NI-MPI cvičení 0

Rozczvička

FIT ČVUT

Autoři: Karel Klouda, Tomáš Kalvoda, Jan Spěvák, Štěpán Starosta
Problémy, návrhy apod. hlaste v GitLabu.

Verze souboru: 2024-09-23 09:56.

Obsah

Poznámka

Cílem tohoto cvičení je připomenout

- pojem funkce, derivace a polynom – budete tyto pojmy potřebovat později, zejména při studiu funkcí více proměnných,
- rozšířený Euklidův algoritmus (EEA).
- Eulerovu funkci.

Pokud byste potřebovali k procvičení více příkladů, projděte si materiály k bakalářským předmětům BI-MA1, BI-MA2 a BI-DML.
Následující příklady byly vybrány tak, abyste si mohli vytvořit představu o tom, jaké se předpokládají znalosti u studentů tohoto předmětu.

Cvičení 1.1

Buď $f(x) = \sin x$ *a* $g(x) = (x-3)^3$. *Čemu se rovnají následující funkce? Čemu se rovnají jejich derivace?*

(a) $(f \circ g)(x)$,

(b) $(g \circ f)(x)$,

(c) $(f \circ g^{-1})(x)$,

(d) $(g^{-1} \circ f)(x)$.

Značení 1.1

Značení $f \circ g$ používáme tak, že g je vnitřní funkce:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

pro všechna x z definičního oboru funkce $f \circ g$.

Cvičení 1.2

Zderivujte následující funkce (a je reálný parametr):

(a) $(x^4 + 3x^3)x^8$,

(b) e^{2ax},

(c) $\dfrac{x + 3a}{x^2}$,

(d) $\ln\left((x + 4)^{15a}\right)$,

(e) $\sin^2 x + \cos^2 x$,

(f) xe^{2x},

(g) $e^{x^{2a}}$,

(h) x^x.

Cvičení 1.3

Buď $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *polynom* n*-tého stupně (tj.* $a_n \neq 0$*), kde* $n \in \mathbb{N}$*. Čemu se rovná jeho* n*-tá derivace* $p^{(n)}$*?*

Značení 1.2

Značení $\mathbb{N}$ *je označení pro nezáporná celá čísla, tedy přirozená čísla s nulou.*

Cvičení 1.4

S využitím faktu, že derivace funkce v bodě x *se rovná směrnici tečny grafu této funkce v bodě* x*, najděte body* a*, kde*

(a) *tečna grafu* $f(x) = x^3$ *svírá s osou* x *úhel* $\pi/3$*,*

(b) *tečna grafu* $f(x) = (x^2 - x)^{\frac{1}{3}}$ *svírá s osou* x *úhel* $\pi/2$*.*

Cvičení 1.5

Najděte rovnici tečny

(a) *funkce* $x^3 + x$ *v bodě* $x = 1$,

(b) *funkce* $\sin x$ *v bodě* $x = \pi/4$,

(c) *funkce* $(x-1)^3 - 1$ *v bodě průsečíku grafu této funkce s přímkou* $y = 2x + 1$.

Cvičení 1.6

Najděte směrnici tečen kružnice se středem v bodě $[2, 1]$ *a s poloměrem* 2 *v bodech průniku této kružnice s přímkou*

(a) $y = x$,

(b) $y = x + 1$.

Cvičení 1.7

Představte si, že jedete přes kopec, který má profil zadaný funkcí $f(x) = 5e^{-(x-2)^2}$. Kde to bude nejvíce z kopce a nejvíce do kopce?

Cvičení 1.8

Představte si, že jedete po krajině, která má profil zadaný funkcí $f(x) = \arctan x + \frac{x}{10}$*. Jste sice zdatný cyklista resp. zdatná cyklistka, ale více jak 100% stoupání už nezvládnete. Kam nejdále můžete dojet, za předpokladu, že máte nekonečnou výdrž, pokud vyrazíte z Vašeho domu umístěného v místě* $x = 10$*? Změní se nějak Váš dojezd, pokud si dáte podmínku, že chcete být schopni se vrátit domů?*

Cvičení 1.9

Najděte funkci $f(x)$ tak, aby platila následující rovnice:

(a) $f'(x) = 2f(x)$,

(b) $f''(x) = -3f(x)$.

Poznámka

Právě jste vyřešili diferenciální rovnici. Ta druhá je pohybová rovnice tělesa (o hmotnosti 1 kg) připevněného k pružině o tuhosti $3\ \mathsf{kg} \cdot \mathsf{s}^{-2}$.

2. Polynomy

Cvičení 2.1

Vydělte polynom $p(x)$ *polynomem* $q(x)$, *pokud*

(a) $p(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ a $q(x) = x + 1$,

(b) $p(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ a $q(x) = x + 2$,

(c) $p(x) = x^4 + 3x + 2$ a $q(x) = x^2 + x + 1$,

(d) $p(x) = x^5 + 1$ a $q(x) = x + 1$.

(e) $p(x) = x^5 + 1$ a $q(x) = x - 1$.

Cvičení 2.2

Najděte všechny kořeny polynomu $p(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$*, jestliže víte, že jedním z kořenů je* -1.

Cvičení 2.3

Najděte všechny kořeny polynomu $p(x) = x^3 - 9x^2 - 16x + 60$, *jestliže víte, že jedním z kořenů je* 2.

3. Rozšířený Euklidův algoritmus

Poznámka

V této části cvičení se také procvičíme ve vlastnostech největšího společného dělitele ($\gcd$).

Cvičení 3.1

Nechť $a \in \mathbb{Z}$, *kolik je* $\gcd(a, 0)$*?*

Cvičení 3.2

Dokažte následující tvrzení.

(a) *Pro* $m \neq 0$ *takové, že* $m|a$ *a* $m|b$, *platí* $\gcd(a/m, b/m) = \gcd(a, b)/m$.

(b) *Pro* a *nesoudělné s* b *platí* $\gcd(ab, c) = \gcd(a, c) \cdot \gcd(b, c)$.

Na ruční hledání Bézoutových koeficientů (i GCD) pomocí EEA lze použít tabulku, jednu její verzi lze najít např. na této stránce.

Cvičení 3.3

Najděte pomocí rozšířeného Euklidova algoritmu největší společný dělitel a Bézoutovy koeficienty čísel

(a) 124 *a* 523;

(b) 321 *a* 225.

Cvičení 3.4 (*Stamp problem*)

Princezna chce poslat drakovi pohled ze země za devatero horami. Tam mají k dispozici jenom známky v hodnotě 47 *zlatých a* 22 *zlatých. Za každou další horu, kterou listonoš musí s pohledem překonat, se platí* 3*-krát tolik, co za předchozí horu (odpovídá rychlosti ošoupávání si podrážek s daným zatížením), a první hora stojí* 2 *zlaté. Na pohledu ovšem musí být cena přesně, jinak pošta pohled odmítne doručit. Poraďte princezně, kolik kterých známek má použít.*
Nápověda: začněte od Bézoutovy rovnosti.

4. Eulerova funkce

Cvičení 4.1

Pro Eulerovu funkci φ *a dvě nesoudělná kladná přirozená čísla* m *a* n *platí* $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$. *S využitím tohoto faktu najděte vzorec pro výpočet* $\varphi(n)$ *čísla* n *s prvočíselným rozkladem* $n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i}$.

Cvičení 4.2

Spočtěte

(a) $\varphi(114)$,

(b) $\varphi(432)$.