

NI-MPI cvičení 0

Rozcvička

FIT ČVUT

Autoři: Karel Klouda, Tomáš Kalvoda, Jan Spěvák, Štěpán Starosta
Problémy, návrhy apod. hlaste v [GitLabu](#).

Verze souboru: 2024-09-23 09:56.

Obsah

1. Funkce a derivace funkce
2. Polynomy
3. Rozšířený Euklidův algoritmus
4. Eulerova funkce

Poznámka

Cílem tohoto cvičení je připomenout

- ▶ pojem funkce, derivace a polynom – budete tyto pojmy potřebovat později, zejména při studiu funkcí více proměnných,
- ▶ rozšířený Euklidův algoritmus (EEA).
- ▶ Eulerovu funkci.

Pokud byste potřebovali k procvičení více příkladů, projděte si materiály k bakalářským předmětům BI-MA1, BI-MA2 a BI-DML.

Následující příklady byly vybrány tak, abyste si mohli vytvořit představu o tom, jaké se předpokládají znalosti u studentů tohoto předmětu.

1. Funkce a derivace funkce

Cvičení 1.1

Bud' $f(x) = \sin x$ a $g(x) = (x - 3)^3$. Čemu se rovnají následující funkce? Čemu se rovnají jejich derivace?

- (a) $(f \circ g)(x)$,
- (b) $(g \circ f)(x)$,
- (c) $(f \circ g^{-1})(x)$,
- (d) $(g^{-1} \circ f)(x)$.

Značení 1.1

Značení $f \circ g$ používáme tak, že g je vnitřní funkce:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

pro všechna x z definičního oboru funkce $f \circ g$.

Cvičení 1.2

Zderivujte následující funkce (a je reálný parametr):

(a) $(x^4 + 3x^3)x^8$,

(b) e^{2ax} ,

(c) $\frac{x + 3a}{x^2}$,

(d) $\ln((x + 4)^{15a})$,

(e) $\sin^2 x + \cos^2 x$,

(f) xe^{2x} ,

(g) $e^{x^{2a}}$,

(h) x^x .

Cvičení 1.3

Bud' $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ polynom n -tého stupně (tj. $a_n \neq 0$), kde $n \in \mathbb{N}$. Čemu se rovná jeho n -tá derivace $p^{(n)}$?

Značení 1.2

Značení \mathbb{N} je označení pro nezáporná celá čísla, tedy přirozená čísla s nulou.

Cvičení 1.4

S využitím faktu, že derivace funkce v bodě x se rovná směrnici tečny grafu této funkce v bodě x , najděte body a , kde

- (a) tečna grafu $f(x) = x^3$ svírá s osou x úhel $\pi/3$,
- (b) tečna grafu $f(x) = (x^2 - x)^{\frac{1}{3}}$ svírá s osou x úhel $\pi/2$.

Cvičení 1.5

Najděte rovnici tečny

- (a) funkce $x^3 + x$ v bodě $x = 1$,
- (b) funkce $\sin x$ v bodě $x = \pi/4$,
- (c) funkce $(x - 1)^3 - 1$ v bodě průsečíku grafu této funkce s přímkou $y = 2x + 1$.

Cvičení 1.6

Najděte směrnici tečen kružnice se středem v bodě $[2, 1]$ a s poloměrem 2 v bodech průniku této kružnice s přímkou

- (a) $y = x$,
- (b) $y = x + 1$.

Cvičení 1.7

Představte si, že jedete přes kopec, který má profil zadaný funkcí $f(x) = 5e^{-(x-2)^2}$. Kde to bude nejvíce z kopce a nejvíce do kopce?

Cvičení 1.8

Představte si, že jedete po krajině, která má profil zadaný funkcí $f(x) = \arctan x + \frac{x}{10}$. Jste sice zdatný cyklista resp. zdatná cyklistka, ale více jak 100% stoupání už nezvládnete. Kam nejdále můžete dojet, za předpokladu, že máte nekonečnou výdrž, pokud vyrazíte z Vašeho domu umístěného v místě $x = 10$? Změní se nějak Váš dojezd, pokud si dáte podmínku, že chcete být schopni se vrátit domů?

Cvičení 1.9

Najděte funkci $f(x)$ tak, aby platila následující rovnice:

(a) $f'(x) = 2f(x)$,

(b) $f''(x) = -3f(x)$.

2. Polynomy

Cvičení 2.1

Vydělte polynom $p(x)$ polynomem $q(x)$, pokud

(a) $p(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ a $q(x) = x + 1$,

(b) $p(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ a $q(x) = x + 2$,

(c) $p(x) = x^4 + 3x + 2$ a $q(x) = x^2 + x + 1$,

(d) $p(x) = x^5 + 1$ a $q(x) = x + 1$.

(e) $p(x) = x^5 + 1$ a $q(x) = x - 1$.

Cvičení 2.2

Najděte všechny kořeny polynomu $p(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$, jestliže víte, že jedním z kořenů je -1 .

Cvičení 2.3

Najděte všechny kořeny polynomu $p(x) = x^3 - 9x^2 - 16x + 60$, jestliže víte, že jedním z kořenů je 2 .

3. Rozšířený Euklidův algoritmus

Poznámka

V této části cvičení se také procvičíme ve vlastnostech největšího společného dělitele (gcd).

Cvičení 3.1

Nechť $a \in \mathbb{Z}$, kolik je $\gcd(a, 0)$?

Cvičení 3.2

Dokažte následující tvrzení.

- (a) *Pro $m \neq 0$ takové, že $m|a$ a $m|b$, platí $\gcd(a/m, b/m) = \gcd(a, b)/m$.*
- (b) *Pro a nesoudělné s b platí $\gcd(ab, c) = \gcd(a, c) \cdot \gcd(b, c)$.*

Cvičení 3.3

Najděte pomocí rozšířeného Euklidova algoritmu největší společný dělitel a Bézoutovy koeficienty čísel

- (a) 124 a 523;
- (b) 321 a 225.

Cvičení 3.4 (*Stamp problem*)

Princezna chce poslat drakovi pohled ze země za devatero horami. Tam mají k dispozici jenom známky v hodnotě 47 zlatých a 22 zlatých. Za každou další horu, kterou listonoš musí s pohledem překonat, se platí 3-krát tolik, co za předchozí horu (odpovídá rychlosti ošoupávání si podrážek s daným zatížením), a první hora stojí 2 zlaté. Na pohledu ovšem musí být cena přesně, jinak pošta pohled odmítne doručit. Poradte princezně, kolik kterých známek má použít.

Nápověda: začněte od Bézoutovy rovnosti.

4. Eulerova funkce

Cvičení 4.1

Pro Eulerovu funkci φ a dvě nesoudělná kladná přirozená čísla m a n platí $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$. S využitím tohoto faktu najděte vzorec pro výpočet $\varphi(n)$ čísla n s prvočíselným rozkladem $n = \prod_{i=1}^m p_i^{k_i}$.

Cvičení 4.2

Spočtěte

- (a) $\varphi(114)$,
- (b) $\varphi(432)$.