NI-MPI cvičení 6 handout 13. února 2025
Problémy, návrhy apod. hlaste v GitLabu.
Verze souboru: 2021-11-08 14:03.

Obsah

Co byste si měli z tohoto cvičení odnést:

- jak poznat, že je něco grupoid / pologrupa / monoid / grupa,
- najít a poznat podgrupy různých grup.

A co byste se měli doučit, pokud to ještě/už neumíte:

- stačí znát z přednášky definice a základní vlastnosti výše zmíněných pojmů.

16 Grupoid, monoid, pologrupa, grupa – definice

Definice 16.1 Grupoid je uspořádaná dvojice $(M, \circ)$, kde M je libovolná neprázdná množina a $\circ$ je binární operace na M.

- Pologrupa je grupoid $(M, \circ)$, pro který je $\circ$ asociativní operace.
- Monoid je pologrupa $(M, \circ)$, ve které existuje neutrální prvek e takový, že
$$\text{pro všechna } a \in M \quad \text{platí} \quad e \circ a = a \circ e = a.$$
- Grupa je monoid $(M, \circ)$, ve kterém ke každému $a \in M$ existuje inverzní prvek a^{-1} takový, že
$$a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e.$$
- Komutativní (abelovská) grupa je grupa $(M, \circ)$, kde $\circ$ je komutativní operace.

Základní cvičení 16.1 Určete, které z následujících číselných množin s uvedenou operací tvoří grupoid / pologrupu / monoid / grupu / abelovskou grupu. Pokud existuje, najděte neutrální prvek a zjistěte, jak vypadají inverzní prvky.

(a) $(\mathbb{R}_0^+, +)$,

(b) $(\mathbb{R}_0^+, \cdot)$,

(c) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \div)$,

(d) $(\mathbb{Q}, -)$,

(e) $(\mathbb{Q}, \cdot)$,

(f) $(\mathbb{Q}, +)$.

Cvičení 16.2 Buď M množina všech prostých reálných funkcí jejichž definiční obor je roven $\mathbb{R}$.

(a) Je M uzavřená vůči operaci skládání funkcí? Tzn. platí $f \circ g \in M$ pro všechny funkce $f, g \in M$?

(b) Je M uzavřená vůči operaci inverze funkce? Tzn. platí $f^{-1} \in M$ pro všechny funkce $f \in M$?

Je M s operací skládání funkcí grupoid / pologrupa / monoid / grupa / abelovská grupa?

Základní cvičení 16.3 Mějme množinu $M = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Rozhodněte, zda tvoří dvojice $(M, \circ)$ grupoid / pologrupu / monoid / grupu / abelovskou grupu pokud je operace „$\circ$“

(a) sčítání modulo n.

(b) násobení modulo n.

Cvičení 16.4 Mějme množinu $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Odeberte z M co nejméně prvků tak, aby výsledná množina spolu s násobením modulo 6 tvořila grupu.

Cvičení 16.5 Mějme množinu $M = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Jaké prvky musíme z M odebrat, aby výsledná množina tvořila spolu s operací násobení modulo n grupu?

Cvičení 16.6 Buď P množina všech reálných polynomů. Je P uzavřená vůči derivaci? Tzn. platí $p \in P \Rightarrow p' \in P$?

Cvičení 16.7 Najděte co nejmenší množinu $M \subset \mathbb{R}$ obsahující alespoň dva prvky takovou, aby s operací dělení tvořila grupu. Je výsledná grupa abelovská?

Cvičení 16.8 Najděte co nejmenší množinu $M \subset \mathbb{R}$ obsahující číslo 1 takovou, aby s operací sčítání tvořila grupu.

Cvičení 16.9 Určete, které z následujících číselných množin s uvedenou operací tvoří grupoid / pologrupu / monoid / grupu / abelovskou grupu. Pokud existuje, najděte neutrální prvek a zjistěte jak vypadají inverzní prvky.

(a) $(\mathbb{Q}, \circ)$, kde $a \circ b = a^b$,

(b) $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \circ)$, kde $a \circ b = a^b$,

(c) $(\{-1, 1\}, \circ)$, kde $a \circ b = a^b$,

(d) $(\mathbb{R}, \circ)$, kde $a \circ b = a + b + 1$,

(e) $(\mathbb{R}, \circ)$, kde $a \circ b = a + b + ab$,

(f) $(\mathbb{R}^2, \circ)$, kde $A \circ B$ je střed úsečky mezi body A a B,

(g) $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \circ)$, kde $n \circ m = \gcd(n, m)$.

Cvičení 16.10 Tvoří potenční množina neprázdné množiny spolu s operací sjednocení množin grupu? ■

Cvičení 16.11 Tvoří potenční množina neprázdné množiny spolu s operací průniku množin grupu? ■

Cvičení 16.12 Buď $M = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}, a < 0 < b\}$ (tj. množina otevřených omezených intervalů obsahujících nulu). Rozhodněte, jestli M s operací sjednocení $\cup$ tvoří grupoid / pologrupu. Přidejte do M jeden prvek tak, aby vznikl monoid.

Cvičení 16.13 Buď $M = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}, a < 0 < b\}$ (tj. množina otevřených omezených intervalů obsahujících nulu). Rozhodněte, jestli M s operací průniku $\cap$ tvoří grupoid / pologrupu. Přidejte do M jeden prvek tak, aby vznikl monoid.

Cvičení 16.14 Uvažujme množinu $M = \{a + b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$.

(i) Tvoří M s operací sčítání čísel grupu? Pokud ne, přidejte/uberte co nejméně prvků tak, aby $(M,+)$ byla grupa.

(ii) Tvoří M s operací násobení čísel grupu? Pokud ne, přidejte/uberte co nejméně prvků tak, aby $(M,\cdot)$ byla grupa.

Cvičení 16.15 Je následující tabulka Cayleyovou tabulkou abelovské grupy?

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

■

Cvičení 16.16 Dokažte, že každá grupa řádu menšího než 4 je abelovská. ■

17 Podgrupy

Definice 17.1 Buď $G = (M, \circ)$ grupa. Podgrupou grupy G nazveme libovolnou dvojici $H = (N, \circ)$ takovou, že

- $N \subset M$,
- $H = (N, \circ)$ je grupa.

Základní cvičení 17.1 Mějme grupu $\mathbb{Z}_8^\times$. Kolik má prvků? Najděte všechny vlastní podgrupy této grupy. ■

Cvičení 17.2 Které z následujících množin jsou podgrupou grupy $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$?

(a) množina sudých celý čísel bez nuly,

(b) množina lichých celých čísel,

(c) $\{2^n : n \in \mathbb{Z}\}$,

(d) $\{2^n \cdot 3^m : n, m \in \mathbb{Z}\}$,

(e) $\left\{\dfrac{1+2n}{1+2m} : n, m \in \mathbb{Z}\right\}$

Cvičení 17.3 Najděte všechny podgrupy grupy zadané násl. tabulkou.

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Cvičení 17.4 Je množina $G = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0 \vee b \neq 0\}$ podgrupou grupy $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$?

Cvičení 17.5 Mějme monoid $(M, \circ)$ a označme $G := \{a \in M : a \text{ je invertibilní}\}$. Zjistěte a odůvodněte, zda musí být $(G, \circ)$ grupa.

Řešení

Řešení Cvičení 16.1: (a) monoid – chybí inverze, (b) monoid – chybí inverze k 0, (c) grupoid – není asociativní, (d) grupoid – není asociativní, (e) monoid – chybí inverze nuly, (f) abelovská grupa

Řešení Cvičení 16.2: (a) ano, (b) ne. Jde o monoid, operace skládání funkcí je asociativní a identické zobrazení je neutrální prvek.

Řešení Cvičení 16.3: (a) Jedná se o abelovskou grupu, kterou značíme $\mathbb{Z}_n^+$. (b) Jedná se o monoid s neutrálním prvkem 1, který je navíc komutativní. O grupu se nejedná, protože například k prvku 0 neexistuje prvek inverzní.

Řešení Cvičení 16.4: Z Cvičení 16.3 (b) víme, že M s uvedenou operací tvoří monoid s neutrálním prvkem 1. Aby vznikla grupa je třeba z M odebrat prvky $0, 2, 3$ a 4. K nim neexistuje prvek inverzní.

Řešení Cvičení 16.5: Musíme odebrat všechny prvky, které nemají multiplikativní inverzi modulo n (viz předmět BI-ZDM). To jsou všechna k z M taková, že $gcd(k, n) > 1$. S užitím Bézoutovy rovnosti a trochy přemýšlení lze nahlédnout, že to již stačí. Výslednou grupu značíme $\mathbb{Z}_n^\times$. **Pozor na to, že grupa $\mathbb{Z}_n^\times$ má VŽDY jinou nosnou množinu než grupa $\mathbb{Z}_n^+$.**

Řešení Cvičení 16.7: $M = \{1, -1\}$

Řešení Cvičení 16.8: $M = \mathbb{Z}$

Řešení Cvičení 16.9: (a) nic – není uzavřené na operaci, (b) grupoid – není asociativní, (c) pologrupa – chybí neutrální prvek (je tam jenom pravý), (d) abelovská grupa – neutr. prvek je -1, inverze $a^{-1} = -a - 2$, (e) monoid – neutrální prvek 0, ale -1 nemá inverzi, (f) grupoid – není asociativní, (g) pologrupa – je to asociativní, ale chybí neutrální prvek (důkaz toho, že takový prvek neexistuje, je vhodné provést sporem)

Řešení Cvičení 16.12: jedná se o grupid a i o pologrupu, jako neutrální prvek je možné vzít $\{0\}$ (tj. množinu obsahující pouze nulu) nebo $\emptyset$.

Řešení Cvičení 16.13: jedná se o grupid a i o pologrupu, jako neutrální prvek je možné vzít $\mathbb{R}$ (tj. množinu všech reálných čísel)

Řešení Cvičení 16.14: V prvním případě se o grupu zjevně jedná. Ve druhém je potřeba odebrat nulu, tj. prvek, kdy $a = b = 0$.

Řešení Cvičení 17.2: (a) ne, (b) ne, (c) ano, (d) ano, (e) ano

Řešení Cvičení 17.4: ano, je

Řešení Cvičení 17.5: Ano, $(G, \circ)$ je grupa.

ChangeLog

Verze	Datum	Autor	Log
1.2	23.09.2019	ŠS	Oprava překlepu v definici grupoidu apod.
1.0	17.09.19	ŠS	Výchozí verze.