NI-MPI cvičení 2

Analýza II

FIT ČVUT

Autoři: Karel Klouda, Tomáš Kalvoda, Jan Spěvák, Štěpán Starosta
Problémy, návrhy apod. hlaste v GitLabu.

Verze souboru: 2024-10-09 11:03.

Obsah

Poznámka

Co byste si měli z tohoto cvičení odnést:

- Co to je kritický bod a jaký je jeho význam pro hledání extrémů.
- Jak pro danou vícerozměrnou funkci najít Hessovu matici (Hessián).
- Jak zjistit, jestli je daný Hessián pozitivně/negativně (semi)definitní nebo indefinitní (Sylvestrovo kritérium),
- a jak nám toto zjištění pomůže k určení povahy kritického bodu: je to maximum/minimum/ani jedno (sedlový bod)?
- Ti zdatnější by měli znát geometrický význam Hessiánu a s jeho pomocí umět vysvětlit, proč z něj můžeme poznat povahu extrému.

A co byste se měli doučit pokud to ještě/už neumíte:

- Řešit soustavu lineárních rovnic a příp. jednodušší nelineární soustavy.
- Spočítat determinant matic o rozměrech 2×2 a 3×3.
- Násobit matice a vektory.
- Derivovat!

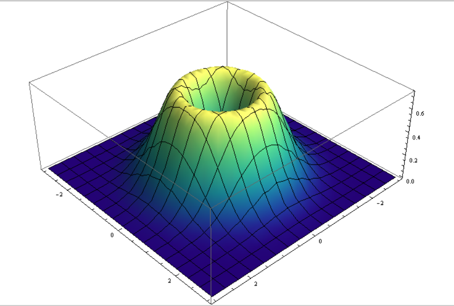
8. Kritické body

Cvičení 8.1

Uvažujme funkci $f(x,y) = 2(x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$.

(a) *S pomocí grafu na následujícím obrázku odhadněte, kde jsou lokální/globální maxima/minima, a určete, která z nich jsou ostrá.*

(b) *Pomocí geometrického významu gradientu najděte přesné souřadnice těchto bodů.*

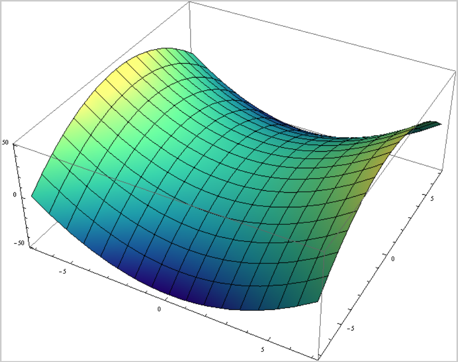


Cvičení 8.2

Uvažujme funkci $f(x, y) = x^2 - y^2$.

(a) *S pomocí grafu na následujícím obrázku odhadněte, v jakých bodech je tečná rovina rovnoběžná s osami* x *a* y*?*

(b) *Pomocí rovnice tečné roviny najděte přesné souřadnice těchto bodů.*



Definice 8.1

Body definičního oboru funkce, kde je gradient dané funkce nulový vektor nebo není definován, se nazývají *kritické body*.

Poznámka

Význam kritických bodů je stejný, jako význam bodů, ve kterých je derivace nulová (či neexistuje) pro jednorozměrné funkce: jsou to body *podezřelé z extrému*. Platí totiž podobně jako v jednorozměrném případě následující věta:

Věta 8.2

Je-li bod $b \in \mathbb{R}^n$ lokální extrém funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a má-li tato funkce v bodě b parciální derivace, potom jsou tyto parciální derivace nulové (tzn. b je kritický bod).

Cvičení 8.3

Najděte všechny kritické body následujících funkcí:

(a) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$,

(b) $f(x,y,z) = 3x^2 + xy + 3zy$,

(c) $f(x,y) = e^{-x^2-7y^2+3}$,

(d) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy + 10$,

(e) $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$.

Cvičení 8.4

Funkce

$$f(x,y) = \frac{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{\pi\sqrt{x^2+y^2}}.$$

není definována v bodě $(0,0)$.

(a) *Jak musíme dodefinovat funkční hodnotu* $f(0,0)$, *aby výsledkem mohla být všude spojitá funkce?*

(b) *Jaké jsou kritické body této spojité funkce?*

9. Hessián, definitnost matic, extrémy

V případě jednorozměrných funkcí jsme mohli rozhodnout, jestli je daný kritický bod minimum, maximum či inflexní bod pomocí druhé derivace a jejího znaménka. V případě vícerozměrné funkce $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hraje roli druhé derivace *Hessova matice (Hessián)*

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

avšak u matice pojem znaménka ztrácí smysl. Přesto (většinou) umíme z této matice určit, jestli se jedná o maximum či minimum: k tomu slouží pojmy pozitivně/negativně (semi)definitní matice.

Definice 9.1

Matice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ je

(i) *pozitivně definitní*, jestliže pro všechny **nenulové** vektory $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\vec{a}^T A\vec{a} > 0,$$

(ii) *pozitivně semidefinitní*, jestliže pro všechny vektory $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\vec{a}^T A\vec{a} \geq 0,$$

(iii) *negativně definitní*, jestliže pro všechny **nenulové** vektory $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\vec{a}^T A\vec{a} < 0,$$

(iv) *negativně semidefinitní*, jestliže pro všechny vektory $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\vec{a}^T A\vec{a} \leq 0,$$

(v) *indefinitní* pokud nenastává ani jeden z výše uvedených případů.

U jednorozměrných funkcí platila pravidla typu: „Je-li druhá derivace v kritickém bodě x_0 kladná, jedná se o minimum a funkce je zde konvexní.“ Ve více rozměrech kladnost a zápornost nahrazuje pozitivní resp. negativní definitnost, jinak pravidla zůstávají analogická.

Věta 9.2 (Postačující podmínka existence extrému a sedlového bodu)

Nechť $\mathbf{b} \in D_f$ *je stacionární bod funkce* $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^n$*. Nechť existuje okolí* $H(\mathbf{b}) \subset D_f$ *takové, že* f *má na* $H(\mathbf{b})$ *spojité všechny druhé parciální derivace, potom*

- *je-li* $\nabla^2 f(\mathbf{b})$ *pozitivně definitní, pak* $\mathbf{b}$ *je bodem ostrého lokálního minima;*
- *je-li* $\nabla^2 f(\mathbf{b})$ *negativně definitní, pak* $\mathbf{b}$ *je bodem ostrého lokálního maxima;*
- *je-li* $\nabla^2 f(\mathbf{b})$ *indefinitní, pak* $\mathbf{b}$ *je sedlový bod.*

Geometrický význam Hessiánu: V předchozím cvičení jsme ukázali, jak lze gradient použít k výpočtu *první derivace v bodě* b *ve směru* daného jednotkového vektoru $\vec{s}$: ta se rovnala skalárnímu součinu gradientu v tomto bodě a tohoto vektoru:

$$\nabla f(b) \cdot \vec{s}\,.$$

Podobně bychom se mohli ptát, jak spočítat druhou derivaci v bodě b ve směru jednotkového (sloupcového) vektoru $\vec{s}$. A odpověď je, že tato derivace se rovná

$$\vec{s}^T \cdot \nabla^2 f(b) \cdot \vec{s},$$

tedy Hessiánu maticově vynásobeným zleva i zprava směrovým vektorem. Pomocí tohoto poznatku můžeme interpretovat pravidlo „Je-li $\nabla^2 f(b)$ pozitivně definitní, je b bodem ostrého lokálního minima.“ takto: uděláme-li v daném kritickém bodě řez libovolným směrem a vzniklá jednorozměrná funkce bude mít v tomto bodě druhou derivaci vždy kladnou, jedná se o lokální minimum původní vícerozměrné funkce.

Základní cvičení 9.1

Uvažme funkce

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= x^2 + y^2 \\
g(x,y) &= x^2 - y^2 \\
h(x,y) &= x^2 + y^3 \\
u(x,y) &= xy \\
w(x,y) &= (x+y)^2 \\
z(x,y) &= x^4 + y^4
\end{aligned}
$$

Pro všechny funkce nalezněte všechny kritické body a zjistěte, zda se jedná o lokální minimum, lokální maximum nebo sedlový bod. Prof funkce f a g spočtěte první a druhou derivaci ve směru přímky $y = x$ v bodě $(1, 1)$.

Základní cvičení 9.2

Mějme

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$$

Nalezněte všechny kritické body a zjistěte, zda se jedná o lokální minimum, lokální maximum nebo sedlový bod.

Cvičení 9.3

Najděte Hessián následujících funkcí:

(a) $f(x, y) = x^2y^2$,

(b) $f(x, y) = e^{-(x+y)}$,

(c) $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$.

Cvičení 9.4

V bodě b najděte druhou derivaci funkce f ve směru vektoru $\vec{s}$, kde

(a) $f(x, y) = x + 2x^2 - 3xy, b = (1, 1)$ a $\vec{s}^T = (3/5, 4/5)$,

(b) $f(x, y) = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right), b = (1, 0)$ a $\vec{s}^T = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$,

(c) $f(x, y, z) = xyz, b = (1, 1, 1)$ a $\vec{s}^T = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$.

Poznámka

Poznat, jestli je matice pozitivně či negativně (semi)definitní, není jednoduchý úkol. Pomoci nám můžou následující kritéria:

Věta 9.3

Buď M symetrická *matice. Potom platí následující:*

- *Matice* M *je pozitivně definitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou kladná.*
- *[Sylvestrovo kritérium] Pro matici* $M \in \mathbb{R}^{n,n}$ *definujeme matice* $M_1, M_2, \ldots, M_n$ *takto:* $M_k \in \mathbb{R}^{k,k}$ *je čtvercová matice v levém horním rohu matice* M*. Platí:*
  - *Matice* M *pozitivně definitní právě tehdy, když je determinant všech matic* $M_1, M_2, \ldots, M_n$ *kladný.*
  - *Matice* M *negativně definitní právě tehdy, když je determinant matic* M_k *záporný pro* k *liché a kladný pro* k *sudé.*

Důležitá poznámka

Všimněte si, že předchozí větu lze použít pouze pro určení definitnosti, nikoli semidefinitnosti!

Cvičení 9.5

Rozhodněte, pro jaké hodnoty konstant $A, B, C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *je bod* $(0,0)$ *pro funkci* $g(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ *bodem lokálního minima resp. lokálního maxima.*

Cvičení 9.6

Najděte všechny maxima a minima funkce

(a) $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2 + 16$,

(b) $f(x,y) = 3x^2 - 5xy + 3y^2$.

Cvičení 9.7

Najděte lokální maxima, minima a sedlové body funkce

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{(-x^2-y^2)/2}.$$

Cvičení 9.8

Najděte bod na rovině $x + 3y - z = 6$, *který je nejblíže počátku* $(0,0,0)$.

Cvičení 9.9

Najděte bod na „dvoj-kuželu“ $z^2 = x^2 + y^2$*, který je nejblíže bodu* $(1, 2, 0)$*.*

Cvičení 9.10

Máme navrhnout tvar krabice (ve tvaru kvádru) bez víka na kočičí žrádlo tak, aby se do ní vešlo 256 *cm*^{3} *zmíněné hmoty a abychom co nejvíce ušetřili na materiálu. Jaké budou rozměry této krabice? Jaký by byl výsledek, pokud by byla krabice zavřená i shora?*

Cvičení 9.11

Najděte lokální maxima a minima funkcí

(a) $f(x, y) = e^{1+x^2-y^2}$,

(b) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 - 3x_1x_2 + 4x_2x_3 + 6x_3^2$,

(c) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 + x_1^2 - x_2 + x_2x_3 + x_2^2 + 3x_3^2$.

Poznámka

Na následujícím příkladě si ukážeme *metodu nejmenších čtverců* (the least squares method). Ta se používá hlavně ve statistice při regresní analýze, což je jedna z nejpoužívanějších (ne-li nejpoužívanější) metoda analyzování dat.

Cvičení 9.12

Představme si, že máme program, který nějakým způsobem zpracovává text. Z teoretické analýzy víme, že délka běhu tohoto programu závisí na mnoha faktorech, ale v zásadě je úměrná délce vstupu: tzn. „skoro přesně platí“

$$t(n) = a + bn,$$

kde $t(n)$ je délka běhu pro text délky n a a, b jsou neznámé parametry.
Po získání vstupu od uživatele byste chtěli vypsat hlášku: „Zpracování Vašeho textu bude trvat asi x vteřin.“, jak co nejlépe odhadnout hodnotu x?

Cvičení 9.13

Uvažujme funkci $f(x, y) = x^3 + xy + y^2$*.*
Prověřte, zda je v následujících bodech lokální extrém funkce f*:*

a) $(0, 0)$;
b) $(-2, 6)$;
c) $(0, 5)$;
d) $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right)$.