorci. Umožňuje *odhadovat* chybu, které se dopustíme při nahrazení původní funkce f jejím Taylorovým polynomem $T_{n,a}$.

Příklad 7.14: Určete, jaké chyby se dopustíme, když pro výpočet čísla $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$ použijeme hodnotu Taylorova polynomu funkce e^x třetího stupně v bodě 0 vyhodnoceného v bodě $x = \frac{1}{2}$,

$$T_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

Dosazením dostaneme funkční hodnotu Taylorova polynomu v $x = \frac{1}{2}$:

$$T_3\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{79}{48} = 1.6458\bar{3}.$$

Toto číslo nám samo o sobě nic neříká. Je nutné odhadnout chybu.

Podle Taylorovy věty 7.12 platí ($f(x) = e^x$) rovnost

$$\sqrt{e} = T_3\left(\frac{1}{2}\right) + R_3\left(\frac{1}{2}\right),$$

kde zbytek je tvaru

$$R_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^\xi}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4.$$

O čísle ξ pouze víme, že leží v intervalu $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Navíc umíme odhadnout velikost čísla e, platí nerovnost $e < 4$ (zdůvodněte!). Celkem tedy

$$0 < R_3\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{4^{1/2}}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{192} = 0.005208\bar{3}.$$

Číslo $\sqrt{e}$ leží v intervalu $\left(1.6458\bar{3},\ 1.651041\bar{6}\right)$. Viz ilustrační obrázek 7.6. Přibližná hodnota $\sqrt{e}$ s přesností na 8 cifer je $\sqrt{e} \approx 1.6487213$.

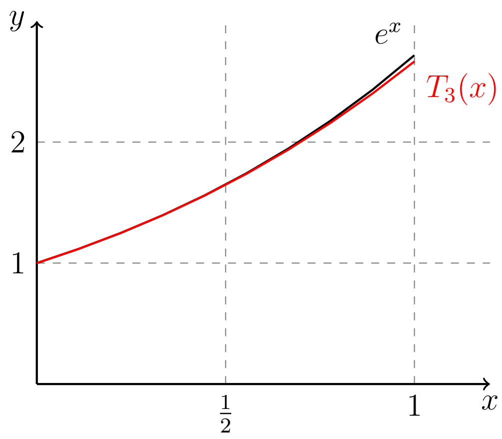
7.4 Mocninné a Taylorovy řady

Již jsme spočetli, že pro každé reálné x a přirozené n platí

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x).$$

Dále v tomto případě známe tvar zbytku R_n, lze ho vyjádřit jako

$$R_n(x) = \frac{e^{\xi_{n,x}}}{(n+1)!}x^{n+1},$$



Obrázek 7.6: Graf exponenciály a 3. Taylorova polynomu exponenciály v bodě 0 použitého k přibližnému výpočtu $e^{\frac{1}{2}}$.

kde $\xi_{n,x}$ leží mezi 0 a x, tudíž $\xi_{n,x} < |x|$. Z monotonie e^x pak plyne odhad

$$0 < e^{\xi_{n,x}} < e^{|x|}.$$

Horní odhad čísla $e^{\xi_{n,x}}$ tedy nezávisí na n (v tomto případě)!

Pro dané pevné $x \in \mathbb{R}$ proto platí

$$0 \leq |R_n(x)| < \frac{e^x}{(n+1)!}|x^n| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Věta o limitě sevřené posloupnosti 3.54 potom pro každé reálné x zaručuje

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Pro libovolné reálné x tedy platí

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + R_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}.$$

Tento fakt pro nás samozřejmě není překvapením, protože exponenciálu jsme takto definovali! Jak za chvíli uvidíme, tuto vlastnost – vyjádřitelnost pomocí součtu číselné řady s parametrem x– mají i další elementární funkce.

Definice 7.15: Nechť je dána posloupnost $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ a číslo $c \in \mathbb{R}$. Číselnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k, \tag{7.1}$$

závisející na reálném parametru x, nazýváme **mocninnou řadou se středem v bodě** c.

Definice 7.16: Nechť reálná funkce reálné proměnné f má v bodě $c \in \mathbb{R}$ konečné derivace všech řádů. Mocninnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

potom nazýváme **Taylorovou řadou funkce f v bodě** c.

Poznámka 7.17: Uvažme pro jednoduchost $c = 0$ a řadu v rovnici (7.1).

- Je-li například $x = 2$, pak máme číselnou řadu $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k 2^k$,
- je-li $x = \frac{1}{3}$, pak máme číselnou řadu $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$.

Tímto způsobem je definována jistá funkce, která každému reálnému x přiřadí součet zadané číselné řady, pokud existuje. Jaký je definiční obor této funkce?

Věta 7.18: Pokud existuje limita

$$L := \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|,$$

potom klademe

$$R := \begin{cases} \frac{1}{L}, & L \in \mathbb{R}, \\ +\infty, & L = 0, \\ 0, & L = +\infty \end{cases}$$

a tvrdíme, že mocninná řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$$

konverguje absolutně pro $x \in (c-R, c+R)$ a diverguje pro $|c-x| > R$.

Důkaz. Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ různé od c dostáváme

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}(x-c)^{k+1}}{a_k (x-c)^k} \right| = \lim_{k\to\infty} |x-c| \cdot \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = |x-c| \cdot L.$$

Shrnujeme, že pokud

- $|x-c| \cdot L < 1$, tedy $|x-c| < R$, pak podle d'Alembertova kritéria zkoumaná řada konverguje absolutně,
- $|x-c| \cdot L > 1$, tedy $|x-c| > R$, pak podle podílového kritéria je $\lim\limits_{k\to\infty} |a_k(x-c)^k| = +\infty$. Tudíž nemůže být splněna nutná podmínka konvergence zkoumané řady (tj. neplatí $\lim\limits_{n\to\infty} a_k (x-c)^k = 0$).

□

Uveďme dále několik základních vlastností týkajících se mocninné řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad \exists L = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|, \quad R = \frac{1}{L}. \tag{7.2}$$

Číslo R nazýváme **poloměrem konvergence** mocninné řady (7.2). Předchozí věta říká, že tato mocninná řada (7.2) konverguje pro $|x| < R$ a diverguje pro $|x| > R$. *Neříká nic* o konvergenci pro $x = R$ a $x = -R$. Každá mocninná řada se chová tímto způsobem. Platí totiž následující

Věta 7.19 (Cauchy-Hadamard)**:** Ke každé mocninné řadě tvaru (7.2) existuje $R \in \langle 0, +\infty\rangle$ takové, že řada absolutně konverguje pro $|x| < R$ a diverguje pro $|x| > R$.

Důkaz. Vynecháváme. □

Poloměr konvergence ale vždy *nemusí* jít spočítat pomocí limity podílů uvedených ve větě 7.18. Tato limita nemusí existovat.

Příklad 7.20: Uvažte mocninnou řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sin(k)\, x^k.$$

Limita

$$\lim_{k\to+\infty} \left|\frac{\sin(k+1)}{\sin(k)}\right|$$

neexistuje, ale podle srovnávacího kritéria mocninná řada jistě konverguje pro $x \in (-1, 1)$. Skutečně,

$$\left|\sin(k)\, x^k\right| \leq |x|^k$$

a $\sum_{k=0}^{\infty} |x|^k$ konverguje pro $|x| < 1$.

Příklad 7.21: Rozeberme všechny tyto poznatky na příkladu funkce $f(x) = \frac{1}{1-x}$ a její Taylorovy řady v bodě 0,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

Platí $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$, $x \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Proto $f^{(k)}(0) = k!$. Zadání je tedy v pořádku, tato řada je skutečně Taylorovou řadou příslušné funkce v bodě 0. Pro poloměr konvergence máme

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{1}{1}\right| = 1 = \frac{1}{R}.$$

Dále pro $x = \pm 1$ jsou řady $\sum_{k=0}^{\infty} (\pm 1)^k$ divergentní. Řada konverguje absolutně pro $x \in (-1, 1)$ a diverguje pro všechna ostatní x. Rovnost

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

platí pro $x \in (-1, 1)$. Řadu v tomto případě umíme přímo sečíst, není potřeba vyšetřovat zbytek v Taylorově vzorci.

Na závěr této podkapitoly uvádíme v tabulce 7.2 Taylorovy řady dalších elementárních funkcí.

7.5 Příklady

Tuto kapitolu uzavřeme několika řešenými příklady.

funkce	Taylorova řada v 0	konvergence pro
e^x	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$	$x \in \mathbb{R}$
$\ln(1+x)$	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$	$x \in (-1, 1\rangle$
$\operatorname{arctg} x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$	$x \in \langle -1, 1\rangle$

Tabulka 7.2: Některé elementární funkce, jejich Taylorovy řady a x pro která tyto řady konvergují.

n	a_n
1	$8.0 \cdot 10^{-2}$
2	$4.7 \cdot 10^{-3}$
3	$1.6 \cdot 10^{-4}$
4	$3.6 \cdot 10^{-6}$
5	$5.7 \cdot 10^{-8}$
6	$6.7 \cdot 10^{-10}$

Tabulka 7.4: K příkladu 7.22 o aproximaci funkce sinus.

Příklad 7.22: Nalezněte vzorec pro výpočet hodnoty funkce sin pro všechna reálná x s přesností 10^{-7}. Díky periodicitě a tvaru[35] funkce $f = \sin$ stačí nalézt vzorec s požadovanou přesností pro x z intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$.

Podle Taylorovy věty pro $(2n+2)$-tý Taylorův polynom se středem v 0 platí

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \underbrace{\frac{f^{(2n+3)}(\xi_{n,x})}{(2n+3)!} x^{2n+3}}_{R_{2n+2}(x)}.$$

Indexy u symbolu $\xi_{n,x}$ nám připomínají, že tento závisí na x a n.

Protože derivace lichého řádu funkce sin je – až na střídající se znaménko – funkce cos, můžeme zbytek pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ odhadnout:

$$\left|R_{2n+2}(x)\right| \leq \frac{1}{(2n+3)!} |x|^{2n+3} < \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+3}}{(2n+3)!} =: a_n.$$

Hodnoty a_n jsou uvedeny v tabulce 7.4. Vidíme, že pro $n = 5$ je a_n poprvé menší než 10^{-7}. Tudíž můžeme uzavřít, že se pro každé $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ hodnota $\sin(x)$ liší od výrazu

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}$$

Příklad 7.23: Z předchozího výkladu by mohl čtenář získat dojem, že k zlepšení přesnosti aproximace funkce f pomocí jejího Taylorova polynomu T_n je vždy dostačující zvolit vhodně velké n. V tomto příkladu si ukážeme příklad funkce, která tuto domněnku vyvrací. Uvažme funkci

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Graf této funkce je uveden na obrázku č. 7.7. Čtenář si samozřejmě průběh této funkce může vyšetřit sám.

Pojďme vypočítat její n-tý Taylorův polynom v bodě $a = 0$. Její derivaci v nule musíme spočítat z definice (pokud bychom zderivovali funkční předpis pro $f(x)$ pro nenulová x, tak dostaneme derivaci jen pro nenulová x), tedy

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{y\to\pm\infty} \frac{y}{e^{y^2}} = \lim_{y\to\pm\infty} \frac{1}{2ye^{y^2}} = 0.$$

Nyní se zamysleme nad tím, jak budou vypadat derivace funkce f vyšších řádů pro nenulová x. Tvrdíme, že pro $x \neq 0$ a $k \in \mathbb{N}$ platí

$$f^{(k)}(x) = \frac{e^{-1/x^2}}{x^{k+2}} P_k(1/x),$$

kde $P_k(z)$ je polynom stupně $2k - 2$. Toto tvrzení můžeme snadno dokázat indukcí. Pro $k = 1$ máme

$$f'(x) = \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}, \quad x \neq 0,$$

tj. $P_k(z) = 1$. Nechť nyní tvrzení platí pro $k \in \mathbb{N}$, proveďme indukční krok

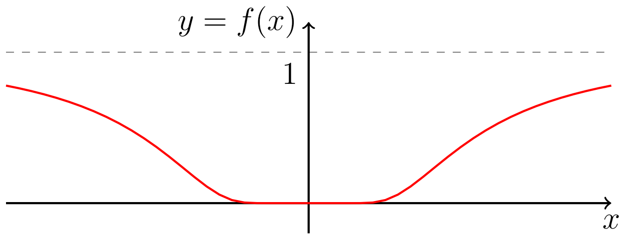
$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}\right)'(x) = \left(\frac{e^{-1/x^2}}{x^{k+2}} P_k(1/x)\right)' = \\ &= e^{-1/x^2} \left(\frac{\frac{2}{x^2} - k - 2}{x^{k+3}} P_k(x) - \frac{1}{x^{k+3}} P_k'(x)\right) = \\ &= \frac{e^{-1/x^2}}{x^{k+3}} \underbrace{\left(\left(\frac{2}{x^2} - k - 2\right) P_k(1/x) - P_k'(1/x)\right)}_{P_{k+1}(1/x)}, \end{aligned}$$

na pravé straně opravdu vidíme, že $P_{k+1}(z)$ je polynom stupně $2 + 2k - 2 = 2k$.

Nyní opět matematickou indukcí dokažme, že $f^{(k)}(0) = 0$ pro přirozené k. Pro $k = 1$ jsme toto tvrzení již ověřili. předpokládejme, že tvrzení platí pro $k \in \mathbb{N}$. Potom analogickým výpočtem jako výše dostáváme

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^{-1/x^2}}{x^{k+2}} P_k(1/x)}{x} = \\ &= \lim_{y\to\pm\infty} \frac{y^{k+3} P_k(y)}{e^{y^2}} = 0. \end{aligned}$$

Pro n-tý Taylorův polynom této funkce proto platí $T_n(x) = 0$. Ať je n jaké chce, tak stále máme nulový polynom. Pro tuto funkci je tedy hodnota $f(x)$ totožná s hodnotou $R_n(x)$ pro libovolné x. Poloměr konvergence příslušné Taylorovy řady je triviálně nekonečný.



Obrázek 7.7: Graf funkce f z příkladu 7.23. Tato funkce u nuly jde velmi rychle k nule.

Taylorovy polynomy nejsou jediným nástrojem použitelným pro výpočet funkčních hodnot elementárních funkcí. Tuto kapitolu zakončíme dvěmi krátkými poznámkami tímto směrem.

Poznámka 7.24 (CORDIC)**:** Kapesní kalkulátory většinou přímo nepoužívají mocninné rozvoje pro výpočet hodnot trigonometrických funkcí (sin, cos, tan, atd.). Často využívají algoritmus CORDIC. Ten k výpočtu například funkčních hodnot funkce sin rafinovaně využívá

1. součtové vzorce pro trigonometrické funkce,
2. vzorky, tj. v programu uložené hodnoty funkce sin *předem napočtené* (například pomocí Taylorova polynomu) pro jistou množinu úhlů.

První implementace tohoto algoritmu pochází z roku 1959 a byla využita v navigačním počítači bombardéru B-58.

Poznámka 7.25 (Padého aproximace)**:** Padého aproximace funkcí místo polynomů využívá racionální lomené funkce, tj. podíl dvou polynomů. Takváto funkce je stále elementární v tom smyslu, že její funkční hodnoty lze počítat opět pouze pomocí algebraických operací sčítání, násobení a dělení čísel. Je-li f zadaná funkce tak se Padého metoda snaží najít polynomy $P(x)$ a $Q(x)$ takové, aby rovnost

$$f(x) \approx \frac{P(x)}{Q(x)}$$

přibližně platila na okolí zadaného bodu.

8 Primitivní funkce

V této kapitole se od diferenciálního počtu přesuneme k další části látky, integrálnímu počtu. Jak dále uvidíme, „integrace“ je v jistém smyslu inverzní procedurou k „derivaci“. Na začátku kapitoly o derivování (podkapitola 6.1) jsme uváděli jednoduchou fyzikálně motivovanou ukázku: známe-li závislost polohy na čase jsme pomocí *derivování* schopni odvodit okamžitou rychlost tělesa v daném čase. *Integrace* nám naopak umožní ze známé závislosti okamžité rychlosti na čase (z počáteční polohy) získat závislost polohy tělesa na čase.

Vedle toho lze integraci také motivovat geometricky jakožto nástroj na výpočet obsahu plochy ohraničené grafem funkce a osou x. Podrobněji se k této úloze dostaneme v kapitole 9.

8.1 Neurčitý integrál

Nejprve zavedeme pojem primitivní funkce.

Definice 8.1: Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b), kde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Funkci F splňující podmínku

$$F'(x) = f(x) \text{ pro každé } x \in (a, b)$$

nazýváme **primitivní funkcí** k funkci f na intervalu (a, b).

Ihned z definice plyne, že takováto funkce F je diferencovatelná v každém bodě intervalu (a, b) a tedy je i spojitá na (a, b). K nahlédnutí tohoto faktu si stačí vzpomenout na větu 6.12.

Příklad 8.2: Funkce $F(x) = x^3$ je primitivní funkcí k funkci $f(x) = 3x^2$ na libovolném intervalu (a, b).

Kolik primitivních funkcí k zadané funkci f může existovat? Jak se od sebe případně liší? Na tyto otázky odpovídá následující tvrzení.

Věta 8.3: Nechť F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b). Pak G je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b) právě tehdy, když existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$ taková, že

$$G(x) = F(x) + C, \quad \text{pro každé } x \in (a, b).$$

Důkaz. Pokud jsou funkce F a G primitivní k f na intervalu (a, b), potom

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \text{pro všechna } x \in (a, b).$$

Funkce $F - G$ je proto podle věty 6.43 konstantní na intervalu (a, b).

Naopak, je-li $G(x) = F(x) + C$, pro libovolné $x \in (a, b)$, pak $G'(x) = F'(x)$. □

Vzhledem k předchozí větě je přirozené zavést značení pro *množinu* všech primitivních funkcí k zadané funkci f.

Definice 8.4: Nechť k funkci f existuje primitivní funkce na intervalu (a,b). Množinu všech primitivních funkcí k funkci f na (a,b) nazýváme **neurčitým integrálem** a značíme jej $\int f$ nebo $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Poznámka 8.5 (Terminologie)**:** Najdeme-li k f primitivní funkci F na intervalu (a,b), zapisujeme tento fakt obvykle

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Funkci f nazýváme **integrovanou funkcí**, x **integrační proměnnou** a c **integrační konstantou**. Úkolu určit

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

říkáme „najít primitivní funkci k f“, nebo „vypočítat integrál z f“, nebo „integrovat f“.

Důvod pro tuto notaci bude odhalen v následujících kapitolách. Zde alespoň poznamenejme, že symbol $\int$ je stylizované *S*.

Poznámka 8.6 (Mathematica)**:** K hledání primitivní funkce pomocí Mathematica lze použít příkaz Integrate[f, x], kde f je integrovaná funkce (výraz) a x je integrační proměnná.

Slibovaný inverzní vztah mezi derivací a neurčitým integrálem (primitivní funkcí) můžeme vyjádřit následovně. Je-li funkce g diferencovatelná na intervalu (a,b), pak přímo z definice č. 8.1 plyne

$$\int g'(x)\,\mathrm{d}x = g(x) + C, \quad x \in (a,b).$$

Má-li funkce f primitivní funkci na intervalu (a,b), potom opět přímo z definice č. 8.1 plyne

$$\left(\int f\right)'(x) = f(x), \quad x \in (a,b). \tag{8.1}$$

Tuto rovnici chápeme tak, že ať z $\int f$ vybereme libovolnou funkci a dosadíme ji do závorky na levé straně, tak po zderivování dostaneme $f(x)$.

Poznámka 8.7: V předchozím příkladě 8.2 jsme viděli, že pokud v integrandu „odhalíme“ derivaci jisté funkce, tak je výpočet neurčitého integrálu triviální. Občas lze s úspěchem využít následujícího analogického postřehu: je-li φ kladná funkce se spojitou derivací na jistém otevřeném intervalu J, pak

$$\big(\ln\varphi(x)\big)' = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \quad x \in J$$

a proto přímo dle definice neurčitého integrálu platí vztah

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\varphi(x) + C.$$

Touto cestou se můžeme vydat, pokud v integrandu uvidíme (případně jsme ho schopni na tento tvar převést) podíl, kde čitatel je derivací jmenovatele. Například tedy platí (nic nepočítáme, rovnou píšeme výsledek)

$$\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \ln\left(1+x^2\right) + C \quad \text{nebo} \quad \int \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)}\,\mathrm{d}x = -\ln\big(2+\cos(x)\big) + C.$$

vzorec	interval, parametry
$\displaystyle\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$
$\displaystyle\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq -2$
$\displaystyle\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$x \in (0, +\infty)$, $\alpha \notin \mathbb{Z}$
$\displaystyle\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + C$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\displaystyle\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$x \in \mathbb{R}$, $a > 0$ a $a \neq 1$
$\displaystyle\int \sin(x) \,\mathrm{d}x = -\cos(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\displaystyle\int \cos(x) \,\mathrm{d}x = \sin(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(x)} \,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}(x) + C$	$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$
$\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(x)} \,\mathrm{d}x = -\mathrm{cotg}(x) + C$	$x \in \left(k\pi,\ \pi + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$
$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = \arcsin(x) + C$	$x \in (-1, 1)$
$\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \mathrm{arctg}(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$

Tabulka 8.2: Základní primitivní funkce.

Zatím jsme neodpověděli na otázku, zda k zadané funkci f vůbec primitivní funkce existuje. Nemusí tomu tak být vždy. Postačující podmínka pro existenci primitivní funkce je obsažena v následující větě.

Věta 8.8 (Postačující podmínka pro existenci primitivní funkce)**:** Nechť funkce f je spojitá na intervalu (a, b). Pak má funkce f na tomto intervalu primitivní funkci.

Důkaz. Vynecháváme. □

Protože umíme derivovat celou řadu elementárních funkcí (viz např. tabulku 6.2) známe i primitivní funkce k některým elementárním funkcím. Ze znalosti derivací můžeme ihned sestavit tabulku 8.2 primitivních funkcí.

K výpočtu primitivní funkcí komplikovanějších funkcí potřebujeme využít vlastností neurčitého integrálu, které odvodíme v následujících odstavcích. Začneme nejprve tou jednodušší vlastností, chováním vzhledem k sčítání funkcí a konstantním násobkům.

Věta 8.9: Nechť F, resp. G, je primitivní funkce k funkci f, resp. g, na intervalu (a, b) a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak

- $F + G$ je primitivní funkcí k funkci $f + g$ na intervalu (a, b),
- αF je primitivní funkcí k funkci αf na intervalu (a, b).

Důkaz. Stačí si uvědomit, že derivace součtu funkcí je součet derivací funkcí a že derivace konstantního násobku funkce je ten samý konstantní násobek derivace funkce. □

Tvrzení předchozí věty symbolicky zapisujeme takto,

$$\int (f + g) = \int f + \int g \qquad \text{a} \qquad \int (\alpha f) = \alpha \int f,$$

a mluvíme o linearitě neurčitého integrálu.

Příklad 8.10: Vypočtěte

$$\int \left(4x^2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) \mathrm{d}x.$$

Dle předchozí věty ihned dostáváme výsledek

$$\begin{aligned}\int \left(4x^2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) \mathrm{d}x &= 4 \int x^2 \,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x + \int x^{-\frac{2}{3}} \,\mathrm{d}x = \\ &= 4 \cdot \frac{x^3}{3} - \ln|x| + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3} x^3 - \ln|x| + 3x^{\frac{1}{3}} + C,\end{aligned}$$

který platí na libovolném otevřeném intervalu, který je podmnožinou $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Příklad 8.11: Vypočtěte

$$\int (2^x + 3^x)^2 \,\mathrm{d}x.$$

Nejprve provedeme jednoduchou algebraickou úpravu integrandu a následně využijeme předchozí větu čímž dostáváme výsledek,

$$\begin{aligned}\int (2^x + 3^x)^2 \,\mathrm{d}x &= \int \left(2^{2x} + 2 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3^{2x}\right) \mathrm{d}x = \\ &= \int 4^x \,\mathrm{d}x + 2 \int 6^x \,\mathrm{d}x + \int 9^x \,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{4^x}{\ln 4} + 2 \cdot \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C.\end{aligned}$$

8.2 Integrace per partes

V předchozí podkapitole jsme zjistili jak hledat primitivní funkci k součtu dvou funkcí a konstantnímu násobku funkce. Nyní se pokusíme hledat primitivní funkci k součinu dvou funkcí. Vyjdeme z věty 6.13 o derivaci součinu dvou funkcí.

Věta 8.12 (Per partes)**:** Nechť funkce f je diferencovatelná na intervalu (a, b) a G je primitivní funkce k funkci g na intervalu (a, b) a konečně nechť existuje primitivní funkce k funkci $f'G$. Potom existuje primitivní funkce k funkci fg a platí

$$\int fg = fG - \int f'G. \tag{8.2}$$

Důkaz. Tvrzení věty můžeme přímo ověřit derivováním. Podle rovnice (8.1) platí

$$\left(fG - \int f'G\right)' = (fG)' - f'G = f'G + fG' - f'G = fG' = fg.$$

□

Poznamenejme, že metoda integrace per partes může být úspěšná pouze pokud budeme schopni dále pracovat s novým integrálem na pravé straně rovnice (8.2), který je stále ve tvaru součinu. Nejedná se o metodu, která „zabere" na libovolný součin, k tomuto tématu se vrátíme později v podkapitole 8.5. Latinský výraz „per partes" v češtině znamená „po částech". Ukažme si použití této metody podrobně na jednoduchých příkladech.

Příklad 8.13: Vypočtěte neurčitý integrál $\displaystyle\int x \sin x \, \mathrm{d}x$.

Pomocí integrace per partes (věta č. 8.12) dostáváme

$$\begin{aligned}\int x \sin x \, \mathrm{d}x &= -x \cos x + \int \cos x \, \mathrm{d}x = \\ &= -x \cos x + \sin x + C.\end{aligned}$$

Na tomto místě je dobré si uvědomit, že správnost výsledku integrace můžeme vždy snadno ověřit pomocí definice 8.1, tedy derivováním:

$$\big(-x \cos x + \sin x + C\big)' = -\cos x + x \sin x + \cos x + 0 = x \sin x.$$

Příklad 8.14: Vypočtěte neurčitý integrál $\displaystyle\int x^2 e^x \, \mathrm{d}x$.

Nyní je potřeba per partes (věta č. 8.12) použít dvakrát. Dostáváme

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x \, \mathrm{d}x = x^2 e^x - \int 2x e^x \, \mathrm{d}x &= x^2 e^x - 2 \int x e^x \, \mathrm{d}x = \\ &= x^2 e^x - 2\left(x e^x - \int e^x \, \mathrm{d}x\right) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x = \\ &= \big(x^2 - 2x + 2\big) e^x + C.\end{aligned}$$

V každém použití metody per partes jsme integrovali exponenciální funkce a derivovali zbytek v integrandu.

Příklad 8.15: Vypočtěte neurčitý integrál $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$. Integrand sice na první pohled není ve tvaru součinu, ale můžeme postupovat následovně:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x &= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \\ &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \underbrace{\frac{2x}{1+x^2}}_{(\ln(1+x^2))'} \mathrm{d}x = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln\big(1+x^2\big) + C.\end{aligned}$$

8.3 Věty o substituci v neurčitém integrálu

Metoda integrace per partes byla založena na znalosti derivace součinu dvou funkcí. Ze znalosti derivace složené funkce odvozené ve větě 6.15 nyní odvodíme metodu integrace pomocí substituce.

Věta 8.16 (O substituci I)**:** Nechť pro funkce f a φ platí

1. f má primitivní funkci F na intervalu (a, b),
2. φ je na intervalu (α, β) diferencovatelná,
3. $\varphi\big((\alpha, \beta)\big) \subset (a, b)$.

Pak funkce $f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)$ má primitivní funkci na intervalu (α, β) a platí

$$\int f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x) \,\mathrm{d}x = F\big(\varphi(x)\big).$$

Důkaz. F je primitivní funkcí k funkci f, tj. $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$. Podle věty o derivaci složené funkce dostaneme

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x) = f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x),$$

pro každé $x \in (\alpha, \beta)$. □

Příklad 8.17: Vypočtěte

$$\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x.$$

Použijeme substituci $y = \varphi(x) = \frac{1}{x}$. Potom $\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Proto

$$\int \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{-\varphi'(x)} \sin \underbrace{\frac{1}{x}}_{\varphi(x)} \,\mathrm{d}x = -\int \sin y \,\mathrm{d}y = \cos y + C = \cos \frac{1}{x} + C.$$

Čímž je výpočet dokončen. Výsledek platí na libovolném otevřeném podintervalu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Příklad 8.18: Vypočtěte neurčitý integrál

$$\int \frac{1}{(1 + x)\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x.$$

Výpočet provedeme na intervalu $(0, +\infty)$ což je největší interval, na kterém je integrand definován. Pro substituci použijeme $y = \varphi(x) = \sqrt{x}$, pro jejíž derivaci platí $\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Tudíž,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1 + x)\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{1 + \big(\sqrt{x}\big)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{1 + y^2} \,\mathrm{d}y = \\ = 2 \operatorname{arctg} y + C = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C.\end{aligned}$$

Výsledek platí na $(0, +\infty)$, protože $\operatorname{arctg} y$ je primitivní funkcí k $\frac{1}{1+y^2}$ na $\varphi((0, +\infty)) = (0, +\infty)$.

Příklad 8.19: Nalezněte primitivní funkci k funkci $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ na intervalu $J = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Funkce f je na intervalu J spojitá a má zde tedy primitivní funkci. Nejprve upravme integrand

$$\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \, \mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\cos(x)} \cdot \big(-\sin(x)\big) \, \mathrm{d}x.$$

Použijeme větu o substituci (č. 8.16), kde zvolíme $f(y) = \frac{1}{y}$ a $y = \varphi(x) = \cos(x)$. Funkce φ zobrazuje interval J na interval $(-1, 0)$ kde má f primitivní funkci $F(y) = \ln(-y)$. Navíc $\varphi'(x) = -\sin(x)$. Větu lze tudíž použít a dostáváme

$$\int \operatorname{tg}(x) \, \mathrm{d}x = -\ln\big(-\cos(x)\big) + C, \quad x \in J.$$

Často se též substituce zapisuje jako $y = \cos x$, $\mathrm{d}y = -\sin x \, \mathrm{d}x$ a

$$\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x = -\int \frac{1}{y} \, \mathrm{d}y = -\ln|y| + C = -\ln\big(-\cos(x)\big) + C.$$

V předchozí větě 8.16 byla stará integrační proměnná x s novou integrační proměnnou y svázána předpisem typu $y = \varphi(x)$. V následující větě naopak klademe $x = \varphi(y)$, čili $y = \varphi^{-1}(x)$. Tato varianta substituce bude tedy zřejmě založena na schopnosti derivovat inverzní funkci (viz větu 6.19).

Věta 8.20 (O substituci II)**:** Nechť f je definována na intervalu (a, b) a nechť φ je bijekce intervalu (α, β) na (a, b) s nenulovou konečnou derivací. Pak platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) \, \mathrm{d}t = G(t) + C \quad \Longrightarrow \quad \int f(x) \, \mathrm{d}x = G\big(\varphi^{-1}(x)\big) + C$$

Důkaz. Pomocí věty o derivaci složené funkce (věta 6.15) a věty o derivaci inverzní funkce (věta 6.19) ověříme správnost tvrzení. Platí

$$\begin{aligned}\Big(G\big(\varphi^{-1}(x)\big)\Big)' &= G'\big(\varphi^{-1}(x)\big) \cdot \frac{1}{\varphi'\big(\varphi^{-1}(x)\big)} = \\ &= f\Big(\varphi\big(\varphi^{-1}(x)\big)\Big) \cdot \varphi'\big(\varphi^{-1}(x)\big) \cdot \frac{1}{\varphi'\big(\varphi^{-1}(x)\big)} = f(x).\end{aligned}$$

□

Příklad 8.21: Pomocí předchozí věty vypočtěte (již známý) integrál

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, \mathrm{d}x = \arcsin x + C.$$

Integrand

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

je definován na intervalu $(a, b) = (-1, 1)$. Abychom se zbavili odmocniny ve jmenovateli položme

$$x = \varphi(t) = \sin(t), \quad t \in (\alpha, \beta) := \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big).$$

Funkce sin je na intervalu (α, β) rostoucí s nenulovou derivací $\varphi'(t) = \cos t$. Dále

$$\begin{aligned} G(t) &= \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\ \mathrm{d}t = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t \,\mathrm{d}t = \\ &= \int \frac{\cos t}{\cos t}\,\mathrm{d}t = \int 1\,\mathrm{d}t = t + C. \end{aligned}$$

Protože $t = \arcsin(x)$ uzavíráme,

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x) + C.$$

Příklad 8.22: Vypočtěte

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Podobně jako v předchozím případě se lze zbavit odmocniny. Nyní je však integrand definován na $\mathbb{R}$. Zvolíme-li

$$x = \varphi(t) = \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

pak

$$\begin{aligned} 1 + \varphi(t)^2 = 1 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 &= 1 + \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = \\ &= \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Protože $\varphi'(t) = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$ dostáváme

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+\varphi(t)^2}}\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int 1\,\mathrm{d}t = t + C$$

Funkce φ zobrazuje $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$ a je monotónně rostoucí s nenulovou derivací. K dokončení příkladu je nutné nalézt její inverzi. Pokud $x = \varphi(t)$, pak

$$e^{2t} - 2xe^t - 1 = 0.$$

Odtud

$$e^t = \frac{1}{2}\left(2x \pm \sqrt{4x^2+4}\right) = x \pm \sqrt{x^2+1}.$$

Smysl v našem případě má pouze znaménko plus. Tudíž,

$$t = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Uzavíráme

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C.$$

8.4 Integrace racionálních lomených funkcí

V této části textu si stručně rozebereme, jak integrovat

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x,$$

kde p je libovolný polynom a q je polynom stupně *nejvýše* dvě. Základní kroky postupu lze popsat následovně:

1. Pokud to lze, vyděl polynom p polynomem q, pak $\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$, kde stupeň polynomu r je nejvýše 1. Polynom s zintegrujeme snadno.
2. Pokud je stupeň polynomu q roven 1, pak použijeme $\int \frac{b}{x-a}\,\mathrm{d}x = b\ln|x-a| + C$.
3. Pokud má polynom q jeden dvojnásobný kořen, pak $\int \frac{bx+c}{(x-a)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{b}{(x-a)} + \frac{ab+c}{(x-a)^2}\,\mathrm{d}x = b\ln|x-a| - \frac{ab+c}{x-a} + C$.
4. Pokud je stupeň polynomu q roven 2 a jeho diskriminant je kladný, pak $\frac{r}{q}$ převedeme na tvar $\frac{b_1}{x-a_1} + \frac{b_2}{x-a_2}$ a použijeme bod 2.
5. Pokud je stupeň polynomu q roven 2 a jeho diskriminat je záporný, pak použijeme *doplnění jmenovatele na čtverec*, integrál pak vede na arctg.

Poznámka 8.23 (Jednoduchý rozklad na parciální zlomky)**:** K úspěšnému provedení kroku 4. je potřeba provést rozklad na tzv. parciální zlomky (nejjednodušší verze):

$$\frac{ax+b}{(x-c)(x-d)} = \frac{A}{x-c} + \frac{B}{x-d}.$$

Konstanty a, b, c, d jsou zadány, neznámé A, B hledáme. Převedeme-li pravou stranu na společný jmenovatel a upravíme čitatele dostaneme

$$\frac{A}{x-c} + \frac{B}{x-d} = \frac{(A+B)x - Ad - Bc}{(x-c)(x-d)}.$$

Neznámé proto řeší soustavu

$$\begin{aligned} a &= A + B, \\ b &= -Ad - Bc, \end{aligned}$$

kterou snadno vyřešíme (v konkrétním příkladě). Často lze u jednoduchých příkladů rozklad i uhodnout. Například

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{3}}{x+2}.$$

Příklad 8.24: Ukázky použití metody na postupně se komplikujících se příkladech.

- $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int x - 1 + \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C.$
- $\displaystyle\int \frac{3x-3}{(x-2)(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln|x-2| + 2\ln|x+1| + C.$

- $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \operatorname{arctg} y + C = \operatorname{arctg}(x-1)+C$, kde jsme použili substituci $y = x-1$.
- $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2+2}{1+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\left((x-1)^2\right)'}{1+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{1+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(1+(x-1)^2\right) + \int \frac{1}{1+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$, a na druhý integrál použijeme předchozí bod.

Tuto metodu lze rozšířit i na polynomy vyšších stupňů. Ruční počítání se pak ale značně komplikuje. Je očividně potřeba hledat kořeny polynomu ve jmenovateli, což pro polynomy stupně pět a výše není analyticky řešitelná úloha. I kdybychom tyto kořeny našly, tak budeme muset řešit lineární soustavu o mnoha neznámých. Na to lze použít například Gaussovu eliminaci, ale ta se probírá až v dalším semestru.

8.5 Poznámky k integraci

Jenom malá část elementárních funkcí má primitivní funkci, která by byla elementární. Víme jen, že primitivní funkce existuje, ale nelze ji vyjádřit pomocí konečně mnoha operací (součet, součin, podíl, skládání a invertování) z elementárních funkcí. Jako příklad uveďme[36]

$$\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz tohoto tvrzení v této přednášce nebude podán. Uvidíme však, jak vyjádřit a použít libovolnou primitivní funkci.

Rozpoznat, kdy funkce má „rozumnou“ primitivní funkci, je často složité. Obecný návod „jak integrovat“ lze dát například v případě racionálních funkcí a funkcí které lze na racionální vhodnou substitucí převést.

Integrace, na rozdíl od rutinního derivování, vyžaduje *cvik a zkušenost.* Stará anekdota praví, že „derivování je jako mačkat pastu z tuby a integrování je naopak jako cpaní pasty zpět do tuby“. U školních příkladů lze ale vždy pomocí rutinního derivování ověřit, zda jsme ve výpočtu neudělali chybu!

Příklad 8.25: Vypočtěte $\displaystyle\int xe^{x^2}\mathrm{d}x$ a výsledek ověřte.

Pomocí substituce $y = x^2$,

$$\int xe^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int e^y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}e^y + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

Ověření,

$$\left(\frac{1}{2}e^{x^2} + C\right)' = \frac{1}{2}\left(e^{x^2}\right)' + 0 = \frac{1}{2}\cdot 2xe^{x^2} = xe^{x^2}.$$

[36]Nejde o nepodstatné funkce. Například primitivní funkce k e^{-x^2} se vyskytuje v praktických aplikacích. V pravděpodobnostních a statistických tabulkách byste ji našli pod jménem Error function (Erf).

9 Riemannův integrál

9.1 Konstrukce Riemannova integrálu

Nejjednodušší geometrickou motivací Riemannova integrálu (či určitého integrálu, Bernhard Riemann, německý matematik, 1826 – 1866) je výpočet obsahu plochy ohraničené grafem funkce a osou nezávisle proměnné. Na obrázku 9.1 je tato plocha znázorněna světle modrou barvou. Zajímavým a možná překvapivým výsledkem pak bude Newtonova formule (věta 9.15) odhalující vztah mezi touto geometrickou konstrukcí a primitivní funkcí.

Celá konstrukce Riemannova integrálu vychází ze znalosti obsahu obdélníka. Danou plochu pod grafem funkce budeme postupně aproximovat plochou sestavenou z mnoha obdélníků. Ukazuje se, že pro spojitou funkci tento limitní proces dává dobrý výsledek. Nejprve definujme základní pojmy.

Definice 9.1: Buď dán interval $\langle a, b\rangle$. Konečnou množinu

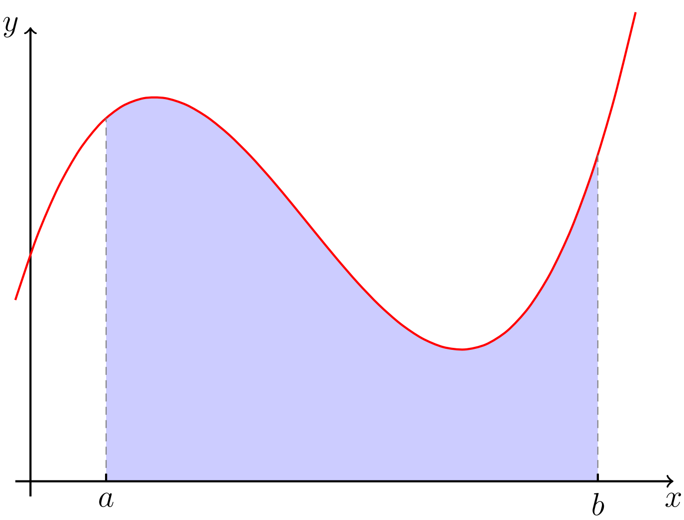
$$\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

takovou, že

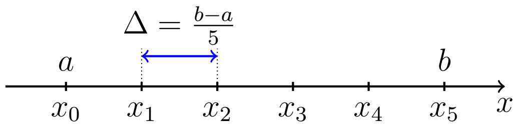
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

nazýváme **dělením intervalu** $\langle a, b\rangle$. Bodům x_k, $k = 1, 2, \dots, n-1$, říkáme **dělící body intervalu** $\langle a, b\rangle$. Intervalu $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$ říkáme **částečný interval** intervalu $\langle a, b\rangle$ při dělení σ. Číslo

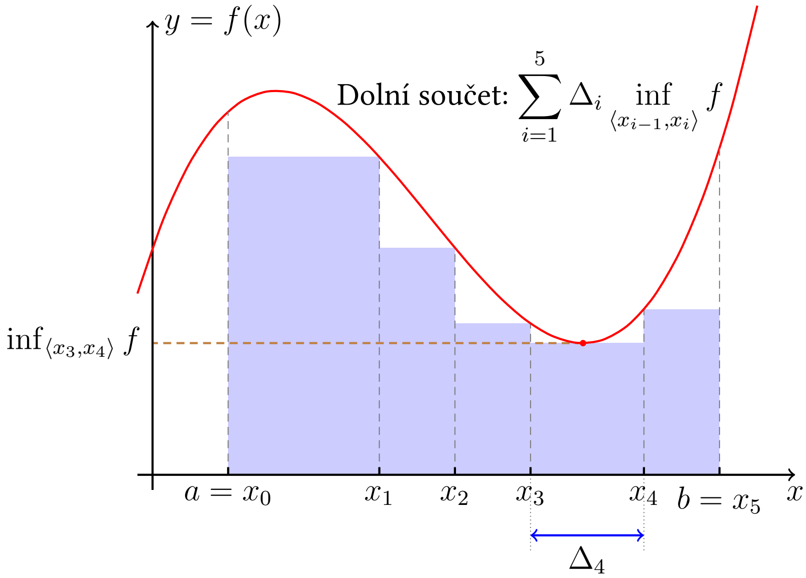
$$\nu(\sigma) := \max\{\Delta_k \mid k = 1, 2, \dots, n\}, \quad \text{kde} \quad \Delta_k := x_k - x_{k-1},\ k = 1, 2, \dots, n,$$



Obrázek 9.1: Plocha mezi grafem jisté funkce a osou x nad intervalem $\langle a, b\rangle$.



Obrázek 9.2: Příklad ekvidistantního dělení intervalu intervalu $\langle a, b\rangle$ na pět stejně dlouhých intervalů.



Obrázek 9.3: Jeden konkrétní dolní součet funkce f při dělení σ.

nazýváme **normou dělení** σ.

Příklad 9.2: Pro interval $\langle a, b\rangle$ a $n \in \mathbb{N}$ položme $\Delta := \frac{b-a}{n}$ a

$$x_i := a + i \cdot \Delta, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Tedy

$$\sigma = \big\{a,\ a + \Delta,\ a + 2\Delta, \ldots,\ a + (n-1)\Delta,\ b\big\}.$$

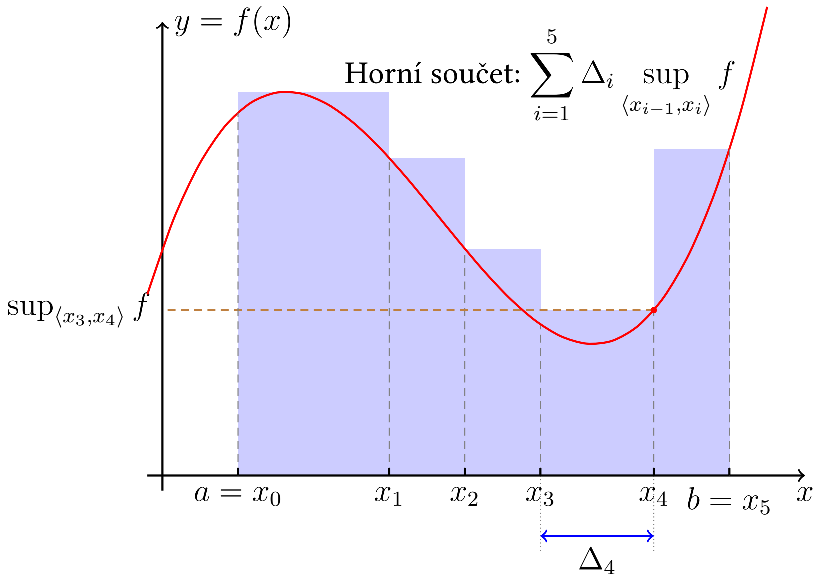
Všimněte si, že $a + n\Delta = a + b - a = b$. V případě $n = 5$ si lze ekvidistantní dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ představit jako na následujícím obrázku č. 9.2.

Buďte funkce f definovaná a omezená na intervalu $J = \langle a, b\rangle$ a $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ dělení intervalu J. Součty

$$S(\sigma, f) := \sum_{i=1}^{n} \Delta_i \sup_{\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f \quad \text{a} \quad s(\sigma, f) := \sum_{i=1}^{n} \Delta_i \inf_{\langle x_{i-1}, x_i\rangle} f$$

nazýváme **horním součtem funkce** a **dolním součtem funkce** f při dělení σ.

Dolní, resp. horní, součty představují obsah plochy tvořené obdélníky pod, resp. nad, grafem funkce s podstavami tvořenými částečnými dělícími intervaly. Následující obrázky č. 9.3 a 9.4 ilustrují dolní a horní součty.



Obrázek 9.4: Jeden konkrétní horní součet funkce f při dělení σ.

Pro funkci f definovanou a omezenou na uzavřeném intervalu $J = \langle a, b \rangle$ definujeme čísla

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf\{S(\sigma) \mid \sigma \text{ dělení } J\} \text{ a } \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\{s(\sigma) \mid \sigma \text{ dělení } J\}.$$

a nazýváme **horním integrálem**, resp. **dolním integrálem**, funkce f na intervalu J.

Ze způsobu jakým je horní (resp. dolní) integrál konstruován je zřejmé, že představuje jakýsi horní (resp. dolní) odhad obsahu hledané plochy. Pokud horní i dolní integrál jsou stejné, tak má dobrý smysl mluvit o obsahu plochy pod grafem. Proto Riemannův integrál definujeme následovně.

Definice 9.3: Pokud pro funkci f definovanou a omezenou na uzavřeném intervalu J platí

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R},$$

pak jejich společnou hodnotu nazýváme **Riemannovým integrálem funkce f na intervalu J** a toto číslo značíme symboly

$$\int_a^b f, \quad \text{případně} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 9.4: Ukažme si jednoduchý příklad funkce, které není Riemannovsky integrabilní. Definujme Dirichletovu funkci

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

s definičním oborem $\mathbb{R}$. Vezměmě libovolné dělení σ intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Zřejmě platí $S(\sigma, f) = 1$ a $s(\sigma, f) = 0$ a proto

$$\overline{\int_0^1} f = 1 \quad \text{a} \quad \underline{\int_0^1} f = 0.$$

Tato funkce tedy nemá Riemannův integrál na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ ani na libovolném jiném uzavřeném intervalu.

V definici horního a dolního integrálu potřebujeme počítat suprema a infima jistých množin. To nemusí být jednoduchá úloha. Naštěstí ji ve většině případů můžeme nahradit počítáním limity jisté číselné posloupnosti.

Posloupnost dělení σ_n nazveme **normální**, pokud pro její normy platí

$$\lim_{n\to\infty} \nu(\sigma_n) = 0.$$

Věta 9.5 (Postačující podmínka pro existenci Riemannova integrálu)**:** Buď f spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom existuje její Riemannův integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Pokud je navíc (σ_n) normální posloupnost dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ potom limity

$$\lim_{n\to\infty} s(\sigma_n, f) \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} S(\sigma_n, f)$$

existují, a jsou rovny Riemannově integrálu funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Důkaz. Vynecháváme. □

Výpočet lze ale ještě dále zjednodušit. Při výpočtu horního a dolního součtu musíme hledat infima a suprema integrované funkce na dělících intervalech. Tomu se lze také vyhnout jak ukazuje následující věta.

Definice 9.6: Pro funkci f spojitou na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a dělení $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, kde $x_0 = a$ a $x_n = b$, tohoto intervalu definujeme **integrální součet funkce** f **při dělení** σ předpisem

$$\mathcal{J}(\sigma, f) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i,$$

kde α_i patří do intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Vztah mezi dolním a horním součtem a integrálním součtem funkce f při dělení σ je dán nerovnostmi

$$s(\sigma, f) \le \mathcal{J}(\sigma, f) \le S(\sigma, f).$$

Riemannův integrál funkce f spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$ lze tedy počítat i jako limitu z integrálních součtů

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(\sigma_n, f), \tag{9.1}$$

kde $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná normální posloupnost dělení.

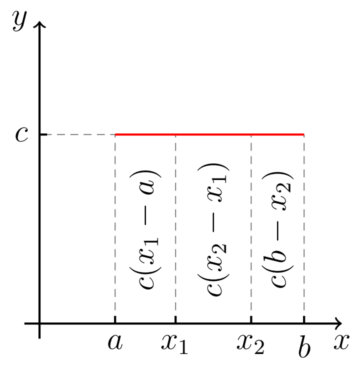
Příklad 9.7: Vypočtěte integrál z konstantní funkce $f(x) = c$ na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Pro libovolné dělení σ intervalu $\langle a, b\rangle$ platí

$$s(\sigma, f) = S(\sigma, f) = \mathcal{J}(\sigma, f) = c(b - a).$$

Takže pro libovolnou normální posloupnost (σ_n) dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} s(\sigma_n, f) = \lim_{n\to\infty} S(\sigma_n, f) = c(b - a).$$



Obrázek 9.5: Riemannův integrál z konstantní funkce.

Riemannův integrál funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ je pak

$$\int_a^b f = c(b-a).$$

Viz obrázek č. 9.5.

Příklad 9.8: Pomocí definice vypočtěte Riemannův integrál funkce $f(x) = x$ na intervalu $J = \langle 0, 1\rangle$.

Zvolme normální posloupnost (σ_n) ekvidistantních dělení intervalu J.

$$\sigma_n = \left\{0 = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)} = 1\right\}, \quad x_i^{(n)} = i \cdot \frac{1}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Pro dolní součet při dělení σ_n dostáváme

$$s(\sigma_n, f) = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^{(n)} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

Tudíž

$$\int_0^1 x \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} s(\sigma_n, f) = \frac{1}{2}.$$

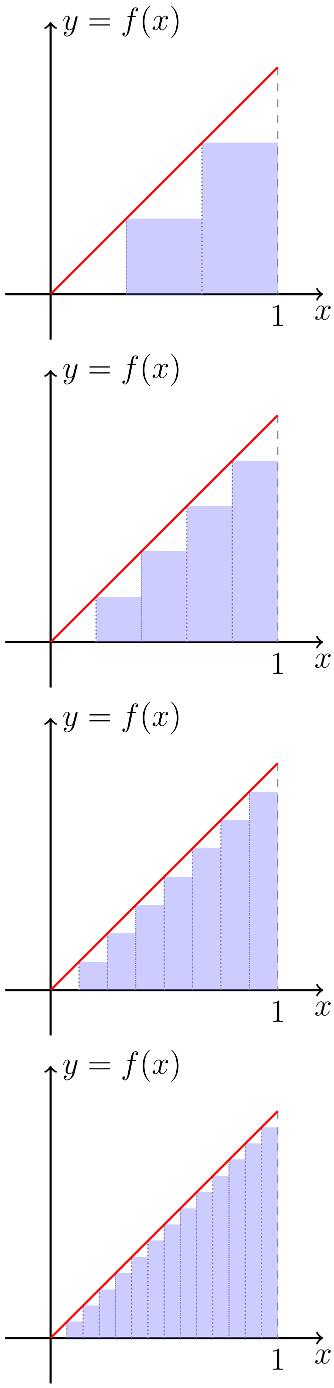
Podobně pro horní součet při dělení σ_n platí

$$S(\sigma_n, f) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{(n)} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

a opět

$$\lim_{n\to\infty} S(\sigma_n, f) = \frac{1}{2}.$$

Poznámka 9.9 (Mathematica)**:** Určitý integrál lze v počítačovém algebraickém systému Mathematica počítat pomocí příkazu Integrate[f, {x, a, b}], kde f je integrovaná funkce (výraz), x integrační proměnná a a dolní a b horní mez.



Obrázek 9.6: K výpočtu Riemannova integrálu funkce $f(x) = x$.

Poznámka 9.10 (Numerický výpočet integrálu)**:** V následující podkapitole si ukážeme jak v některých případech lze počítat Riemannův integrál symbolicky. Na tomto místě je ale vhodné poznamenat, že konstrukce (definice) uvedená v této kapitole přímo nabádá k numerickému výpočtu pomocí počítače. Nejvhodnější k tomuto účelu použít integrálních součtů, viz rovnici (9.1).

Na tomto místě zmiňme aspoň jeden sofistikovanější způsob známý jako **Simpsonovo pravidlo**. Jeho myšlenka opět spočívá v konstrukci dělení $\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$. V předchozích odstavcích jsme vlastně nad dělícími intervaly $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ nahradili původní funkcí f konstantní funkci (supremem, infimem nebo libovolnou hodnotou funkce f). Nyní nahradíme funkci f nad intervalem $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ její kvadratickou interpolací procházející body $\big(x_{i-1}, f(x_{i-1})\big)$, $\big(x_i, f(x_i)\big)$ a $\big((x_{i-1} + x_i)/2, f((x_{i-1} + x_i)/2\big)$.

Hledáme kvadratickou funkci $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ splňující

$$\begin{aligned}
\alpha x_{i-1}^2 + \beta x_{i-1} + \gamma &= f(x_{i-1}),\\
\alpha x_i^2 + \beta x_i + \gamma &= f(x_i),\\
\alpha\Big(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\Big)^2 + \beta\frac{x_i + x_{i-1}}{2} + \gamma &= f\Big(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\Big).
\end{aligned}$$

Tyto tři lineární rovnice pro tři neznámé α, β, γ lze vyřešit (explicitní vzorečky pro ně lze nalézt v bi-zma-m-integrace.nb notebooku na oficiální stránkách předmětu BI-ZMA). Příspěvek k integrálu na intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ pak nahradíme skutečným integrálem z této kvadratické funkce (vizte Newtonovu formuli 9.15 dále),

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \alpha x^2 + \beta x + \gamma \,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}(x_i - x_{i-1})\bigg(f(x_{i-1}) + f(x_i) + 4f\Big(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\Big)\bigg).$$

Tudíž podle Simpsonova pravidla je přibližnou hodnotou integrálu

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

hodnota součtu

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{6}(x_i - x_{i-1})\bigg(f(x_{i-1}) + f(x_i) + 4f\Big(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\Big)\bigg),$$

kde $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$.

9.2 Vlastnosti Riemannova integrálu

V dalším textu se pro jednoduchost omezíme na spojité omezené funkce, pro něž Riemannův integrál existuje. Následující vlastnosti lze odvodit přímo z definice Riemannova integrálu (resp. pomocí integrálních součtů a normálních posloupností dělení). První dvě věty velmi zjednodušují praktické výpočty.

Věta 9.11 (Aditivita integrálu)**:** Nechť f a g jsou spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom pro Riemannův integrál funkce $f + g$ (která je také automaticky spojitá na $\langle a, b\rangle$) platí

$$\int_a^b (f + g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 9.12 (Multiplikativita integrálu)**:** Nechť f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a $c \in \mathbb{R}$ je konstanta. Potom pro Riemannův integrál funkce cf platí

$$\int_a^b (cf)(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Předchozí dvě věty často vyjadřujeme konstatováním, že Riemannův (určitý) integrál je lineární. Riemannův integrál je aditivní i vůči mezím, platí totiž:

Věta 9.13 (Aditivita integrálu v mezích)**:** Riemannův integrál funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ existuje, právě když pro každé $c \in (a, b)$ existují Riemannovy integrály funkce f na intervalech $\langle a, c\rangle$ a $\langle c, b\rangle$. V takovém případě navíc platí

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Konečně z nerovností mezi funkcemi lze usuzovat na nerovnost mezi jejich určitými integrály. Tuto vlastnost lze často využít při odhadování integrálů (např. při výpočtu rychlosti růstu, k této problematice se dostaneme později).

Věta 9.14 (Nerovnosti mezi integrály)**:** Nechť jsou f a g spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť platí nerovnost $f(x) \le g(x)$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$. Potom pro jejich Riemannovy integrály platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Následující věta odhaluje vztah mezi určitým (Riemannovým) a neurčitým (primitivní funkce) integrálem. Umožňuje nám počítat Riemannův integrál bez explicitního použití limitní definice.

Věta 9.15 (Newtonova formule)**:** Nechť f je funkce spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ s primitivní funkcí F. Pak platí rovnost

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) =: \Big[F(x)\Big]_a^b.$$

Důkaz. Uvažme $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Použijeme Lagrangeovu větu (věta č. 6.41) o přírůstku funkce na funkci F a intervaly $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ postupně pro $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{i=1}^{n} \Big(F(x_i) - F(x_{i-1})\Big) = \sum_{i=1}^{n} F'(\alpha_i)(x_i - x_{i-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\Delta_i, \end{aligned}$$

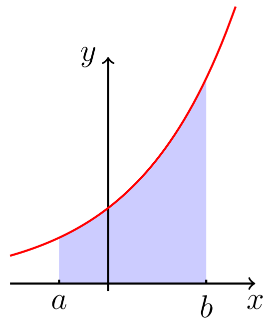
kde $\alpha_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Takže

$$F(b) - F(a) = \mathcal{J}(\sigma, f).$$

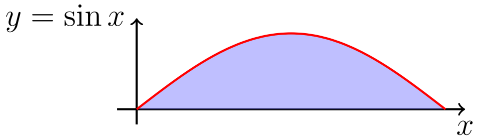
Uvážíme-li nyní libovolnou normální posloupnost dělení (σ_n) pak

$$F(b) - F(a) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(\sigma_n, f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

□



Obrázek 9.7: Plocha pod grafem exponenciální funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$.



Obrázek 9.8: Plocha pod grafem funkce sin na intervalu $(0, \pi)$.

Příklad 9.16: Pro $a < b$ vypočtěte integrál

$$\int_a^b e^x \, \mathrm{d}x.$$

Primitivní funkcí k e^x je funkce e^x. Pak

$$\int_a^b e^x \, \mathrm{d}x = \Big[e^x\Big]_a^b = e^b - e^a.$$

Pro ilustraci viz obrázek 9.7.

Příklad 9.17: Spočítejte integrál

$$\int_0^\pi \sin x \, \mathrm{d}x.$$

Primitivní funkcí k funkci $\sin x$ je funkce $-\cos x$. Proto

$$\int_0^\pi \sin x \, \mathrm{d}x = \Big[-\cos x\Big]_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

Plocha jednoho „hrbu“ grafu funkce sin je tedy 2 (v daných jednotkách plochy). Pro ilustraci viz obrázek 9.8.

9.3 Per partes a substituce pro určitý integrál

Díky Newtonově formuli (věta č. 9.15) můžeme nyní relativně snadno přeformulovat metodu integrace pomocí per partes a substituce i pro určitý integrál.

Věta 9.18: Nechť f a g jsou funkce spojité na $\langle a,b\rangle$, f má spojitou derivaci na intervalu $\langle a,b\rangle$ a nechť G je primitivní funkce k funkci g na intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \big[f(x)G(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Funkce fG je primitivní funkcí k funkci $f'G + fg$ na intervalu (a,b) a spojitá na $\langle a,b\rangle$. Předpoklady spojitosti na intervalu $\langle a,b\rangle$ zaručují existenci integrálů $\int_a^b f'G$ a $\int_a^b fg$. Požijeme-li linearitu integrálu a Newtonovu formuli dostáváme

$$\int_a^b f'(x)G(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (fG)'(x)\,\mathrm{d}x = \big[f(x)G(x)\big]_a^b.$$

□

Příklad 9.19: Vypočtěte

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x.$$

Derivujeme $\ln(1+x)$ a integrujeme 1,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x &= \Big[x\ln(1+x)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \ln(2) - \Big[x - \ln|1+x|\Big]_0^1 = 2\ln(2) - 1.\end{aligned}$$

Zavádíme následující značení

- $\displaystyle\int_a^a f := 0,$
- pro $a > b$ klademe $\int_a^b f := -\int_b^a f$.

Věta 9.20 (O substituci)**:** Nechť pro funkce f a φ platí

1. φ a její derivace φ' jsou spojité na $\langle \alpha,\beta\rangle$,
2. f je spojitá na $\varphi\big(\langle \alpha,\beta\rangle\big)$.

Potom

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Podobně lze formulovat i druhou větu o substituci pro určitý integrál.

Příklad 9.21: Vypočtěte integrál

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{2}+e^{-x}}\,\mathrm{d}x.$$

Použijeme substituci $y = \varphi(x) = \frac{1}{2} + e^{-x}$. Potom

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{2}+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = -\int_{\frac{3}{2}}^1 \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \Big[\ln|y|\Big]_1^{\frac{3}{2}} = \ln\frac{3}{2}.$$

Příklad 9.22: Vypočtěte integrál

$$\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^8}\,\mathrm{d}x.$$

Pomocí substituce $y = x^4$, $\mathrm{d}y = 4x^3\mathrm{d}x$, ihned dostáváme

$$\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^8}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\Big[\operatorname{arctg} y\Big]_0^1 = \frac{\pi}{16}.$$

Při integraci lze často využít symetrie integrované funkce. Následující věta mluví o integraci sudých či lichých intervalů na symetrických intervalech a o integraci periodických funkcí.

Věta 9.23: Nechť f je funkce spojitá na uvažovaných intervalech.

1. Je-li f sudá funkce na $\langle -a, a\rangle$, pak $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.
2. Je-li f lichá funkce na $\langle -a, a\rangle$, pak $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$.
3. Je-li f periodická na $\mathbb{R}$ s periodou T, pak pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ platí $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_b^{b+T} f(x)\mathrm{d}x$.

Důkaz. Případ a). Pomocí substituce $y = -x$ dostáváme

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^0 f(-y)(-1)\mathrm{d}y = \int_0^a f(y)\mathrm{d}y.$$

Případ b). Stejným způsobem jako v prvním bodě odvodíme

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = -\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

Případ c). Pomocí substituce $y = x + T$ a periodicity f nahlédneme, že

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a+T}^{b+T} f(x)\mathrm{d}x + \int_b^{a+T} f(x)\mathrm{d}x =$$
$$= \int_b^{a+T} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a+T}^{b+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_b^{b+T} f(x)\mathrm{d}x.$$

□

Příklad 9.24: Vypočítejte integrály

$$\int_{-2}^{2} \big(x^3 + 3x^2 - x\big)\mathrm{d}x, \qquad \int_{-1}^{1} xe^{x^2}\mathrm{d}x, \qquad \int_0^{2\pi} |\sin x|\mathrm{d}x.$$

Postupně vypočteme všechny integrály a použijeme předchozí větu.

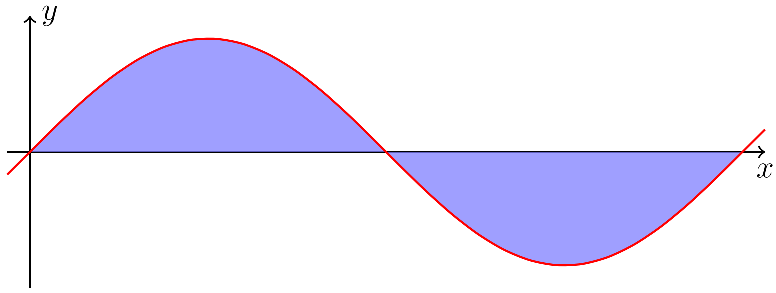
$$\int_{-2}^{2} \big(x^3 + 3x^2 - x\big)\mathrm{d}x = 3\cdot 2\int_0^2 x^2\mathrm{d}x = 3\cdot 2\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 16.$$

Pro druhý integrál můžeme psát

$$\int_{-1}^{1} xe^{-x^2}\mathrm{d}x = 0.$$

V posledním případě je integrand funkce periodická s periodou π a navíc sudá, proto

$$\int_0^{2\pi} |\sin x|\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 2\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = 4.$$



Obrázek 9.9: Určitý integrál funkce sin na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ je roven nule!

9.4 Zobecněný Riemannův integrál

V této sekci nejprve zopakujeme geometrickou interpretaci určitého (Riemannova integrálu) a poté se budeme zabývat jeho různými jednoduchými zobecněními.

Poznámka 9.25: Určitý integrál interpretujeme jako obsah plochy mezi grafem funkce a osou x. Ovšem tento obsah se počítá i se znaménkem:

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = 2, \qquad \int_0^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = 0, \qquad \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = -2.$$

Viz obrázek 9.9.

Poznámka 9.26: Pokud je funkce f definována na intervalu $\langle a, b\rangle$, avšak není na něm spojitá, stále může mít Riemannův integrál. Nejjednodušším případem je situace s jedním bodem skokové nespojitosti:

- existuje $c \in (a, b)$ tak, že f je spojitá na $\langle a, c)$ a $(c, b\rangle$,
- existují konečné jednostranné limity v bodě c.

Potom platí

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Integrály na pravé straně rovnosti jsou již ze spojitých funkcí na uzavřených intervalech. Podobně lze postupovat má-li příslušná funkce konečný počet bodů nespojitostí tohoto typu (s konečnými jednostrannými limitami).

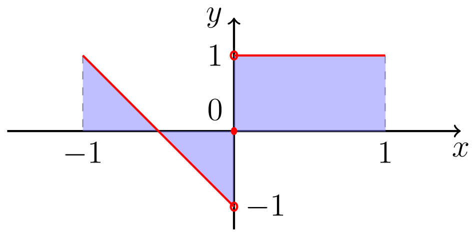
Příklad 9.27: Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$, kde $f(x) = |x| - x + \operatorname{sgn}(x)$.

Funkce f není spojitá v bodě 0:

$$\lim_{x\to 0_+} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 0_-} f(x) = -1.$$

Pro podrobnější představu vizte obrázek č. 9.10. Takže

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (-2x - 1)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = -\Big[x^2 + x\Big]_{-1}^{0} + 1 = 1.$$



Obrázek 9.10: Graf funkce $f(x) = |x| - x + \operatorname{sgn}(x)$.

Riemannův integrál jsme konstruovali pro funkce omezené na omezených uzavřených intervalech. Často je však potřeba integrovat funkce na neomezených množinách případně integrovat neomezené funkce (například e^{-x^2} na $\mathbb{R}$ v BI-PST). Zavádíme proto pojem zobecněného Riemannova integrálu. V následujícím textu nastíníme způsob jeho konstrukce.

Definice 9.28: Nechť f je funkce definovaná na intervalu $\langle a, b)$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ a $b \in (a, +\infty\rangle$, která je Riemanovsky integrabilní na intervalu $\langle a, c\rangle$ pro každé $c \in (a, b)$. Pokud existuje konečná limita

$$\lim_{c \to b_-} \int_a^c f(x)\, \mathrm{d}x,$$

pak její hodnotu značíme

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x,$$

nazýváme **zobecněným Riemannovým integrálem** funkce f na intervalu $\langle a, b)$ a říkáme, že integrál $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$ konverguje.

Poznámka 9.29: Pokud $\int_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x$ konverguje, tak lze ukázat, že i $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$ konverguje. V takovém případě říkáme, že f má **absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál** na $\langle a, b)$.

Poznámka 9.30: Analogicky definujeme předchozí pojmy pro interval $(a, b\rangle$ a pro (a, b).

Definice zobecněného Riemannova integrálu je zajímavá, především, když $b = +\infty$, anebo když funkci v bodě b nejde spojitě dodefinovat.

Příklad 9.31: Například

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x = \lim_{c \to +\infty} \int_1^c \frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x = \lim_{c \to +\infty} \left(-\frac{1}{c} + \frac{1}{1} \right) = 1$$

Příklad 9.32: Například

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x = \lim_{c \to 0_+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x = \lim_{c \to 0_+} \left(2 - 2\sqrt{c}\right) = 2.$$

Dále se můžeme zabývat situací, kdy chceme dát smysl integrálu $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \mathrm{d}x$. Zde se omezíme pouze na absolutně konvergentní případy pro spojité funkce.

Příklad 9.33: Buď f spojitá funkce definovaná na $\mathbb{R}$. Pokud existuje konečná limita

$$\lim_{c \to +\infty} \int_{-c}^c |f(x)|\, \mathrm{d}x,$$

pak tuto její hodnotu značíme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, \mathrm{d}x$$

a o f říkáme, že má *absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál na* $\mathbb{R}$.

Pokud má funkce absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál na $\mathbb{R}$, pak i limita

$$\lim_{c\to+\infty} \int_{-c}^{c} f(x) \, \mathrm{d}x$$

existuje a značíme ji

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Tuto hodnotu pak nazýváme **zobecněným Riemannovým interálem f na $\mathbb{R}$**.

Absolutní konvergence zajišťuje, že hodnota zobecněného Riemannova integrálu nezávisí na způsobu jakým meze „posíláme“ do nekonečna.

Příklad 9.34: Vypočtěte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x.$$

Integrand je zjevně kladnou spojitou funkcí. Dále platí

$$\begin{aligned} \lim_{c\to+\infty} \int_{-c}^{c} \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x &= \lim_{c\to+\infty} [\operatorname{arctg} x]_{-c}^{c} = \lim_{c\to+\infty} \operatorname{arctg}(c) - \operatorname{arctg}(-c) \\ &= \lim_{c\to+\infty} 2 \operatorname{arctg}(c) = \pi. \end{aligned}$$

Funkce $\frac{1}{1+x^2}$ má tedy absolutně konvergentní zobecněný Riemannův integrál na $\mathbb{R}$ a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \pi.$$

9.5 Výpočet obsahů plošných útvarů

Z geometrické interpretace Riemannova integrálu přímo plyne následující tvrzení umožňující počítat obsahy různých zakřivených rovinných útvarů. Pro ilustraci uvádíme i obrázek č. 9.11.

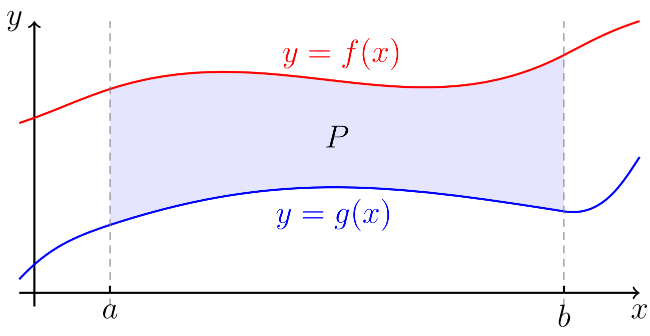
Věta 9.35: Nechť f a g jsou funkce spojité na $\langle a, b\rangle$ takové, že $f(x) \geq g(x)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$. Pak obsah plochy P ohraničené přímkami $x = a$ a $x = b$ a grafy funkcí f a g je roven

$$P = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big) \, \mathrm{d}x.$$

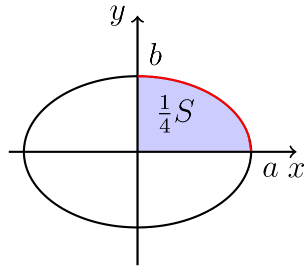
Příklad 9.36: Vypočtěte obsah S elipsy s hlavní poloosou a a vedlejší poloosou b.

Rovnice elipsy je $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Vzhledem k osovým symetriím stačí spočítat čtvrtinu obsahu (vizte obrázek č. 9.12). Vrchní oblouk elipsy patřící do prvního kvadrantu je popsán funkcí $f(x) = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$, $D_f = \langle 0, a\rangle$. Tudíž, použijeme-li substituci $x = a \sin t$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}S &= \int_0^a f(x) \, \mathrm{d}x = b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \, \mathrm{d}x = b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2(t)} \cdot a \cos(t) \, \mathrm{d}t = \\ &= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} ab. \end{aligned}$$



Obrázek 9.11: Obsah plochy ohraničené dvěma grafy funkcí.



Obrázek 9.12: K výpočtu plošného obsahu elipsy.

Pro celkovou plochu tak dostáváme $S = \pi ab$.

Příklad 9.37: Spočítejte obsah plochy ohraničené křivkami $y = x^3$ a $y = x$. Tato plocha je vyobrazena na obrázku č. 9.13.

Nejprve nalezneme průsečíky grafů. Řešením rovnice $x^3 = x$ jsou $x = -1$, $x = 1$ a $x = 0$. Dostáváme proto průsečíky

$$(-1,-1),\ (1,1) \text{ a } (0,0).$$

Z náčrtku (resp. průběhu) je pak patrné, že obsah plochy je

$$S = 2\int_0^1 (x - x^3)\mathrm{d}x = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

Příklad 9.38: Nalezněte obsah plochy ohraničené křivkami

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 1, \quad y = 1 - \frac{1}{4}x^2, \quad x^2 + y^2 = 1,$$

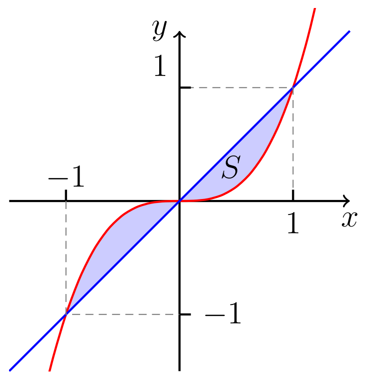
která je vyobrazena na obrázku č. 9.14.

Obsah útvaru bez vyjmuté kružnice je

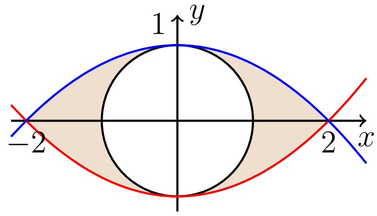
$$\int_{-2}^{2} \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right) - \left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right) \mathrm{d}x = 2\int_0^2 2 - \frac{1}{2}x^2 \,\mathrm{d}x = 2\left[2x - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{16}{3}.$$

Takže plocha našeho útvaru je

$$S = \frac{16}{3} - \pi.$$



Obrázek 9.13: Plocha ohraničená křivkami $y = x^3$ a $y = x$.



Obrázek 9.14: Sauronovo oko. Červená křivka představuje graf funkce $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$, modrá křivka graf funkce $y = 1 - \frac{1}{4}x^2$.

10 Další příklady a aplikace

V této kapitole uvádíme další výklad doplňující příklady využívající nebo rozvíjející teorii probíranou na předcházejících stránkách.

10.1 Křivky

V této podkapitole se budeme stručně zabývat křivkami a jejich délkou. Proč by nás tyto objekty měly zajímat? Křivky se intenzivně využívají v počítačové grafice, například každé písmenko tohoto textu je tvořeno z mnoha křivek. Konkrétně se budeme zabývat křivkou v rovině, intuitivní představu křivky formalizuje následující definice.

Definice 10.1 (Rovinná křivka / *plane curve*)**:** Buďte f a g dvě spojité funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom zobrazení $F : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^2$ definované předpisem

$$F(t) = \big(f(t),\, g(t)\big), \quad t \in \langle a, b\rangle,$$

nazýváme **rovinnou křivkou** (zkráceně křivkou) v $\mathbb{R}^2$.

Poznámka 10.2: Připomeňme, že kulaté závorky v předchozí definici představují uspořádanou dvojici dvou reálných čísel (bod v $\mathbb{R}^2$). Zobrazení F tedy každému $t \in \langle a, b\rangle$ přiřadí $F(t)$, bod v rovině $\mathbb{R}^2$.

Spojitost složek f a g pak přesně vyjadřuje intuitivní požadavek, aby křivka byla „nakreslitelná jedním tahem“. Bez požadavku spojitosti by výsledná množina bodů v rovině vůbec nemusela připomínat to, co by bychom v běžné řeči označili jako „křivku“.

Příklad 10.3: Jako příklad křivky uvažme parametrizaci kružnice. Za interval volíme $\langle a, b\rangle = \langle 0, 2\pi\rangle$ a klademe $F(t) = \big(\cos(t), \sin(t)\big)$. Při této volbě kružnici obíháme proti směru hodinových ručiček.

Úsečku spojující body (a, b) a (c, d) lze také popsat pomocí křivky, například lze klást $F(t) = \big(a + (c - a)t, b + (d - b)t\big)$ pro $t \in \langle 0, 1\rangle$.

Známým příkladem křivek – o kterém jste jistě už slyšeli – jsou Bézierovy křivky. Nejprve definujeme užitečné polynomy se šikovnými vlastnostmi.

Definice 10.4 (Bernsteinův polynom)**:** Pro $n \in \mathbb{N}_0$ a celočíselné i splňující $0 \le i \le n$ definujeme **Bernesteinův polynom** $B_{i,n}$ předpisem

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1 - t)^{n-i}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tyto polynomy oplývají několika zajímavými vlastnostmi. Všimněme si, že pro $t \in \langle 0, 1\rangle$ jsou jejich hodnoty nezáporné, tedy $B_{i,n}(t) \geq 0$. Dále pro jejich součet přes druhý index platí

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = (t + 1 - t)^n = 1.$$

Skutečně, ve výpočtu jsme nepoužili nic jiného než Binomickou větu. Konečně, pro $n \in \mathbb{N}$ platí

$$B_{i,n}(0) = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ 0, & i = 1, 2, \ldots, n, \end{cases} \qquad B_{i,n}(1) = \begin{cases} 1, & i = n, \\ 0, & i = 0, 1, \ldots, n-1. \end{cases} \tag{10.1}$$

Díky těmto vlastnostem a nezápornosti Bernsteinových polynomů (na intervalu $\langle 0, 1\rangle$) také ihned dostáváme[37] horní odhad $B_{i,n}(t) \leq 1$.

Definice 10.5 (Bézierova křivka)**:** Pro $n + 1$ kontrolních bodů $P_0, P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^2$ definujeme křivku C předpisem

$$C(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t), \quad t \in \langle 0, 1\rangle,$$

a nazýváme ji **Bézierovou křivkou** s kontrolními body $P_0, P_1, \ldots, P_n$.

Body $P_0, P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}^2$ jsou často nazývány **kontrolními body**. Všimněte si, že díky (10.1) platí

$$C(0) = P_0 \quad \text{a} \quad C(1) = P_n.$$

Křivka C tedy začíná v P_0 a končí v P_n.

Rozeberme nejpoužívanější případy Bézierových křivek pro nízké n. Pokud $n = 1$, pak C není nic jiného než úsečka spojující body P_0 a P_1. Skutečně,

$$C(t) = \binom{1}{0}(1-t)P_0 + \binom{1}{1} t P_1 = (1-t)P_0 + tP_1, \quad t \in \langle 0, 1\rangle.$$

Pro $n = 2$ dostáváme tzv. *kvadratickou Bézierovu křivku*,

$$C(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2, \quad t \in \langle 0, 1\rangle.$$

Pro $n = 3$ dstáváme tzv. *kubickou Bézierovu křivku*,

$$C(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3, \quad t \in \langle 0, 1\rangle.$$

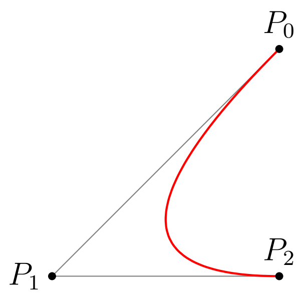
Příklad 10.6: Uvažme například tři body

$$P_0 = (1, 2),\ P_1 = (-2, -1),\ P_2 = (1, -1).$$

Potom

$$\begin{aligned} C(t) &= P_0(1-t)^2 + P_1 \cdot 2t(1-t) + P_2 t^2 = \\ &= \left(1 - 6t + 6t^2,\ 2 - 6t + 3t^2\right). \end{aligned}$$

kde $t \in \langle 0, 1\rangle$. Tato křivka je znázorněna na obrázku č. 10.1.



Obrázek 10.1: Ukázka kvadratické Bézierovy křivky z příkladu 10.6.

V následujícím výpisu uvádíme hrubý extrakt dat z DejaVuSans.ttf s daty pro písmeno „a“. Grafické znázornění odpovídajících křivek je pak na obrázku 10.2.

```
<TTGlyph name='a' xMin='123' yMin='-29' xMax='1069' yMax='1147'/>
  <contour>
    <pt x='702' y='563' on='1'/>
    <pt x='479' y='563' on='0'/>
    <pt x='307' y='461' on='0'/>
    <pt x='307' y='338' on='1'/>
    ...
    <pt x='885' y='563' on='1'/>
  </contour>
  <contour>
    <pt x='1069' y='639' on='1'/>
    <pt x='1069' y='0' on='1'/>
    <pt x='885' y='0' on='1'/>
    ...
    <pt x='1069' y='895' on='0'/>
  </contour>
</TTGlyph>
```

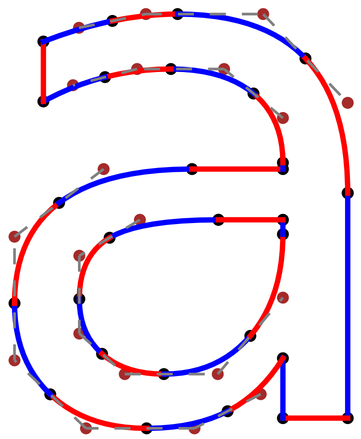
Obraťme se nyní k další otázce. Jak vypočíst délku křivky? Umíme snadno počítat délku úseček spojující dva body (pomocí Euklidovské vzdálenosti dvou bodů v rovině). Proto se nabízí možnost aproximovat křivku pomocí lomené čáry (viz obrázek č. 10.3), jejíž délku snadno vypočteme. Postupným zjemňováním lomené čáry se pak limitně budeme blížit k délce původní křivky (pokud to půjde). Jinak řečeno, myšlenku Riemannovy konstrukce lze poměrně snadno přenést z výpočtu obsahů ploch na výpočet délky křivky.

Definice 10.7: Pro křivku F v $\mathbb{R}^2$ a dělení $\sigma = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, kde $t_0 = a$ a $t_n = b$, intervalu $\langle a, b\rangle$ položme

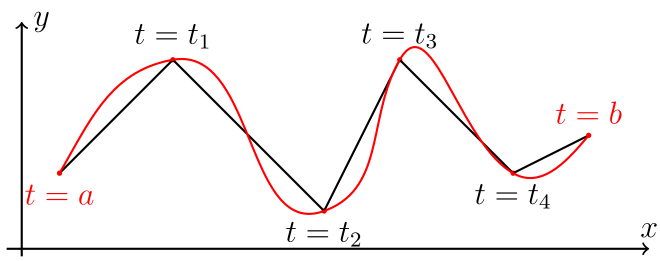
$$\ell(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\big(f(t_i) - f(t_{i-1})\big)^2 + \big(g(t_i) - g(t_{i-1})\big)^2}.$$

Toto číslo nazýváme **délkou lomené čáry** aproximující křivku F při dělení σ intervalu $D_F = \langle a, b\rangle$.

[37]Je-li součet nezáporných čísel roven jedné, musí být každý sčítanec menší nebo roven jedné.



Obrázek 10.2: Konstrukce písmena „a“ ve fontu DejaVuSans.ttf pomocí Bézierových křivek.



Obrázek 10.3: Aproximace křivky pomocí lomené čáry.

Věta 10.8: Je-li F křivka v $\mathbb{R}^2$, $F(t) = \big(f(t),\, g(t)\big)$ a funkce f a g jsou spojitě diferencovatelné na $\langle a, b\rangle$, pak pro libovolnou normální posloupnost dělení σ_n intervalu $\langle a, b\rangle$ existuje konečná limita

$$L = \lim_{n\to\infty} \ell(\sigma_n) = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\,\mathrm{d}t. \tag{10.2}$$

Číslo L nazýváme *délkou křivky* F.

Důkaz, náčrtek. Mějme rozdělení $\sigma = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ intervalu $\langle a, b\rangle$. Všimněme si, že $\ell(\sigma)$ lze upravit následovně:

$$\ell(\sigma) = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\left(\frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2 + \left(\frac{g(t_i) - g(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2} \cdot (t_i - t_{i-1}).$$

Použijeme-li Lagrangeovu větu o přírůstku funkce (viz větu č. 6.41) postupně na funkce f a g na intervalech $\langle t_i, t_{i-1}\rangle$, $i = 1, 2, \dots, N$, pak

$$\ell(\sigma) = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{f'(\alpha_i)^2 + g'(\beta_i)^2} \cdot \Delta_i,$$

kde $\alpha_i, \beta_i \in \langle t_i, t_{i-1}\rangle$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Kdyby $\alpha_i = \beta_i$, pak by se jednalo o integrální součet funkce $f(x) = \sqrt{f'(x)^2 + g'(x)^2}$ při dělení σ. Pro normální posloupnost dělení bychom pak v limitě dostali integrál z dané funkce.

Složitějšími manipulacemi lze ukázat, že při různých α_i a β_i se $\ell(\sigma)$ málo liší od integrálního součtu. □

Poznámka 10.9 (Délka grafu funkce)**:** Graf funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definované na intervalu $\langle a, b\rangle$ lze chápat jako křivku

$$F(x) = \big(x,\ f(x)\big), \quad x \in \langle a, b\rangle.$$

Je-li f diferencovatelná, pak pro **délku grafu funkce** f platí

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x. \tag{10.3}$$

Příklad 10.10: Vypočtěte délku úseku paraboly $y = x^2$ mezi body $(0, 0)$ a $(1, 1)$.

Jedná se o délku grafu funkce $f(x) = x^2$ definované na intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Takže pomocí per partes odvodíme

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\,\mathrm{d}x = \Big[x\sqrt{1 + 4x^2}\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{1 + 4x^2 - 1}{\sqrt{1 + 4x^2}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \sqrt{5} - L + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Po vyjádření L a substituci dostáváme

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}\,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln\Big(2 + \sqrt{5}\Big),$$

kde jsme dále použili již vypočtený neurčitý integrál (viz příklad 8.22)

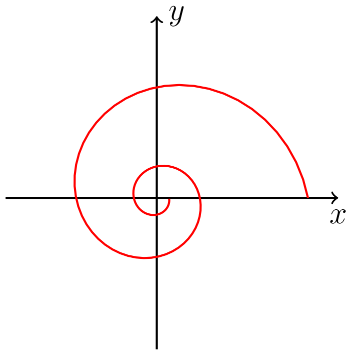
$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\,\mathrm{d}x = \ln\Big(x + \sqrt{x^2 + 1}\Big) + C.$$

Příklad 10.11: Vypočtěte délku křivky

$$F(t) = \Big(e^{-t}\cos(t),\ e^{-t}\sin(t)\Big), \quad t \in \langle 0, 4\pi\rangle.$$

Podle vzorce v rovnici (10.2) platí

$$\ell = \int_0^{4\pi} \Big[\big(-e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\sin(t)\big)^2 + \big(-e^{-t}\sin(t) + e^{-t}\cos(t)\big)^2\Big]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^{4\pi} \sqrt{2e^{-2t}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_0^{4\pi} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\Big[-e^{-t}\Big]_0^{4\pi} = \sqrt{2}\big(1 - e^{-4\pi}\big).$$



Obrázek 10.4: Spirála z příkladu 10.11.

10.2 Celková změna a okamžitá změna

Vraťme se ještě jednou k fyzikální interpretaci derivace a integrace. Uvažme funkci f diferencovatelnou na intervalu $\langle a, b\rangle$. Funkci f nyní interpretujeme jako jistou veličinu (třeba polohu) závisející na čase t. Derivaci $f'(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, interpretujeme jako **okamžitou změnu** veličiny f v čase t. **Celková změna** veličiny f mezi okamžiky $t = a$ a $t = b$ je s využitím Newtonovy formule dána

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pomocí integrace tedy můžeme ze znalosti okamžité změny veličiny zrekonstruovat její celkovou změnu na jistém intervalu!

Příklad 10.12: Označuje-li $x(t)$ polohu bodu pohybujícího se po přímce v čase $t \in \mathbb{R}$, pak $x'(t)$ představuje jeho okamžitou rychlost v čase t a změna polohy mezi časy 0 a 1 je

$$x(1) - x(0) = \int_0^1 x'(t)\mathrm{d}t.$$

Okamžitá změna rychlosti, tj. $x''(t)$, se nazývá zrychlení.

Příklad 10.13: Z mostu nad řekou upustíme kámen a za 5.6 sekundy uslyšíme jak dopadne do vody. Jaká je výška mostu[38]?

Označme vertikální polohu kamene v čase t jako $h(t)$, hladině odpovídá $h = 0$. Při volném pádu je kámen urychlován pouze tíhovou silou, tedy

$$h''(t) = -g$$

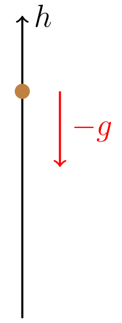
Počáteční polohou je neznámá výška mostu $h(0) = H > 0$ a počáteční rychlostí je $h'(0) = 0$. Rychlost v okamžiku t je tedy

$$h'(t) = h'(0) + \int_0^t h''(s)\,\mathrm{d}s = 0 + \big[-gs\big]_0^t = -gt.$$

Poloha kamene v čase t je pak

$$h(t) = h(0) + \int_0^t h'(s)\,\mathrm{d}s = H - g\Big[\frac{s^2}{2}\Big]_0^t = H - \frac{1}{2}gt^2.$$

[38]Podobné úlohy jste možná počítali ve fyzice. Všimněte si, že mi zde z fyzikálního rukávu vytáhneme pouze jeden jediný vzorec, resp. Newtonův pohybový zákon, a zbytek odvodíme z vlastností derivace a integrálu.



Obrázek 10.5: Ilustrace k příkladu 10.13.

Mezi okamžikem dopadu a okamžikem kdy dopad uslyšíme uplyne čas $\frac{H}{v_z}$, kde $v_z \approx 343.2m/s$ je rychlost zvuku. Dopadl-li kámen v čase T, pak $h(T) = 0$, tedy $T = \sqrt{\frac{2H}{g}}$. Celkem

$$T + \frac{H}{v_z} = 5.6 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{2H}{g}} + \frac{H}{v_z} = 5.6 \quad \Rightarrow \quad H + v_z\sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{H} - 5.6 \cdot v_z = 0$$

a proto $H = 133.2m$.

Příklad 10.14: Nechť v kanistru s kapacitou 25 litrů je 1 litr vody v okamžiku $t = 0$ a je poté napouštěna rychlostí $3t^2 - 2t + 3$ litrů vody za minutu. Voda z nádoby vytéká trhlinou rychlostí 2 litry za minutu. Kolik je v kanistru vody po třech minutách?

Označme objem vody v kanistru v čase t symbolem $V(t)$. Podle zadání je $V(0) = 1$ litr. Změna množství vody je

$$V'(t) = 3t^2 - 2t + 3 - 2 = 3t^2 - 2t + 1.$$

Takže množství vody v kanistru po třech minutách je

$$\begin{aligned} V(3) &= V(0) + \int_0^3 \big(3t^2 - 2t + 1\big)\mathrm{d}t = 1 + \Big[t^3 - t^2 + t\Big]_0^3 = \\ &= 1 + 27 - 9 + 3 = 22\,\text{litrů}. \end{aligned}$$

10.3 Úvod do Landauovy symboliky

K porovnávání asymptotického chování[39] členů posloupností se často využívá Landauova symbolika (též známá pod označením $\mathcal{O}$-notace; Edmund Landau, německý matematik, 1877 – 1938). S touto symbolikou se velmi často setkáte při vyjadřování časových a paměťových složitostí algoritmů[40].

V této krátké kapitole zavedeme dva základní asymptotické vztahy, vlnovku $\sim$ a velké $\mathcal{O}$. Přesná definice těchto symbolů je následující.

Definice 10.15: Nechť $(a_n)_{n=1}^\infty$ a $(b_n)_{n=1}^\infty$ jsou číselné posloupnosti. Řekneme, že

- $a_n \sim b_n$, právě když existuje posloupnost $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 1$ a $a_n = \alpha_n b_n$ pro každé $n > n_0$.

[39] Tj. pro velké indexy.

[40] Například hned v BI-PA1.

- $a_n = \mathcal{O}(b_n)$, právě když existuje konstanta $c > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $|a_n| \leq c|b_n|$ pro všechna $n > n_0$.

Jaký je význam těchto vztahů. Z definice by mělo být patrné, že jestliže $a_n \sim b_n$, pak se pro velká n obě posloupnosti „chovají stejně“, jsou tzv. asymptoticky ekvivalentní. Speciálně platí, že pokud $a_n \sim b_n$, pak $\lim a_n = \alpha$ právě když $\lim b_n = \alpha$.

Poznámka 10.16: Ačkoliv jsme relace nezavedli poznamenejme, že $\sim$ je skutečně relací ekvivalence na množině všech posloupností. To znamená, že

- každá posloupnost splňuje $a_n \sim a_n$,
- platí-li $a_n \sim b_n$ pak platí i $b_n \sim a_n$,
- platí-li $a_n \sim b_n$ a $b_n \sim c_n$ pak platí i $a_n \sim c_n$.

Tvrzení $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ naopak říká, že $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ neroste (v absolutní hodnotě) rychleji než $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ pro velká n. $\mathcal{O}$ je tedy značně *hrubší* než $\sim$.

Otázka 8: Pro dvě posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ dokažte implikaci: pokud $a_n \sim b_n$, potom $a_n = \mathcal{O}(b_n)$.

Pokud nerovnost $b_n > 0$ platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$ pak lze definici 10.15 přeformulovat do následujícího, často používaného, tvaru

$$a_n \sim b_n \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1, \tag{10.4}$$

$$a_n = \mathcal{O}(b_n) \quad \Leftrightarrow \quad \text{posloupnost } \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \text{ je omezená.} \tag{10.5}$$

Omezení se na kladné posloupnosti není pro naše účely příliš zásadní. Často narazíme na vyjadřování a porovnávání složitostí algoritmů, které jsou typicky popsány kladnými čísly (nemáme zápornou paměť nebo počet operací). Výše uvedené kritérium se tedy často hodí a necháváme ho čtenáři k rozmyšlení (tj. k dokázání).

V předchozí podkapitole jsme vypočetli limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0.$$

Posloupnost $(n^2/2^n)_{n=1}^{\infty}$ je tedy omezená. V notaci zavedené výše to znamená, že

$$n^2 = \mathcal{O}(2^n).$$

Demonstrujme dále výše zavedené pojmy a tvrzení na několika jednoduchých příkladech.

Příklad 10.17: Platí $50 \sin n = \mathcal{O}(1)$. Skutečně, stačí použít přímo definici $\mathcal{O}$. Dokonce pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|50 \sin n| \leq 50 \cdot 1.$$

Za konstantu v definici tedy lze vzít číslo 50.

Příklad 10.18: Platí $500n = \mathcal{O}(n^2)$. Opět použijeme definici $\mathcal{O}$, resp. alternativní formulaci (10.5). Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{500n}{n^2} = \frac{500}{n} \leq 500.$$

Posloupnost $(500n/n^2)_{n=1}^{\infty}$ je tedy omezená, jak jsme chtěli dokázat.

Příklad 10.19: Platí

$$\frac{n^2+n}{n^3+n^2+n+1} \sim \frac{1}{n}.$$

Použijme tvrzení 3.31. Snadno vypočteme

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+n}{n^3+n^2+n+1}}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2}{n^3+n^2+n+1} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}} = \frac{1+0}{1+0+0+0} = 1.\end{aligned}$$

A tvrzení tedy platí.

Příklad 10.20: Necháváme čtenáři k ověření, že dále například platí

$$\begin{aligned} n^2 + \frac{1}{2}n - 1 &\sim n^2, \\ 2n &= \mathcal{O}(n^2), \\ n \sin n &= \mathcal{O}(n^2), \\ 4n^2 &= \mathcal{O}(n^2), \\ 10n &= \mathcal{O}(n), \\ n &= \mathcal{O}(10n). \end{aligned}$$

Poznámka 10.21: Zápis $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ není příliš šťastný. Lepší je ho chápat ve smyslu $a_n \in \mathcal{O}(b_n)$. Historicky se však ujal a používá se. Například pokud $a_n = \mathcal{O}(n)$ a současně $b_n = \mathcal{O}(n)$, neplyne odtud, že $a_n = b_n$.

Poznámka 10.22: Všimněte si, že omezenost posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ lze nyní snadno vyjádřit formulkou $a_n = \mathcal{O}(1)$. Skutečně, dle definice existuje jistá konstanta $c > 0$ a index $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $|a_n| \leq c$ pro každé $n \geq n_0$. Odtud již snadno plyne omezenost posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

10.4 Odhadování asymptotického chování součtů

Vzpomeňme si na příklad 3.46, kde jsme v podstatě dokázali, že číselná řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

diverguje. Nezkoumali jsme ale přímo její posloupnost částečných součtů, jejíž členy jsou

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Tento částečný součet nelze vyjádřit explicitně, nelze ho sečíst a zbavit se symbolu sumy (na rozdíl od geometrické či aritmetické posloupnosti). Můžeme ale tento součet geometricky interpretovat jako jistou plochu a její obsah porovnat s obsahem plochy pod jistou křivkou, kterou umíme vypočítat pomocí integrálu. Konkrétně platí následující věta.

Věta 10.23: Nechť f je spojitá funkce na $\langle 1, +\infty)$ a $n \in \mathbb{N}$. Je-li f klesající, pak

$$f(n) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \le \sum_{k=1}^n f(k) \le f(1) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Je-li f rostoucí, pak

$$f(1) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \le \sum_{k=1}^n f(k) \le f(n) + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nerovnosti uvedené v předchozí větě je vhodné interpretovat geometricky. Geometrický význam integrálu již známe. Podobně součet $\sum_{k=1}^n a_k$ lze interpretovat jako obsah n obdélníků šířky 1 a výšky a_k, viz obrázek 10.6.

Důkaz pro klesající funkci. Buď $k \in \mathbb{N}$, pak pro každé $x \in \langle k,\ k+1\rangle$ platí $f(k+1) \le f(x) \le f(k)$.

Z věty o nerovnosti mezi integrály (věta 9.14) dostaneme nerovnost

$$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(k+1)\mathrm{d}x \le \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \le \int_k^{k+1} f(k)\mathrm{d}x = f(k).$$

Sečtením nerovností pro $k = 1, 2, \ldots, n-1$ dostaneme

$$\sum_{k=2}^n f(k) \le \int_1^n f(x)\mathrm{d}x \le \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Odtud

$$f(n) + \int_1^n f(x)\mathrm{d}x \le \sum_{k=1}^n f(k) \le f(1) + \int_1^n f(x)\mathrm{d}x.$$

□

Příklad 10.24: Pomocí odhadu pomocí integrálu (věta 10.23; tj. aniž bychom součet počítali explicitně) zjistěte rychlost růstu (víme, že má za limitu $+\infty$) posloupnosti

$$a_n = \sum_{k=1}^n k^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nyní $f(x) = x^2$ je rostoucí na $\langle 1, +\infty)$ a proto pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

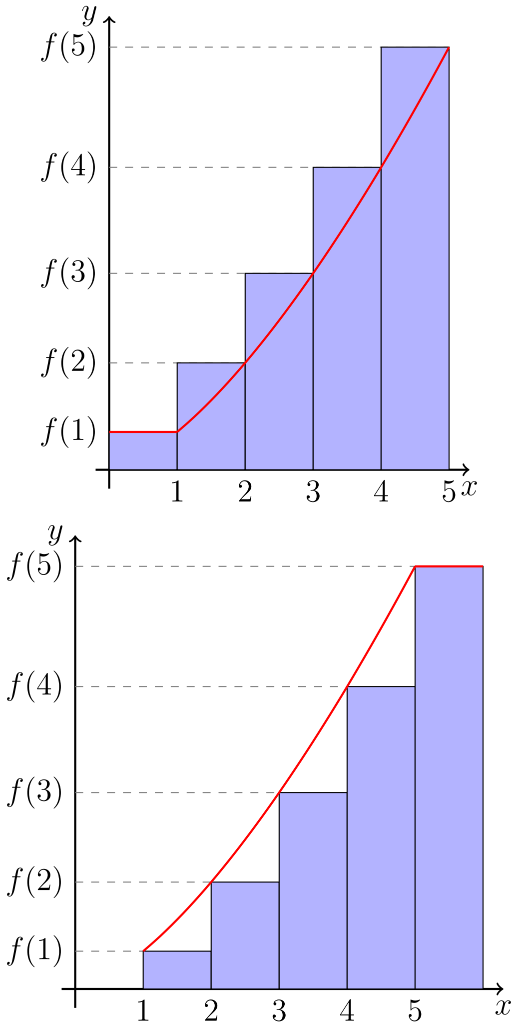
$$1 + \int_1^n x^2\,\mathrm{d}x \;\le\; \sum_{k=1}^n k^2 \;\le\; n^2 + \int_1^n x^2\mathrm{d}x.$$

Tudíž

$$\frac{1}{3}n^3 + \frac{2}{3} \le a_n \le \frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}.$$

Pro velká n je největším členem $\frac{1}{3}n^3$, přesněji, z věty o limitě sevřené posloupnosti plyne

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{3}n^3} = 1.$$



Obrázek 10.6:

Příklad 10.25: Odhadněte rychlost růstu posloupnosti $(n!)_{n=1}^{\infty}$ bez využití faktoriálu.

Využijme šikovné úpravy

$$\ln n! = \sum_{k=1}^{n} \ln k.$$

Funkce $f(x) = \ln x$ je rostoucí na $\langle 1, +\infty)$ a proto

$$0 + \int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \leq \ln(n) + \int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

Primitivní funkcí F k funkci f je funkce $F(x) = x\ln(x) - x + C$, tudíž

$$n\ln(n) - n + 1 \;\leq\; \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \;\leq\; \ln(n) + n\ln(n) - n + 1.$$

Odlogaritmováním (monotonie e^x) poslední nerovnosti pak dostáváme

$$e^{n\ln(n)-n+1} \leq n! \leq e^{\ln(n)+n\ln(n)-n+1}$$

a po úpravě

$$e \cdot \frac{n^n}{e^n} \le n! \le en \cdot \frac{n^n}{e^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Poznámka 10.26: Tento odhad už je pro většinu aplikací dostatečný. Lze ho však ještě dále zlepšovat. Všimněte, že na rozdíl od předchozího příkladu nám tento nyní nedává posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ takovou, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{b_n} = 1.$$

Získání takovéto posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ vyžaduje další práci. Pro úplnost uveďme, že tuto vlastnost má například (tzv. **Stirlingův vzorec**)

$$b_n = \sqrt{2\pi n} \cdot \frac{n^n}{e^n}$$

Nyní se vrátíme k příkladu, který jsme připomínali na začátku této podkapitoly.

Příklad 10.27: Již víme, že

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Odhadněme nyní *jak rychle* se $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ blíží k nekonečnu s rostoucím n.

Podle předchozí věty, pro $f(x) = \frac{1}{x}$ klesající na $\langle 1, +\infty)$ dostáváme odhad

$$\frac{1}{n} + \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Po integraci

$$\frac{1}{n} + \ln(n) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \le 1 + \ln(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Odtud

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n), \quad \text{nebo} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \mathcal{O}(n).$$

Opět tedy máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} = 1.$$

Dále si povšimněte, že

$$\frac{1}{n} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \le 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

O posloupnosti $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \right)$ lze ukázat, že je klesající a tudíž má limitu. Tato limita se označuje γ a nazývá se **Eulerova–Mascheroniova konstanta**. Její přibližná hodnota je $\gamma = 0.577218\ldots$

Z těchto příkladů je zřejmé, že věta 10.23 nám dává nástroj na odhadování částečných součtů některých číselných řad a lze ji proto využít k vyšetřování konvergence číselných řad.

Věta 10.28 (Integrální kritérium)**:** Buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ číselná řada s kladnými členy taková, že existuje spojitá a monotónní funkce definovaná na $\langle 1, +\infty)$ taková, že $f(n) = a_n$ pro každé n. Potom

- Pokud integrál $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, pak číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
- Pokud integrál $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverguje, pak číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz. Přímočaré použití věty 10.23. □

Příklad 10.29: Řada $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}$ konverguje pro $\alpha < -1$ a diverguje pro $\alpha \geq -1$.

Protože

$$\int_1^n x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}, \ \alpha \neq -1, \qquad \text{a} \qquad \int_1^n x^{-1}\mathrm{d}x = \ln n$$

platí

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^n x^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{-1-\alpha}, \qquad \alpha < -1,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^n x^{\alpha}\mathrm{d}x = +\infty, \qquad \alpha \geq -1.$$

10.5 Složitost třídících algoritmů

Jak složité je uspořádat zadanou n-tici objektů? Abychom na tuto otázku mohli odpovědět, tak si musíme ujasnit co přesně myslíme pod pojmem *uspořádat*, tj. pod symbolem $\leq$ a jak měřit složitost.

- *Vstup*: množina $\{x_1, \dots, x_n\}$ a úplné uspořádání $\leq$ mezi jejími prvky. Velikostí vstupu rozumíme jednoduše počet prvků vstupu.
- *Výstup*: uspořádaná n-tice $(x_{k_1}, \dots, x_{k_n})$, kde $(k_1, \dots, k_n)$ je permutace množiny $\{1, \dots, n\}$ a $x_{k_1} \leq \cdots \leq x_{k_n}$.
- *Elementární operace*: porovnání dvou prvků.

Uspořádání

Intuitivně si pod „uspořádáním“ představujeme vztah mezi objekty nějaké množiny. Formálně se jedná o relaci[41].

Definice 10.30 (Relace)**: Relací $\mathcal{R}$ na množině** M nazýváme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $M \times M$.

Jinak řečeno, zkoumaný vztah mezi objekty množiny M modelujeme udáním množiny $\mathcal{R} \subset M \times M$ takové, že (a, b) do $\mathcal{R}$ patří, právě když a a b jsou v požadovaném vztahu. Je-li $\mathcal{R}$ relace na množině M a $(a, b) \in \mathcal{R}$ pak často zkráceně píšeme $a\mathcal{R}b$.

[41] Což je jen cizí slovíčko pro vztah

Příklad 10.31: Mějme množinu $M = \mathbb{N}$ a na ní relaci $\mathcal{R}$ takovou, že $(a, b) \in \mathcal{R}$ právě když „a a b mají společný prvočíselný dělitel“. Potom například $(3, 5) \in \mathcal{R}$, tj. $3\mathcal{R}5$ platí, ale $(4, 8) \notin \mathcal{R}$, tj. $4\mathcal{R}8$ neplatí.

Definice 10.32 (Uspořádání)**:** Relaci $\mathcal{R}$ na množině M splňující

1. (reflexivita): pro každé $x \in M$ platí $x\mathcal{R}x$,
2. (antisymetrie): pro každé $x, y \in M$ platí, že pokud $x\mathcal{R}y$ a $y\mathcal{R}x$ pak i $x = y$,
3. (tranzitivita): pokud pro $x, y, z \in M$ platí $x\mathcal{R}y$ a $y\mathcal{R}z$, pak platí $x\mathcal{R}z$,

nazýváme **uspořádáním** na množině $\mathcal{R}$.

Relaci $\mathcal{R}$, jež je uspořádáním, většinou značíme symbolem $\leq$.

Příklad 10.33: Je-li M množina reálných čísel a $x\mathcal{R}y$ znamená „x je menší nebo rovno y“, pak $\mathcal{R}$ představuje uspořádání na množině $\mathbb{R}$. Toto uspořádání je tzv. **úplné**. Pro každé $x, y \in M$ platí $x\mathcal{R}y$ nebo $y\mathcal{R}x$.

Příklad 10.34: Uvažme množinu kladných přirozených čísel $M = \{1, 2, 3, \ldots\}$ a nechť $m\mathcal{R}n$ právě když m dělí n. Tato relace $\mathcal{R}$ na M je uspořádáním.

Ověřme potřebné vlastnosti

1. (reflexivita): Pro každé $n \in M$ platí, že n dělí n, tedy $n\mathcal{R}n$.
2. (antisimetrie): Uvažme $n, m \in M$ tak, že n dělí m a m dělí n, pak existují $k, \ell \in M$ splňující $m = k \cdot n$ a $n = \ell \cdot m$. Tudíž $m = (k\ell) \cdot m$, což může nastat pouze v případě $k = \ell = 1$. Proto $m = n$.
3. (tranzitivita): Podobně, pokud n dělí m a m dělí k, pak n dělí k.

Bublinkový algoritmus (Bubble sort)

Pro připomenutí uvádíme kompletní algoritmus, zřejmě čtenáři známý z předmětu BI-PA1.

```
procedure bubbleSort(A : array of length n)
 for k in n-1 to 1 do
  sorted = true
  for i in 1 to k do
   if A[i] > A[i+1] then
    swap( A[i], A[i+1] )
    sorted = false
   end if
  end for
  if sorted then return A
 end for
 return A
end procedure
```

Celkový počet porovnání může být nejhůře (pokud je na vstupu seznam v přesně opačném pořadí)

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\sum_{k=1}^{n-1} k=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Pokud je na vstupu již setříděný seznam, pak algoritmus provede $(n-1)$ porovnání (nejlepší varianta). Označíme-li počet porovnání při konkrétním vstupu o velikosti n jako T_n, můžeme tedy shrnout, že pro složitost Bubble sort platí

$$T_n=\mathcal{O}(n^2).$$

Quick sort

Nechť je opět dán vstup $\{x_1,\, x_2,\, \ldots, x_n\}$.

1. Vyber náhodně prvek ze seznamu (nazývaný *pivot*).
2. Prvky ze seznamu menší než pivot, dej do jednoho podseznamu a prvky větší do druhého podseznamu.
3. Dva kratší seznamy uspořádej podle velikosti.
4. Spoj uspořádaný první seznam, za něj dej pivota a připoj uspořádaný druhý seznam.

Algoritmus probíhá rekurentně. Uspořádání dvouprvkového seznamu je jednoduché. Označme nyní T_n *průměrný počet porovnání* pro uspořádání seznamu délky n pomocí algoritmu *Quick sort.*

Pokud je pivot r-tým prvkem seznamu (co do velikosti), pak

$$T_n=n-1+T_{r-1}+T_{n-r}, \quad \text{kde klademe } T_0=T_1=0.$$

Sečtením těchto vztahů pro $r=1,\,2,\,\ldots,\,n$:

$$\sum_{r=1}^{n} T_n=\sum_{r=1}^{n}(n-1)+\sum_{r=1}^{n}\big(T_{r-1}+T_{n-r}\big) \quad\Longrightarrow\quad nT_n=n(n-1)+2\sum_{r=1}^{n-1}T_r.$$

Poslední rovnost vyjádřeme pro k a pro $k-1$ a oba vztahy odečtěme (zbavíme se tím součtu vpravo):

$$kT_k=k(k-1)+2\sum_{r=1}^{k-1}T_r,$$

$$(k-1)T_{k-1}=(k-1)(k-2)+2\sum_{r=1}^{k-2}T_r,$$

$$\text{odečtením: } kT_k-(k-1)T_{k-1}=k(k-1)-(k-1)(k-2)+2T_{k-1}.$$

Odvodili jsme tedy vztah

$$kT_k-(k+1)T_{k-1}=2k-2.$$

Vydělením číslem $k(k+1)$ dostáváme

$$\frac{T_k}{k+1}-\frac{T_{k-1}}{k}=\frac{2k-2}{k(k+1)}.$$

Konečně, sečtením těchto rovností pro $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned} \frac{T_n}{n+1} &= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{1}{k} \leq 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \\ &\leq 2\left(1 + \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right) = 2\big(1 + \ln(n)\big). \end{aligned}$$

Uzavíráme

$$T_n = \mathcal{O}\big(n\,\ln(n)\big).$$

11 Přehled použitého značení

Níže uvedené značení je kompatibilní s přednáškami a cvičeními BI-ZMA.

Symbol	Význam
$:=$	definice, symbol na levé straně je definován výrazem na straně pravé
$\approx$	přibližné vyjádření na konečný počet desetinných míst
$\wedge$	konjunkce
$\vee$	disjunkce
$\Rightarrow$	implikace
$\Leftrightarrow$	ekvivalence
$\forall$	velký (obecný) kvantifikátor
$\exists$	existenční kvantifikátor
$\{a, b, c\}$	množina obsahující prvky a, b a c
$\{x \in M \mid P(x)\}$	množina všech x z M splňující $P(x)$
$x \in M,\ x \notin M$	prvek x náleží/nenáleží množině M
$A \subset B$	A je podmnožinou B (každá množina je podmnožinou sebe sama)
$\emptyset$	prázdná množina
$A \cup B$	sjednocení množin A a B
$A \cap B$	průnik množin A a B
$A \smallsetminus B$	rozdíl množin A a B
$A \times B$	kartézský součin množiny A a B
$\mathcal{P}(A)$	množina všech podmnožin množiny A
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$	množina přirozených čísel s nulou
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{Q}$	množina racionálních čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\overline{\mathbb{R}}$	rozšířená množina reálných čísel

Symbol	Význam
$\mathbb{R}_0^+$	nezáporná reálná čísla, tj. $\langle 0, +\infty)$
$\mathbb{R}^+$	kladná reálná čísla, tj. $(0, +\infty)$
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
$n!$	faktoriál čísla $n \in \mathbb{N}_0$
$\binom{n}{k}$	kombinační číslo n nad k
$\lfloor x \rfloor$	dolní celá část reálného x
$\lceil x \rceil$	horní celá část reálného x
(a, b)	otevřený interval, nebo uspořádaná dvojice, podle kontextu
$\langle a, b \rangle$	uzavřený interval
$H_a(\varepsilon)$	ε-okolí bodu a
$H_a^+(\varepsilon),\ H_a^-(\varepsilon)$	pravé, levé ε-okolí bodu a
$H_{+\infty}(\alpha),\ H_{-\infty}(\alpha)$	α-okolí bodu $+\infty$, $-\infty$
$f : A \to B$	zobrazení množiny A do množiny B
D_f	definiční obor zobrazení f
H_f	obor hodnot zobrazení f
$f\big\|_M$	zúžení zobrazení f na množinu M
$f(M)$	obraz množiny M při zobrazení f
$f^{-1}(M)$, $f_{-1}(M)$	vzor množiny M při zobrazení f
$f \circ g$	složené zobrazení
id_A	identické zobrazení na množině A
f^{-1}	inverzní zobrazení
$(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$	reálná číselná posloupnost
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	limita posloupnosti
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$	číselná řada
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	limita funkce f v bodě a
$\lim\limits_{x\to a_+} f(x)$	limita funkce f v bodě a zprava
$\lim\limits_{x\to a_-} f(x)$	limita funkce f v bodě a zleva
$f'(a)$	derivace funkce f v bodě a
$T_{n,a}$	Taylorův polynom stupně n se středem v bodě a

Symbol	Význam
$R_{n,a}$	zbytek po n-tém Taylorově polynomu
$\omega_{n,a}$	Peanův tvar zbytku
$\int f$, $\int f(x)\mathrm{d}x$	neurčitý integrál funkce f
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	Riemannův určitý integrál funkce f na intervalu (a, b)
$\mathcal{I}(\sigma, f)$	integrální součet funkce f při rozdělení σ
$a_n \sim b_n$	asymptoticky ekvivalentní posloupnosti
$\mathcal{O}(a_n)$	posloupnost s horní asymptotickou mezí a_n

Odpovědi na některé otázky

1 Přirozená čísla i celá čísla lze sčítat a násobit, jsou splněny asociativní, distributivní i komutativní zákony, ale v přirozených číslech neexistuje 0 (neutrální prvek vůči sčítání) a v celých číslech k některým nenulovým prvkům neexistují inverze vůči násobení (např. k 3). Tyto množiny spolu s uvedenými operacemi proto tělesa netvoří.

2 Připomeňme definici ostrého uspořádání: pro dvě $a, b \in \mathbb{Q}$ platí $a < b$ právě když $0 < b - a$. Máme-li $a, b, c \in \mathbb{Q}$ a platí $a < b$ pak podmínka $a + c < b + c$ je ekvivalentní podmínce $(b + c) - (a + c) > 0$. S využitím distributivního, asociativního a komutativního zákona a předpokladu $a < b$ dostáváme $(b + c) - (a + c) = (b + c) + (-a - c) = (b - a) + (c - c) = b - a > 0$.

3 a. omezená, b. omezená, c. neomezená, d. neomezená.

4 Platí $f \neq g$, $g = h$ a $f \neq h$.

5 Jedná se o stejný rozdíl jako mezi funkční hodnotou a funkcí. Symbol a_n označuje n-tý člen posloupnosti, kdežto symbol $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ celou posloupnosti (zobrazení $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$).

6 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je konstantní, tedy současně rostoucí i klesající, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je klesající, $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ není ani jednoho typu z definice č. 3.3.

7 a. je rostoucí, b. nemusí být rostoucí, např. $a_n = 0$, $b_n = n$, c. nemusí být rostoucí, např. $a_n = -1$, $b_n = n$, d. nemusí být ani dobře definována, natož rostoucí.

8 Pokud $a_n \sim b_n$, pak dle definice existuje posloupnost $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1$ a $a_n = \alpha_n b_n$ pro všechna n větší než n_0. Každá konvergentní posloupnost je omezená a proto existuje konstanta c splňující $|\alpha_n| < c$ pro všechna n. Proto pro všechna n větší než n_0 platí $|a_n| = |\alpha_n||b_n| < c|b_n$.

Literatura

[1] Jiří Kopáček. *Matematická analýza nejen pro fyziky I.* matfyzpress, 2004.

[2] Jiří Kopáček. *Matematická analýza nejen pro fyziky II.* matfyzpress, 2004.

[3] Michael Oberguggenberger and Alexander Ostermann. *Analysis for Computer Scientists.* Springer, 2011.

[4] Richard A. Silverman. *Essential calculus with applications.* Dover, 1989.

[5] Steven Strogatz. *Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe.* Houghton Mifflin Harcourt, 2019.

Rejstřík