NI-MPI cvičení 6

Algebra I

FIT ČVUT

Autoři: Karel Klouda, Tomáš Kalvoda, Jan Spěvák, Štěpán Starosta
Problémy, návrhy apod. hlaste v GitLabu.

Verze souboru: 2021-11-08 14:03.

Obsah

Poznámka

Co byste si měli z tohoto cvičení odnést:

- jak poznat, že je něco grupoid / pologrupa / monoid / grupa,
- najít a poznat podgrupy různých grup.

A co byste se měli doučit, pokud to ještě/už neumíte:

- stačí znát z přednášky definice a základní vlastnosti výše zmíněných pojmů.

16. Grupoid, monoid, pologrupa, grupa – definice

Definice 16.1

Grupoid je uspořádaná dvojice $(M, \circ)$, kde M je libovolná neprázdná množina a $\circ$ je binární operace na M.

- Pologrupa je grupoid $(M, \circ)$, pro který je $\circ$ asociativní operace.
- Monoid je pologrupa $(M, \circ)$, ve které existuje neutrální prvek e takový, že

$$\text{pro všechna } a \in M \quad \text{platí} \quad e \circ a = a \circ e = a.$$

- Grupa je monoid $(M, \circ)$, ve kterém ke každému $a \in M$ existuje inverzní prvek a^{-1} takový, že

$$a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e.$$

- Komutativní (abelovská) grupa je grupa $(M, \circ)$, kde $\circ$ je komutativní operace.

Základní cvičení 16.1

Určete, které z následujících číselných množin s uvedenou operací tvoří grupoid / pologrupu / monoid / grupu / abelovskou grupu. Pokud existuje, najděte neutrální prvek a zjistěte, jak vypadají inverzní prvky.

(a) $(\mathbb{R}_0^+, +)$,

(b) $(\mathbb{R}_0^+, \cdot)$,

(c) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \div)$,

(d) $(\mathbb{Q}, -)$,

(e) $(\mathbb{Q}, \cdot)$,

(f) $(\mathbb{Q}, +)$.

Cvičení 16.2

Buď M množina všech prostých reálných funkcí jejichž definiční obor je roven $\mathbb{R}$.

(a) *Je M uzavřená vůči operaci skládání funkcí? Tzn. platí $f \circ g \in M$ pro všechny funkce $f, g \in M$?*

(b) *Je M uzavřená vůči operaci inverze funkce? Tzn. platí $f^{-1} \in M$ pro všechny funkce $f \in M$?*

Je M s operací skládání funkcí grupoid / pologrupa / monoid / grupa / abelovská grupa?

Základní cvičení 16.3

Mějme množinu $M = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Rozhodněte, zda tvoří dvojice $(M, \circ)$ grupoid / pologrupu / monoid / grupu / abelovskou grupu pokud je operace „$\circ$“

(a) *sčítání modulo n.*

(b) *násobení modulo n.*

Cvičení 16.4

Mějme množinu $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$*. Odeberte z* M *co nejméně prvků tak, aby výsledná množina spolu s násobením modulo* 6 *tvořila grupu.*

Cvičení 16.5

Mějme množinu $M = \{0, 1, \ldots, n-1\}$*. Jaké prvky musíme z* M *odebrat, aby výsledná množina tvořila spolu s operací násobení modulo* n *grupu?*

Cvičení 16.6

Buď P *množina všech reálných polynomů. Je* P *uzavřená vůči derivaci? Tzn. platí* $p \in P \Rightarrow p' \in P$*?*

Cvičení 16.7

Najděte co nejmenší množinu $M \subset \mathbb{R}$ *obsahující alespoň dva prvky takovou, aby s operací dělení tvořila grupu. Je výsledná grupa abelovská?*

Cvičení 16.8

Najděte co nejmenší množinu $M \subset \mathbb{R}$ obsahující číslo 1 takovou, aby s operací sčítání tvořila grupu.

Cvičení 16.9

Určete, které z následujících číselných množin s uvedenou operací tvoří grupoid / pologrupu / monoid / grupu / abelovskou grupu. Pokud existuje, najděte neutrální prvek a zjistěte jak vypadají inverzní prvky.

(a) $(\mathbb{Q}, \circ)$, *kde* $a \circ b = a^b$,

(b) $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \circ)$, *kde* $a \circ b = a^b$,

(c) $(\{-1, 1\}, \circ)$, *kde* $a \circ b = a^b$,

(d) $(\mathbb{R}, \circ)$, *kde* $a \circ b = a + b + 1$,

(e) $(\mathbb{R}, \circ)$, *kde* $a \circ b = a + b + ab$,

(f) $(\mathbb{R}^2, \circ)$, *kde* $A \circ B$ *je střed úsečky mezi body* A *a* B,

(g) $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \circ)$, *kde* $n \circ m = \gcd(n, m)$.

Cvičení 16.10

Tvoří potenční množina neprázdné množiny spolu s operací sjednocení množin grupu?

Cvičení 16.11

Tvoří potenční množina neprázdné množiny spolu s operací průniku množin grupu?

Cvičení 16.12

Buď $M = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < 0 < b\}$ *(tj. množina otevřených omezených intervalů obsahujících nulu). Rozhodněte, jestli* M *s operací sjednocení* $\cup$ *tvoří grupoid / pologrupu. Přidejte do* M *jeden prvek tak, aby vznikl monoid.*

Cvičení 16.13

Buď $M = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < 0 < b\}$ *(tj. množina otevřených omezených intervalů obsahujících nulu). Rozhodněte, jestli* M *s operací průniku* $\cap$ *tvoří grupoid / pologrupu. Přidejte do* M *jeden prvek tak, aby vznikl monoid.*

Cvičení 16.14

Uvažujme množinu $M = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

(i) *Tvoří* M *s operací sčítání čísel grupu? Pokud ne, přidejte/uberte co nejméně prvků tak, aby* $(M, +)$ *byla grupa.*

(ii) *Tvoří* M *s operací násobení čísel grupu? Pokud ne, přidejte/uberte co nejméně prvků tak, aby* $(M, \cdot)$ *byla grupa.*

Cvičení 16.15

Je následující tabulka Cayleyovou tabulkou abelovské grupy?

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Cvičení 16.16

Dokažte, že každá grupa řádu menšího než 4 *je abelovská.*

17. Podgrupy

Definice 17.1

Buď $G = (M, \circ)$ grupa. Podgrupou grupy G nazveme libovolnou dvojici $H = (N, \circ)$ takovou, že

- $N \subset M$,
- $H = (N, \circ)$ je grupa.

Základní cvičení 17.1

Mějme grupu $\mathbb{Z}_8^\times$. Kolik má prvků? Najděte všechny vlastní podgrupy této grupy.

Cvičení 17.2

Které z následujících množin jsou podgrupou grupy $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$*?*

(a) *množina sudých celý čísel bez nuly,*

(b) *množina lichých celých čísel,*

(c) $\{2^n : n \in \mathbb{Z}\}$,

(d) $\{2^n \cdot 3^m : n, m \in \mathbb{Z}\}$,

(e) $\left\{\dfrac{1+2n}{1+2m} : n, m \in \mathbb{Z}\right\}$

Cvičení 17.3

Najděte všechny podgrupy grupy zadané násl. tabulkou.

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Cvičení 17.4

Je množina $G = \{a + b\sqrt{2} \colon a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0 \vee b \neq 0\}$ *podgrupou grupy* $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$*?*

Cvičení 17.5

Mějme monoid $(M, \circ)$ *a označme* $G := \{a \in M : a \text{ je invertibilní}\}$*. Zjistěte a odůvodněte, zda musí být* $(G, \circ)$ *grupa.*