NI-MPI cvičení 1

Analýza I

FIT ČVUT

Autoři: Karel Klouda, Tomáš Kalvoda, Jan Spěvák, Štěpán Starosta
Problémy, návrhy apod. hlaste v GitLabu.

Verze souboru: 2023-10-02 13:42.

Obsah

Poznámka

Co byste si měli z tohoto cvičení odnést:

- Jak se parciálně derivuje.
- Co je to gradient funkce a jaký je jeho geometrický význam.
- Jak nám gradient pomáhá spočítat derivaci ve směru (a co to je).
- Jak najít rovnici tečné roviny.

5. Spojitost a limita

Cvičení 5.1

Zjistěte, zda je funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definovaná předpisem*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \textit{pro } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \textit{pro } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Spojitá a po částech spojitá[a] *v bodě* $(0,0)$.

[a] Funkce $f(x,y)$ je po částech spojitá v bodě (x_0, y_0), pokud jsou funkce jedné proměnné $f(x_0, y)$ a $f(x, y_0)$ spojité po řadě v bodech y_0 a x_0.

6. Parciální derivace

Cvičení 6.1

(a) *najděte* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *a* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *pro* $f(x, y) = xy + e^x \cos y$,

(b) *pro předchozí funkci vyčíslete hodnotu parciální derivace podle* x *v bodě* $(1, \pi/2)$

(c) *najděte* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *a* $\frac{\partial z}{\partial y}$ *pro* $z(x, y) = x^2 y^3 + x^3 y^4 - e^{xy^2}$,

(d) *najděte hodnotu* $\frac{\partial f}{\partial z}$ *v bodě* $(1, 2, 3)$ *pro* $f(x, y, z) = \sin(xy/z)$,

(e) *najděte* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *pro* $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$,

(f) *najděte* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *pro* $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$,

(g) *najděte* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *pro* $f(x, y) = \frac{1}{x^3 + y^3}$.

Cvičení 6.2

V jakém bodě nemá funkce $\sqrt{x^2 + y^2}$ *parciální derivaci a proč?*

Cvičení 6.3

Spočítejte druhou parciální derivaci podle x a y, tj. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, pro funkce

(a) $f(x, y) = x^2 y^2$,

(b) $f(x, y) = \sin(xy)$,

(c) $f(x, y) = xy^2 - ye^{-x} - \cos(x - y)$.

Poznámka

Funkci můžeme derivovat dvakrát také podle dvou různých proměnných, takové derivaci se říká *smíšená* a značí se

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,.$$

Cvičení 6.4

Spočítejte smíšené derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *a* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *pro funkce*

(a) $f(x, y, z) = e^{xz} + y \cos x$,

(b) $f(x, y, z) = z \cos(xy) + x \sin(yz)$.

To, že obě smíšené derivace v předchozím příkladě vyšly stejné, není náhoda. Platí totiž následující věta:

Věta 6.1

Nechť $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^2$ *a* $\mathbf{b} \in D_f$*.*
Pokud existuje $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{b})$ *a funkce* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *je v* $\mathbf{b}$ *spojitá, potom* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{b})$ *existuje a platí*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{b}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{b}) .$$

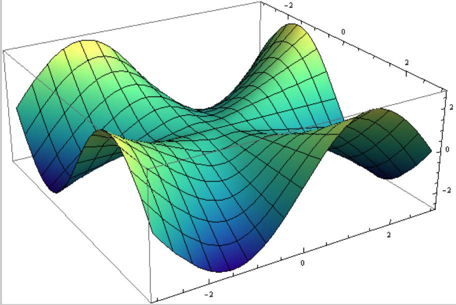
Tedy nezáleží na pořadí parciálního derivování.

Cvičení 6.5

Příkladem, kdy se smíšené derivace nerovnají, je funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{v bodě } (0,0) \\ \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Zkuste vysvětlit s pomocí grafu této funkce, proč tomu tak je:



Cvičení 6.6

Dokažte, že funkce $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$ *splňuje tzv.* Laplaceovu rovnici

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\,.$$

Cvičení 6.7

Dokažte, že funkce $g(x,t) = 2 + e^{-t}\sin x$ *splňuje tzv.* rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\,.$$

(Zde je $g(x,t)$ *teplota železné tyče v místě* x *a čase* t*. Co se stane pro* t *jdoucí do nekonečna?).*

7. Gradient, derivace ve směru a tečná rovina

Poznámka

Gradient funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ v daném bodě $b \in \mathbb{R}^n$ je vektor

$$\nabla f(b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(b), \frac{\partial f}{\partial x_2}(b), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(b) \right).$$

Tento vektor ukazuje směr nejvyššího růstu dané funkce.

Cvičení 7.1

Najděte gradient následujících funkcí

(a) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

(b) $f(x, y, z) = xy + xz + zy$,

(c) $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3$,

(d) $f(x, y, z) = zx^2 + xy^2 + yz^2$,

(e) $f(x, y) = xe^{xy^3+3}$,

(f) $f(x, y) = xe^{x^2+y^2}$.

Cvičení 7.2

Najděte gradient funkce $f(x, y) = x^2/10 + y^2/10$*. Jakým směrem by se začala kutálet kulička a kde by se nakonec zastavila, pokud byste ji položili na graf této funkce v bodě* $(1, 3)$*?*

Cvičení 7.3

Představte si, že vyrážíte z Prahy, tedy zhruba z 50 stupňů zeměpisné šířky a 14 stupňů zeměpisné délky, po tuhé zimě na dovolenou. Kolega meteorolog Vám předal vzorec, který hrubě odhaduje teplotu v místě se zeměpisnou šířkou x a délkou y:

$$T(x, y) = (-0,0003)x^2y + (0,9307)y\,.$$

Jakým směrem se vydat, aby se teplota zvyšovala co nejrychleji?

Cvičení 7.4

Kapitán Astroš se prohání vesmírem poblíž strany Merkuru přivrácené ke slunci. Najednou mu začne být nesnesitelné horko a zámky dveří na jeho lodi začnou roztávat. Kudy se má vydat, aby teplota klesla co nejrychleji, jestliže je teplota v těchto místech dána funkcí

$$T(x,y,z) = e^{-x} + e^{-2y} + e^{3z}$$

a kapitán se nachází v bodě $(1,1,1)$*?*

Poznámka

Následující cvičení je demonstrací toho, že chceme-li spočítat derivaci funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ v bodě $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ a ve směru jednotkového (sloupcového) vektoru $\vec{v}$, stačí spočítat gradient a pak se derivace rovná

$$\nabla f(b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot \vec{v}.$$

Cvičení 7.5

Uvažujme graf funkce $z(x, y) = x^2 + 3y^2$. Pronikneme jej s rovinou rovnoběžnou s osou z a procházející přímkou $y = 2x$: vzniklou množinu lze chápat jako graf jednorozměrné funkci nad touto přímkou (pro pořádek: na přímce se pohybujeme směrem z třetího kvadrantu, kde je x a y záporné, do prvního, kde jsou kladná). Najděte analytický předpis nějaké takové jednorozměrné funkce a dokažte, že její derivace v bodě přímky ve vzdálenosti 2 od počátku souřadnic v prvním kvadrantu je rovna

$$\nabla z\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right),$$

kde $\cdot$ značí skalární součin vektorů.

Cvičení 7.6

Spočítejte derivaci funkce f v bodě (x_0, y_0) ve směru vektoru $\vec{d}$, kde

(a) $f(x,y) = x + 2x^2 - 3xy$, $(x_0, y_0) = (1,1)$ *a* $\vec{d} = (3/5, 4/5)$,

(b) $f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, $(x_0, y_0) = (1,0)$ *a* $\vec{d} = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$,

(c) $f(x,y,z) = xyz$, $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$ *a* $\vec{d} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$.

Cvičení 7.7

Představte si, že programujete primitivní simulátor autíčka jedoucího po 3D krajině, jež je dána grafem funkce $z(x, y) = x/2 + y/3 - 2$. *Jediný vstup od uživatele je jednotkový vektor* $\vec{s} = (s_1, s_2)$, *který udává horizontální směr pohybu autíčka a který uživatel nastavuje pomocí šipek.*
Rychlost auta je nepřímo úměrná sklonu povrchu vyjádřenému úhlem α *(v radiánech) a je zadána funkcí* $f(\alpha) = 20 - 40\alpha$. *Najděte funkci* $r(x, y, \vec{s})$, *která udává rychlost autíčka v bodě* (x, y) *pohybujícího se ve směru vektoru jednotkového* $\vec{s}$.

Cvičení 7.8

Jak by vypadala funkce $r(x, y, \vec{s})$ *(z předchozího cvičení), pokud by se autíčko pohybovalo po krajině dané rovnicí* $z = x^2/2 + y^2/2 + xy$*?*

Cvičení 7.9

Odvoďte rovnici tečné roviny v bodě (x_0, y_0) *pro funkci* $f(x, y)$.