NI-MPI cvičení 1 handout 13. února 2025
Problémy, návrhy apod. hlaste v GitLabu.
Verze souboru: 2023-10-02 13:42.

Obsah

Co byste si měli z tohoto cvičení odnést:

- Jak se parciálně derivuje.
- Co je to gradient funkce a jaký je jeho geometrický význam.
- Jak nám gradient pomáhá spočítat derivaci ve směru (a co to je).
- Jak najít rovnici tečné roviny.

5 Spojitost a limita

Cvičení 5.1 Zjistěte, zda je funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pro } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{pro } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Spojitá a po částech spojitá[a] v bodě $(0,0)$.

[a] Funkce $f(x,y)$ je po částech spojitá v bodě (x_0,y_0), pokud jsou funkce jedné proměnné $f(x_0,y)$ a $f(x,y_0)$ spojité po řadě v bodech y_0 a x_0.

6 Parciální derivace

Cvičení 6.1

(a) najděte $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ pro $f(x,y) = xy + e^x \cos y$,

(b) pro předchozí funkci vyčíslete hodnotu parciální derivace podle x v bodě $(1, \pi/2)$

(c) najděte $\frac{\partial z}{\partial x}$ a $\frac{\partial z}{\partial y}$ pro $z(x,y) = x^2y^3 + x^3y^4 - e^{xy^2}$,

(d) najděte hodnotu $\frac{\partial f}{\partial z}$ v bodě $(1,2,3)$ pro $f(x,y,z) = \sin(xy/z)$,

(e) najděte $\frac{\partial f}{\partial x}$ pro $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$,

(f) najděte $\frac{\partial f}{\partial x}$ pro $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1)$,

(g) najděte $\frac{\partial f}{\partial x}$ pro $f(x,y) = \frac{1}{x^3+y^3}$.

Cvičení 6.2 V jakém bodě nemá funkce $\sqrt{x^2+y^2}$ parciální derivaci a proč?

Cvičení 6.3 Spočítejte druhou parciální derivaci podle x a y, tj. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, pro funkce

(a) $f(x,y) = x^2y^2$,

(b) $f(x,y) = \sin(xy)$,

(c) $f(x,y) = xy^2 - ye^{-x} - \cos(x-y)$.

Funkci můžeme derivovat dvakrát také podle dvou různých proměnných, takové derivaci se říká *smíšená* a značí se

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,.$$

Cvičení 6.4 Spočítejte smíšené derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ pro funkce

(a) $f(x,y,z) = e^{xz} + y\cos x$,

(b) $f(x,y,z) = z\cos(xy) + x\sin(yz)$.

To, že obě smíšené derivace v předchozím příkladě vyšly stejné, není náhoda. Platí totiž následující věta:

Věta 6.1 Nechť $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^2$ a $\mathbf{b} \in D_f$.
Pokud existuje $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{b})$ a funkce $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ je v $\mathbf{b}$ spojitá, potom $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{b})$ existuje a platí

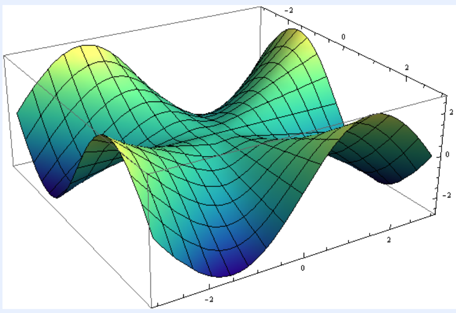
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{b}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{b})\,.$$

Tedy nezáleží na pořadí parciálního derivování.

Cvičení 6.5 Příkladem, kdy se smíšené derivace nerovnají, je funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{v bodě } (0,0) \\ \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Zkuste vysvětlit s pomocí grafu této funkce, proč tomu tak je:



Cvičení 6.6 Dokažte, že funkce $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$ splňuje tzv. *Laplaceovu rovnici*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\,.$$

■

Cvičení 6.7 Dokažte, že funkce $g(x,t) = 2 + e^{-t}\sin x$ splňuje tzv. *rovnici vedení tepla*

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\,.$$

(Zde je $g(x,t)$ teplota železné tyče v místě x a čase t. Co se stane pro t jdoucí do nekonečna?). ■

7 Gradient, derivace ve směru a tečná rovina

Gradient funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ v daném bodě $b \in \mathbb{R}^n$ je vektor

$$\nabla f(b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(b), \frac{\partial f}{\partial x_2}(b), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(b)\right).$$

Tento vektor ukazuje směr nejvyššího růstu dané funkce.

Cvičení 7.1 Najděte gradient následujících funkcí

(a) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

(b) $f(x,y,z) = xy + xz + zy$,

(c) $f(x,y,z) = x + y^2 + z^3$,

(d) $f(x,y,z) = zx^2 + xy^2 + yz^2$,

(e) $f(x,y) = xe^{xy^3+3}$,

(f) $f(x,y) = xe^{x^2+y^2}$.

Cvičení 7.2 Najděte gradient funkce $f(x,y) = x^2/10 + y^2/10$. Jakým směrem by se začala kutálet kulička a kde by se nakonec zastavila, pokud byste ji položili na graf této funkce v bodě $(1,3)$? ■

Cvičení 7.3 Představte si, že vyrážíte z Prahy, tedy zhruba z 50 stupňů zeměpisné šířky a 14 stupňů zeměpisné délky, po tuhé zimě na dovolenou. Kolega meteorolog Vám předal vzorec, který hrubě odhaduje teplotu v místě se zeměpisnou šířkou x a délkou y:

$$T(x,y) = (-0{,}0003)x^2y + (0{,}9307)y\,.$$

Jakým směrem se vydat, aby se teplota zvyšovala co nejrychleji? ■

Cvičení 7.4 Kapitán Astroš se prohání vesmírem poblíž strany Merkuru přivrácené ke slunci. Najednou mu začne být nesnesitelné horko a zámky dveří na jeho lodi začnou roztávat. Kudy se má vydat, aby teplota klesla co nejrychleji, jestliže je teplota v těchto místech dána funkcí

$$T(x,y,z) = e^{-x} + e^{-2y} + e^{3z}$$

a kapitán se nachází v bodě $(1,1,1)$?

Následující cvičení je demonstrací toho, že chceme-li spočítat derivaci funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ v bodě $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ a ve směru jednotkového (sloupcového) vektoru $\vec{v}$, stačí spočítat gradient a pak se derivace rovná

$$\nabla f(b_1, b_2, \ldots, b_n) \cdot \vec{v}.$$

Cvičení 7.5 Uvažujme graf funkce $z(x,y) = x^2 + 3y^2$. Pronikneme jej s rovinou rovnoběžnou s osou z a procházející přímkou $y = 2x$: vzniklou množinu lze chápat jako graf jednorozměrné funkci nad touto přímkou (pro pořádek: na přímce se pohybujeme směrem z třetího kvadrantu, kde je x a y záporné, do prvního, kde jsou kladná). Najděte analytický předpis nějaké takové jednorozměrné funkce a dokažte, že její derivace v bodě přímky ve vzdálenosti 2 od počátku souřadnic v prvním kvadrantu je rovna

$$\nabla z\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right),$$

kde $\cdot$ značí skalární součin vektorů.

Cvičení 7.6 Spočítejte derivaci funkce f v bodě (x_0, y_0) ve směru vektoru $\vec{d}$, kde

(a) $f(x,y) = x + 2x^2 - 3xy$, $(x_0, y_0) = (1,1)$ a $\vec{d} = (3/5, 4/5)$,

(b) $f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, $(x_0, y_0) = (1,0)$ a $\vec{d} = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$,

(c) $f(x,y,z) = xyz$, $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$ a $\vec{d} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$.

Cvičení 7.7 Představte si, že programujete primitivní simulátor autíčka jedoucího po 3D krajině, jež je dána grafem funkce $z(x,y) = x/2 + y/3 - 2$. Jediný vstup od uživatele je jednotkový vektor $\vec{s} = (s_1, s_2)$, který udává horizontální směr pohybu autíčka a který uživatel nastavuje pomocí šipek.

Rychlost auta je nepřímo úměrná sklonu povrchu vyjádřenému úhlem α (v radiánech) a je zadána funkcí $f(\alpha) = 20 - 40\alpha$. Najděte funkci $r(x,y,\vec{s})$, která udává rychlost autíčka v bodě (x,y) pohybujícího se ve směru vektoru jednotkového $\vec{s}$.

Cvičení 7.8 Jak by vypadala funkce $r(x,y,\vec{s})$ (z předchozího cvičení), pokud by se autíčko pohybovalo po krajině dané rovnicí $z = x^2/2 + y^2/2 + xy$?

Cvičení 7.9 Odvoďte rovnici tečné roviny v bodě (x_0, y_0) pro funkci $f(x,y)$.

Řešení

Řešení Cvičení 6.1: (a) $y + e^x \cos y$ resp. $x - e^x \sin y$, (b) $\pi/2$, (c) $2xy^3 + 3x^2y^4 - y^2e^{xy^2}$ resp. $3x^2y^2 + 4x^3y^3 - 2xye^{xy^2}$, (d) $-\frac{2}{9}\cos\left(\frac{2}{3}\right)$.

Řešení Cvičení 6.2: v bodě $(0,0)$ protože je tam špičatá: derivace ani podle x a podle y není definovaná.

Řešení Cvičení 6.3: (a) $2y^2$ resp. $2x^2$, (b) $-y^2\sin(xy)$ resp. $-x^2\sin(xy)$, (c) $-ye^{-x}+\cos(x-y)$ resp. $2x+\cos(x-y)$

Řešení Cvičení 6.4: (a) obě jsou $-\sin x$, (b) obě jsou $-z\sin(xy)-xyz\cos(xy)+z\cos(yz)$

Řešení Cvičení 7.1: (a) $\left(x/\sqrt{x^2+y^2+z^2}, y/\sqrt{x^2+y^2+z^2}, z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$, (b) $(y+z, x+z, x+y)$, (c) $(1, 2y, 3z^2)$, (f) $((1+2x^2)e^{x^2+y^2}, 2xye^{x^2+y^2})$

Řešení Cvičení 7.4: Měl by vyrazit ve směru $-\nabla T(1,1,1)$, tedy $(e^{-1}, 2e^{-2}, -3e^3)$.

Řešení Cvičení 7.5: (Náznak) Nejdříve sestavme funkci hledaného řezu jako funkci jedné proměnné: jedná se o přímku, kterou lze parametrizovat pomocí bodu a směrového vektoru např. takto

$$(0,0)+t(1,2).$$

Aby vzdálenosti 2 odpovídala hodnota $t=2$, je třeba aby ten vektor měl normu (délku) 1, máme tedy

$$(0,0)+t(1,2)\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Nyní už dostáváme příslušnou jednorozměrnou funkci

$$f(t)=z\left(0+\frac{1}{\sqrt{5}}t, 0+\frac{2}{\sqrt{5}}t\right)=\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2+3\left(\frac{2t}{\sqrt{5}}\right)^2$$

Derivace v bodě $t=2$ je tedy

$$4/5+48/5=52/5.$$

Nyní spočítejme čemu se rovná výraz

$$\nabla z\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\left(2\frac{2}{\sqrt{5}}, 6\frac{4}{\sqrt{5}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)=4/5+48/5=52/5.$$

Připomeňme, že bod na přímce $y=2x$ se vzdáleností 2 od počátku je $(2/\sqrt{5}, 4/\sqrt{5})$.

Řešení Cvičení 7.7: Jelikož je krajina nakloněná rovina, závisí rychlost pouze na směru, neboť gradient je konstantní:

$$r(x,y,\vec{s})=20-40\arctan\left(\frac{s_1}{2}+\frac{s_2}{3}\right)$$

Řešení Cvičení 7.8:

$$r(x,y,\vec{s})=20-40\arctan\left((x+y)(s_1+s_2)\right)$$

Řešení Cvičení 7.9:

$$z=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)+f(x_0,y_0)$$

Srovnejte s rovnicí tečny jednorozměrné funkce!

ChangeLog

Verze	Datum	Autor	Log
1.2	29.9.22	ŠS	Úprava znění příkladu o směrové derivaci.
1.1	19.11.18	ŠS	Upraveno tvrzení o symetrii smíšených derivací.
1.0	5.11.18	ŠS	Verze z roku 2017/2018.