

NI-MPI cvičení 1

Analýza I

FIT ČVUT

Autoři: Karel Klouda, Tomáš Kalvoda, Jan Spěvák, Štěpán Starosta
Problémy, návrhy apod. hlaste v [GitLabu](#).

Verze souboru: 2023-10-02 13:42.

Obsah

5. Spojitost a limita
6. Parciální derivace
7. Gradient, derivace ve směru a tečná rovina

Poznámka

Co byste si měli z tohoto cvičení odnést:

- ▶ Jak se parciálně derivuje.
- ▶ Co je to gradient funkce a jaký je jeho geometrický význam.
- ▶ Jak nám gradient pomáhá spočítat derivaci ve směru (a co to je).
- ▶ Jak najít rovnici tečné roviny.

5. Spojitost a limita

Cvičení 5.1

Zjistěte, zda je funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pro } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & \text{pro } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Spojité a po částech spojitá^a v bodě $(0, 0)$.

^aFunkce $f(x, y)$ je po částech spojitá v bodě (x_0, y_0) , pokud jsou funkce jedné proměnné $f(x_0, y)$ a $f(x, y_0)$ spojitě po řadě v bodech y_0 a x_0 .

6. Parciální derivace

Cvičení 6.1

- (a) najděte $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ pro $f(x, y) = xy + e^x \cos y$,
- (b) pro předchozí funkci vyčíslete hodnotu parciální derivace podle x v bodě $(1, \pi/2)$
- (c) najděte $\frac{\partial z}{\partial x}$ a $\frac{\partial z}{\partial y}$ pro $z(x, y) = x^2y^3 + x^3y^4 - e^{xy^2}$,
- (d) najděte hodnotu $\frac{\partial f}{\partial z}$ v bodě $(1, 2, 3)$ pro $f(x, y, z) = \sin(xy/z)$,
- (e) najděte $\frac{\partial f}{\partial x}$ pro $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$,
- (f) najděte $\frac{\partial f}{\partial x}$ pro $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$,
- (g) najděte $\frac{\partial f}{\partial x}$ pro $f(x, y) = \frac{1}{x^3+y^3}$.

Cvičení 6.2

V jakém bodě nemá funkce $\sqrt{x^2 + y^2}$ parciální derivaci a proč?

Cvičení 6.3

Spočítejte druhou parciální derivaci podle x a y , tj. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, pro funkce

(a) $f(x, y) = x^2 y^2$,

(b) $f(x, y) = \sin(xy)$,

(c) $f(x, y) = xy^2 - ye^{-x} - \cos(x - y)$.

Poznámka

Funkci můžeme derivovat dvakrát také podle dvou různých proměnných, takové derivaci se říká *smíšená* a značí se

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Cvičení 6.4

Spočítejte smíšené derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ pro funkce

(a) $f(x, y, z) = e^{xz} + y \cos x$,

(b) $f(x, y, z) = z \cos(xy) + x \sin(yz)$.

To, že obě smíšené derivace v předchozím příkladě vyšly stejné, není náhoda. Platí totiž následující věta:

Věta 6.1

Nechť $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}^2$ a $\mathbf{b} \in D_f$.

Pokud existuje $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{b})$ a funkce $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ je v \mathbf{b} spojitá, potom $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{b})$ existuje a platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{b}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{b}).$$

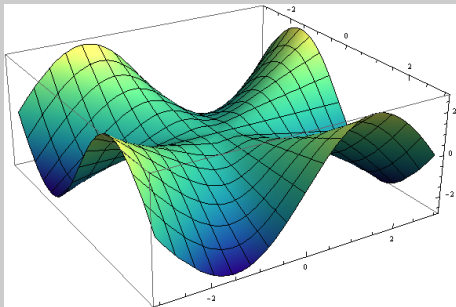
Tedy nezáleží na pořadí parciálního derivování.

Cvičení 6.5

Příkladem, kdy se smíšené derivace nerovnají, je funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{v bodě } (0, 0) \\ \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Zkuste vysvětlit s pomocí grafu této funkce, proč tomu tak je:



Cvičení 6.6

Dokažte, že funkce $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ splňuje tzv. Laplaceovu rovnici

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Cvičení 6.7

Dokažte, že funkce $g(x, t) = 2 + e^{-t} \sin x$ splňuje tzv. rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}.$$

(Zde je $g(x, t)$ teplota železné tyče v místě x a čase t . Co se stane pro t jdoucí do nekonečna?).

7. Gradient, derivace ve směru a tečná rovina

Poznámka

Gradient funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ v daném bodě $b \in \mathbb{R}^n$ je vektor

$$\nabla f(b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(b), \frac{\partial f}{\partial x_2}(b), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(b) \right).$$

Tento vektor ukazuje směr nejvyššího růstu dané funkce.

Cvičení 7.1

Najděte gradient následujících funkcí

(a) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

(b) $f(x, y, z) = xy + xz + zy$,

(c) $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3$,

(d) $f(x, y, z) = zx^2 + xy^2 + yz^2$,

(e) $f(x, y) = xe^{xy^3+3}$,

(f) $f(x, y) = xe^{x^2+y^2}$.

Cvičení 7.2

Najděte gradient funkce $f(x, y) = x^2/10 + y^2/10$. Jakým směrem by se začala kutálet kulička a kde by se nakonec zastavila, pokud byste ji položili na graf této funkce v bodě $(1, 3)$?

Cvičení 7.3

Představte si, že vyrážíte z Prahy, tedy zhruba z 50 stupňů zeměpisné šířky a 14 stupňů zeměpisné délky, po tuhé zimě na dovolenou. Kolega meteorolog Vám předal vzorec, který hrubě odhaduje teplotu v místě se zeměpisnou šířkou x a délkou y :

$$T(x, y) = (-0,0003)x^2y + (0,9307)y .$$

Jakým směrem se vydat, aby se teplota zvyšovala co nejrychleji?

Cvičení 7.4

Kapitán Astroš se prohání vesmírem poblíž strany Merkuru přivrácené ke slunci. Najednou mu začne být nesnesitelné horko a zámky dveří na jeho lodi začnou roztávat. Kudy se má vydat, aby teplota klesla co nejrychleji, jestliže je teplota v těchto místech dána funkcí

$$T(x, y, z) = e^{-x} + e^{-2y} + e^{3z}$$

a kapitán se nachází v bodě $(1, 1, 1)$?

Poznámka

Následující cvičení je demonstrací toho, že chceme-li spočítat derivaci funkce $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ v bodě (b_1, b_2, \dots, b_n) a ve směru jednotkového (sloupcového) vektoru \vec{v} , stačí spočítat gradient a pak se derivace rovná

$$\nabla f(b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot \vec{v}.$$

Cvičení 7.5

Uvažujme graf funkce $z(x, y) = x^2 + 3y^2$. Pronikneme jej s rovinou rovnoběžnou s osou z a procházející přímkou $y = 2x$: vzniklou množinu lze chápat jako graf jednorozměrné funkce nad touto přímkou (pro pořádek: na přímce se pohybujeme směrem z třetího kvadrantu, kde je x a y záporné, do prvního, kde jsou kladná). Najděte analytický předpis nějaké takové jednorozměrné funkce a dokažte, že její derivace v bodě přímky ve vzdálenosti 2 od počátku souřadnic v prvním kvadrantu je rovna

$$\nabla z \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right),$$

kde \cdot značí skalární součin vektorů.

Cvičení 7.6

Spočítejte derivaci funkce f v bodě (x_0, y_0) ve směru vektoru \vec{d} , kde

- (a) $f(x, y) = x + 2x^2 - 3xy$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$ a $\vec{d} = (3/5, 4/5)$,
- (b) $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$ a $\vec{d} = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$,
- (c) $f(x, y, z) = xyz$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ a $\vec{d} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$.

Cvičení 7.7

Představte si, že programujete primitivní simulátor autíčka jedoucího po 3D krajině, jež je dána grafem funkce $z(x, y) = x/2 + y/3 - 2$. Jediný vstup od uživatele je jednotkový vektor $\vec{s} = (s_1, s_2)$, který udává horizontální směr pohybu autíčka a který uživatel nastavuje pomocí šipek.

Rychlost auta je nepřímo úměrná sklonu povrchu vyjádřenému úhlem α (v radiánech) a je zadána funkcí $f(\alpha) = 20 - 40\alpha$. Najděte funkci $r(x, y, \vec{s})$, která udává rychlost autíčka v bodě (x, y) pohybujícího se ve směru vektoru jednotkového \vec{s} .

Cvičení 7.8

Jak by vypadala funkce $r(x, y, \vec{s})$ (z předchozího cvičení), pokud by se autíčko pohybovalo po krajině dané rovnicí $z = x^2/2 + y^2/2 + xy$?

Cvičení 7.9

Odvodte rovnici tečné roviny v bodě (x_0, y_0) pro funkci $f(x, y)$.