

NI-MPI cvičení 6

Algebra I

FIT ČVUT

Autoři: Karel Klouda, Tomáš Kalvoda, Jan Spěvák, Štěpán Starosta
Problémy, návrhy apod. hlase v [GitLabu](#).

Verze souboru: 2021-11-08 14:03.

Obsah

16. Grupoid, monoid, pologrupa, grupa – definice

17. Podgrupy

Poznámka

Co byste si měli z tohoto cvičení odnést:

- ▶ jak poznat, že je něco grupoid / pologrupa / monoid / grupa,
- ▶ najít a poznat podgrupy různých grup.

A co byste se měli doučit, pokud to ještě/už neumíte:

- ▶ stačí znát z přednášky definice a základní vlastnosti výše zmíněných pojmů.

16. Grupoid, monoid, pologrupa, grupa – definice

Definice 16.1

Grupoid je uspořádaná dvojice (M, \circ) , kde M je libovolná neprázdná množina a \circ je binární operace na M .

- ▶ **Pologrupa** je grupoid (M, \circ) , pro který je \circ asociativní operace.
- ▶ **Monoid** je pologrupa (M, \circ) , ve které existuje **neutrální prvek** e takový, že

$$\text{pro všechna } a \in M \text{ platí } e \circ a = a \circ e = a.$$

- ▶ **Grupa** je monoid (M, \circ) , ve kterém ke každému $a \in M$ existuje **inverzní prvek** a^{-1} takový, že

$$a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e.$$

- ▶ **Komutativní (abelovská) grupa** je grupa (M, \circ) , kde \circ je komutativní operace.

Základní cvičení 16.1

Určete, které z následujících číselných množin s uvedenou operací tvoří grupoid / pologrupu / monoid / grupu / abelovskou grupu. Pokud existuje, najděte neutrální prvek a zjistěte, jak vypadají inverzní prvky.

(a) $(\mathbb{R}_0^+, +)$,

(b) (\mathbb{R}_0^+, \cdot) ,

(c) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \div)$,

(d) $(\mathbb{Q}, -)$,

(e) (\mathbb{Q}, \cdot) ,

(f) $(\mathbb{Q}, +)$.

Cvičení 16.2

Bud' M množina všech prostých reálných funkcí jejichž definiční obor je roven \mathbb{R} .

(a) Je M uzavřená vůči operaci skládání funkcí? Tzn. platí $f \circ g \in M$ pro všechny funkce $f, g \in M$?

(b) Je M uzavřená vůči operaci inverze funkce? Tzn. platí $f^{-1} \in M$ pro všechny funkce $f \in M$?

Je M s operací skládání funkcí grupoid / pologrupa / monoid / grupa / abelovská grupa?

Základní cvičení 16.3

Mějme množinu $M = \{0, 1, \dots, n - 1\}$. Rozhodněte, zda tvoří dvojice (M, \circ) grupoid / pologrupu / monoid / grupu / abelovskou grupu pokud je operace „ \circ “

- (a) sčítání modulo n .
- (b) násobení modulo n .

Cvičení 16.4

Mějme množinu $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Odeberte z M co nejméně prvků tak, aby výsledná množina spolu s násobením modulo 6 tvořila grupu.

Cvičení 16.5

Mějme množinu $M = \{0, 1, \dots, n - 1\}$. Jaké prvky musíme z M odebrat, aby výsledná množina tvořila spolu s operací násobení modulo n grupu?

Cvičení 16.6

Bud' P množina všech reálných polynomů. Je P uzavřená vůči derivaci? Tzn. platí $p \in P \Rightarrow p' \in P$?

Cvičení 16.7

Najděte co nejmenší množinu $M \subset \mathbb{R}$ obsahující alespoň dva prvky takovou, aby s operací dělení tvořila grupu. Je výsledná grupa abelovská?

Cvičení 16.8

Najděte co nejmenší množinu $M \subset \mathbb{R}$ obsahující číslo 1 takovou, aby s operací sčítání tvořila grupu.

Cvičení 16.9

Určete, které z následujících číselných množin s uvedenou operací tvoří grupoid / pologrupu / monoid / grupu / abelovskou grupu. Pokud existuje, najděte neutrální prvek a zjistěte jak vypadají inverzní prvky.

- (a) (\mathbb{Q}, \circ) , kde $a \circ b = a^b$,
- (b) $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \circ)$, kde $a \circ b = a^b$,
- (c) $(\{-1, 1\}, \circ)$, kde $a \circ b = a^b$,
- (d) (\mathbb{R}, \circ) , kde $a \circ b = a + b + 1$,
- (e) (\mathbb{R}, \circ) , kde $a \circ b = a + b + ab$,
- (f) (\mathbb{R}^2, \circ) , kde $A \circ B$ je střed úsečky mezi body A a B ,
- (g) $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \circ)$, kde $n \circ m = \gcd(n, m)$.

Cvičení 16.10

Tvoří potenční množina neprázdné množiny spolu s operací sjednocení množin grupu?

Cvičení 16.11

Tvoří potenční množina neprázdné množiny spolu s operací průniku množin grupu?

Cvičení 16.12

Bud' $M = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < 0 < b\}$ (tj. množina otevřených omezených intervalů obsahujících nulu). Rozhodněte, jestli M s operací sjednocení \cup tvoří grupoid / pologrupu. Přidejte do M jeden prvek tak, aby vznikl monoid.

Cvičení 16.13

Bud' $M = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < 0 < b\}$ (tj. množina otevřených omezených intervalů obsahujících nulu). Rozhodněte, jestli M s operací průniku \cap tvoří grupoid / plogrupu. Přidejte do M jeden prvek tak, aby vznikl monoid.

Cvičení 16.14

Uvažujme množinu $M = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

- (i) Tvoří M s operací sčítání čísel grupu? Pokud ne, přidejte/uberte co nejméně prvků tak, aby $(M, +)$ byla grupa.
- (ii) Tvoří M s operací násobení čísel grupu? Pokud ne, přidejte/uberte co nejméně prvků tak, aby (M, \cdot) byla grupa.

Cvičení 16.15

Je následující tabulka Cayleyovou tabulkou abelovské grupy?

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Cvičení 16.16

Dokažte, že každá grupa řádu menšího než 4 je abelovská.

17. Podgrupy

Definice 17.1

Bud' $G = (M, \circ)$ grupa. **Podgrupou** grupy G nazveme libovolnou dvojici $H = (N, \circ)$ takovou, že

- ▶ $N \subset M$,
- ▶ $H = (N, \circ)$ je grupa.

Základní cvičení 17.1

Mějme grupu \mathbb{Z}_8^\times . Kolik má prvků? Najděte všechny vlastní podgrupy této grupy.

Cvičení 17.2

Které z následujících množin jsou podgrupou grupy $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$?

(a) množina sudých celých čísel bez nuly,

(b) množina lichých celých čísel,

(c) $\{2^n : n \in \mathbb{Z}\}$,

(d) $\{2^n \cdot 3^m : n, m \in \mathbb{Z}\}$,

(e) $\left\{ \frac{1 + 2n}{1 + 2m} : n, m \in \mathbb{Z} \right\}$

Cvičení 17.3

Najděte všechny podgrupy grupy zadané násl. tabulkou.

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Cvičení 17.4

Je množina $G = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0 \vee b \neq 0\}$ podgrupou grupy $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$?

Cvičení 17.5

Mějme monoid (M, \circ) a označme $G := \{a \in M : a \text{ je invertibilní}\}$. Zjistěte a odůvodněte, zda musí být (G, \circ) grupa.