NI-MPI cvičení 0 handout 13. února 2025
Problémy, návrhy apod. hlaste v GitLabu.
Verze souboru: 2024-09-23 09:56.

Obsah

Cílem tohoto cvičení je připomenout

- pojem funkce, derivace a polynom – budete tyto pojmy potřebovat později, zejména při studiu funkcí více proměnných,
- rozšířený Euklidův algoritmus (EEA).
- Eulerovu funkci.

Pokud byste potřebovali k procvičení více příkladů, projděte si materiály k bakalářským předmětům BI-MA1, BI-MA2 a BI-DML.
Následující příklady byly vybrány tak, abyste si mohli vytvořit představu o tom, jaké se předpokládají znalosti u studentů tohoto předmětu.

1 Funkce a derivace funkce

Cvičení 1.1 Buď $f(x) = \sin x$ a $g(x) = (x-3)^3$. Čemu se rovnají následující funkce? Čemu se rovnají jejich derivace? ?

(a) $(f \circ g)(x)$,

(b) $(g \circ f)(x)$,

(c) $(f \circ g^{-1})(x)$,

(d) $(g^{-1} \circ f)(x)$.

Značení 1.1. *Značení $f \circ g$ používáme tak, že g je vnitřní funkce:*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

pro všechna x z definičního oboru funkce $f \circ g$.

Cvičení 1.2 Zderivujte následující funkce (a je reálný parametr): ?

(a) $(x^4 + 3x^3)x^8$,

(b) e^{2ax},

(c) $\dfrac{x+3a}{x^2}$,

(d) $\ln\left((x+4)^{15a}\right)$,

(e) $\sin^2 x + \cos^2 x$,

(f) xe^{2x},

(g) $e^{x^{2a}}$,

(h) x^x.

Cvičení 1.3 Buď $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ polynom n-tého stupně (tj. $a_n \neq 0$), kde $n \in \mathbb{N}$. Čemu se rovná jeho n-tá derivace $p^{(n)}$?

Značení 1.2. *Značení $\mathbb{N}$ je označení pro nezáporná celá čísla, tedy přirozená čísla s nulou.*

Cvičení 1.4 S využitím faktu, že derivace funkce v bodě x se rovná směrnici tečny grafu této funkce v bodě x, najděte body a, kde

(a) tečna grafu $f(x) = x^3$ svírá s osou x úhel $\pi/3$,

(b) tečna grafu $f(x) = (x^2 - x)^{\frac{1}{3}}$ svírá s osou x úhel $\pi/2$.

Cvičení 1.5 Najděte rovnici tečny

(a) funkce $x^3 + x$ v bodě $x = 1$,

(b) funkce $\sin x$ v bodě $x = \pi/4$,

(c) funkce $(x-1)^3 - 1$ v bodě průsečíku grafu této funkce s přímkou $y = 2x + 1$.

Cvičení 1.6 Najděte směrnici tečen kružnice se středem v bodě $[2, 1]$ a s poloměrem 2 v bodech průniku této kružnice s přímkou

(a) $y = x$,

(b) $y = x + 1$.

Cvičení 1.7 Představte si, že jedete přes kopec, který má profil zadaný funkcí $f(x) = 5e^{-(x-2)^2}$. Kde to bude nejvíce z kopce a nejvíce do kopce?

Cvičení 1.8 Představte si, že jedete po krajině, která má profil zadaný funkcí $f(x) = \arctan x + \frac{x}{10}$. Jste sice zdatný cyklista resp. zdatná cyklistka, ale více jak 100% stoupání už nezvládnete. Kam nejdále můžete dojet, za předpokladu, že máte nekonečnou výdrž, pokud vyrazíte z Vašeho domu umístěného v místě $x = 10$? Změní se nějak Váš dojezd, pokud si dáte podmínku, že chcete být schopni se vrátit domů?

Cvičení 1.9 Najděte funkci $f(x)$ tak, aby platila následující rovnice:

(a) $f'(x) = 2f(x)$,

(b) $f''(x) = -3f(x)$.

2 Polynomy

Cvičení 2.1 Vydělte polynom $p(x)$ polynomem $q(x)$, pokud

(a) $p(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ a $q(x) = x + 1$,

(b) $p(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ a $q(x) = x + 2$,

(c) $p(x) = x^4 + 3x + 2$ a $q(x) = x^2 + x + 1$,

(d) $p(x) = x^5 + 1$ a $q(x) = x + 1$.

(e) $p(x) = x^5 + 1$ a $q(x) = x - 1$.

Cvičení 2.2 Najděte všechny kořeny polynomu $p(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$, jestliže víte, že jedním z kořenů je -1.

Cvičení 2.3 Najděte všechny kořeny polynomu $p(x) = x^3 - 9x^2 - 16x + 60$, jestliže víte, že jedním z kořenů je 2.

3 Rozšířený Euklidův algoritmus

V této části cvičení se také procvičíme ve vlastnostech největšího společného dělitele (gcd).

Cvičení 3.1 Nechť $a \in \mathbb{Z}$, kolik je $\gcd(a, 0)$?

Cvičení 3.2 Dokažte následující tvrzení.

(a) Pro $m \neq 0$ takové, že $m|a$ a $m|b$, platí $\gcd(a/m, b/m) = \gcd(a, b)/m$.

(b) Pro a nesoudělné s b platí $\gcd(ab, c) = \gcd(a, c) \cdot \gcd(b, c)$.

Cvičení 3.3 Najděte pomocí rozšířeného Euklidova algoritmu největší společný dělitel a Bézoutovy koeficienty čísel

(a) 124 a 523;

(b) 321 a 225.

Cvičení 3.4 — *Stamp problem.* Princezna chce poslat drakovi pohled ze země za devatero horami. Tam mají k dispozici jenom známky v hodnotě 47 zlatých a 22 zlatých. Za každou další horu, kterou listonoš musí s pohledem překonat, se platí 3-krát tolik, co za předchozí horu (odpovídá rychlosti ošoupávání si podrážek s daným zatížením), a první hora stojí 2 zlaté. Na pohledu ovšem musí být cena přesně, jinak pošta pohled odmítne doručit. Poraďte princezně, kolik kterých známek má použít.

Nápověda: začněte od Bézoutovy rovnosti.

4 Eulerova funkce

Cvičení 4.1 Pro Eulerovu funkci φ a dvě nesoudělná kladná přirozená čísla m a n platí $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$. S využitím tohoto faktu najděte vzorec pro výpočet $\varphi(n)$ čísla n s prvočíselným rozkladem $n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i}$.

Cvičení 4.2 Spočtěte

(a) $\varphi(114)$,

(b) $\varphi(432)$.

Řešení

Řešení Cvičení 1.1: (a) $\sin(x-3)^3$, derivace $3(x-3)^2\cos(x-3)^3$ (b) $(\sin x - 3)^3$, derivace $3(\sin x-3)^2\cos x$ (c) $\sin\left(\sqrt[3]{x}+3\right)$, derivace $\cos\left(\sqrt[3]{x}+3\right)\frac{1}{3}x^{-2/3}$ (d) $\sqrt[3]{\sin x}+3$, derivace $\frac{1}{3}(\sin x)^{-2/3}\cos x$

Řešení Cvičení 1.2: (a) $12x^{11}+33x^{10}$, (b) $2ae^{2ax}$, (c) $-\frac{1}{x^2}-\frac{6a}{x^3}$, (d) $\frac{15a}{x+4}$, (e) 0, (f) $(1+2x)e^{2x}$, (g) $2ax^{2a-1}e^{x^{2a}}$, (h) $(1+\ln x)x^x$

Řešení Cvičení 1.3: $a_n n!$

Řešení Cvičení 1.4: (a) $a = \pm 3^{-1/4}$, (b) $a \in \{0, 1\}$

Řešení Cvičení 1.7: $x = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ km.

Řešení Cvičení 1.9: (a) např. e^{2x}, (b) např. $\cos(\sqrt{3}\cdot x) + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}\cdot x)$

Řešení Cvičení 2.2: kořeny jsou -3,-1,1

Řešení Cvičení 2.3: kořeny jsou -3,2,10

Řešení Cvičení 3.1: $\gcd(a,0) = |a|$ až na $\gcd(0,0)$, což není definováno. (V některých zdrojích naleznete, že $\gcd(0,0) = 0$. Tento rozdíl je způsoben lehce odlišnou definicí největšího společného dělitele.)

Řešení Cvičení 3.3: $1 = 23 \cdot 523 - 97 \cdot 124$; $-7 \cdot 321 + 10 \cdot 225 = 3$

Řešení Cvičení 3.4: Obecně lze nakombinovat jakoukoliv cenu větší než nebo rovnou $(a-1)(b-1)$, kde a a b jsou nesoudělné ceny známek. (Důkaz tohoto faktu není rovnou vidět, je třeba trošku zapracovat...)

Spočítáme cenu v našem případě $2\frac{1-3^9}{1-3} = 2\frac{19683-1}{2} = 19682$.

Spočítáme Bézoutovy koeficienty: $-7 \cdot 47 + 15 \cdot 22 = 1$.

Tedy $19682 \cdot (-7) \cdot 47 + 19682 \cdot 15 \cdot 22 = 19682$ a rovností $22 \cdot 47 - 47 \cdot 22 = 0$ vyrobíme kladné koeficienty, aby princezna nemusela lepit na pohled dlužní úpisy na známky.

Hledáme k takové, aby $19682 \cdot (-7) + k \cdot 22 > 0$.

Najdeme $k = 6263$ a máme $19682 \cdot (-7) + 22 \cdot 6263 = 12$ a $19682 \cdot 15 - 47 \cdot 6263 = 869$, tedy $12 \cdot 47 + 869 \cdot 22 = 19682$ a drak se může těšit na psaníčko!

Řešení Cvičení 4.1: Jelikož čísla $p_i^{k_i}$ v produktu jsou navzájem nesoudělná, platí

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{m} \varphi(p_i^{k_i}).$$

Je snadné ověřit, že pro lib. prvočíslo p a přirozené kladné k platí $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$, neboť soudělná čísla s p^k jsou pouze násobky p a těch je mezi čísly od 1 do p^k právě $p^k/p = p^{k-1}$. Z tohoto již pak snadno plyne, že

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Řešení Cvičení 4.2: (a) 36, (b) 144

ChangeLog

Verze	Datum	Autor	Log
1.01	23.09.24	ŠS	Úpravy textu.
1.0	17.09.19	ŠS	Výchozí verze.