NI-MPI cvičení 3 handout 13. února 2025
Problémy, návrhy apod. hlaste v GitLabu.
Verze souboru: 2024-10-23 11:42.

## Obsah



Co byste si měli z tohoto cvičení odnést:

- Jak sestavit Lagrangeovu funkci pro optimalizaci s vazbami ve tvaru rovností.
- Jak najít kritické body a rozhodnout o jejich povaze (ostrá lok. maxima/minima)

A co byste se měli doučit, pokud to ještě/už neumíte:

- Hledat lokální extrémy funkcí více proměnných bez vazeb.

## 10 Vázané extrémy s rovnostními podmínkami: Lagrangeova metoda

V tomto cvičení budeme řešit následující úlohu: hledáme opět lokální extrémy funkce více (reálných) proměnných

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

ovšem pouze pro množinu takových $x_1, x_2, \dots, x_n$, které splňují následující podmínky:

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Označme si množinu všech $x_1, x_2, \dots, x_n$ splňujících těchto $p$ rovnic jako $\mathcal{M}$, tedy

$$\mathcal{M} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Aby všechno, co píšeme níže, platilo (tj. bylo možné dokázat), je třeba o funkcích $f$ a $g_i$ něco málo předpokládat (a tedy ověřit): funkce $f$ a $g_i$ mají spojité všechny druhé parciální derivace (jsou z $C_2(\mathbb{R}^n)$).

Začneme příkladem, který lze spočítat bez využití Lagrangeovy metody.

**Cvičení 10.1** Najděte všechna lokální maxima a minima funkce $f(x, y) = 3x - 4y + 3$ na množině bodů kružnice $x^2 + y^2 = 4$. ?

a) Využijte faktu, že graf funkce $f$ je (nakloněná) rovina, a extrémy najděte s využitím znalosti gradientu (a jeho geometrické interpretace).

b) Převeďte úlohu na problém hledání extrémů funkce jedné proměnné pomocí parametrizace kružnice.

Funkci $L : \mathcal{M} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definovanou

$$L(x; \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x)$$

nazýváme **Lagrangeovou funkcí** pro danou úlohu.

**Věta 10.1 — Postačující podmínka existence ostrého lokálního minima pro rovnostní vazby.** Nechť $f, g_j, j \in \{1, \ldots, m\}$ mají spojité všechny druhé parciální derivace na nějaké otevřené nadmnožině $\tilde{\mathcal{M}} \supset \mathcal{M}$. Pokud dvojice $(x^*; \lambda^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ splňuje podmínky:

(0) (0. derivace) $x^* \in \mathcal{M}$;

(1) (1. derivace) $\forall i$, $\frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*; \lambda^*) = 0$;

(2) (2. derivace) pro každý (sloupcový) vektor $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ splňující

$$\nabla g_j(x^*) \cdot v = 0, \quad \text{pro } \forall j \in \{1, \ldots, m\},$$

platí

$$v^T \cdot \nabla_x^2 L(x^*; \lambda^*) \cdot v > 0;$$

kde $\nabla_x^2 L$ je Hessova matice funkce $L$ vzhledem k proměnným $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, potom je $x^*$ bodem ostrého lokálního minima.

!

Všimněme si, že body (0) a (1) jsou ekvivalentní rovnosti $\nabla L(x^*; \lambda^*) = 0$.

**Cvičení 10.2** Najděte všechny extrémy a určete jejich povahu pro funkci a vazbu z cvičení 10.1.

**Základní cvičení 10.3** Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ za podmínky

a) $g(x, y) = y - 1 = 0$;

b) $g(x, y) = y = 0$;

c) $g(x, y) = x^2 + 2x + y^2 = 0$.

**Cvičení 10.4** Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = xy$ na množině zadané podmínkou

$$x + y = 1.$$

**Cvičení 10.5** Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ na množině zadané podmínkou

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

kde $a$ a $b$ jsou nenulová reálná čísla.

**Cvičení 10.6** Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = 2x^2 - 2y^2$ na množině zadané podmínkou

$$y + e^{-x^2} = 1.$$

**Cvičení 10.7** Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ na množině zadané podmínkou

$$x - y = \frac{\pi}{4}.$$

**Cvičení 10.8** Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = xyz$ na množině zadané podmínkami

$$x + y + z = 5 \quad \text{a} \quad xy + yz + zx = 8.$$

Geometrická představa Lagrangeovy metody se mimo jiné opírá o fakt, že gradient je kolmý na tečnu na vrstevnici, pokud tato tečna existuje. Toto vyjádření i naše představivost vyžaduje, aby funkce měla pouze dvě proměnné. Vrstevnicí je myšlena množina bodů, jejichž funkční hodnota je rovna zafixované konstantě. K dokázání tohoto faktu je třeba věta o implicitní funkci a její derivaci.

Kolmost je zachována i pro funkce více než 2 proměnných s tím, že

- pojem vrstevnice je někdy rezervován pro $\mathbb{R}^2$, obecně lze hovořit o „množině bodů s konstantní funkční hodnotou“ (*level set*):

$$D_f(c) = \{(x_1, \dots, x_n) \in D_f \colon f(x_1, \dots, x_n) = c\}\,;$$

- místo tečny je nutno hovořit o tečném prostoru.

**Cvičení 10.9 — Kolmost gradientu a tečny vrstevnice v $\mathbb{R}^2$.** Pro funkci $f(x,y) = \frac{x^5}{2} - xy^3$ uvažujte její vrstevnici

$$D_f\left(\frac{1}{2}\right) = \left\{(x,y) \colon f(x,y) = \frac{1}{2}\right\}.$$

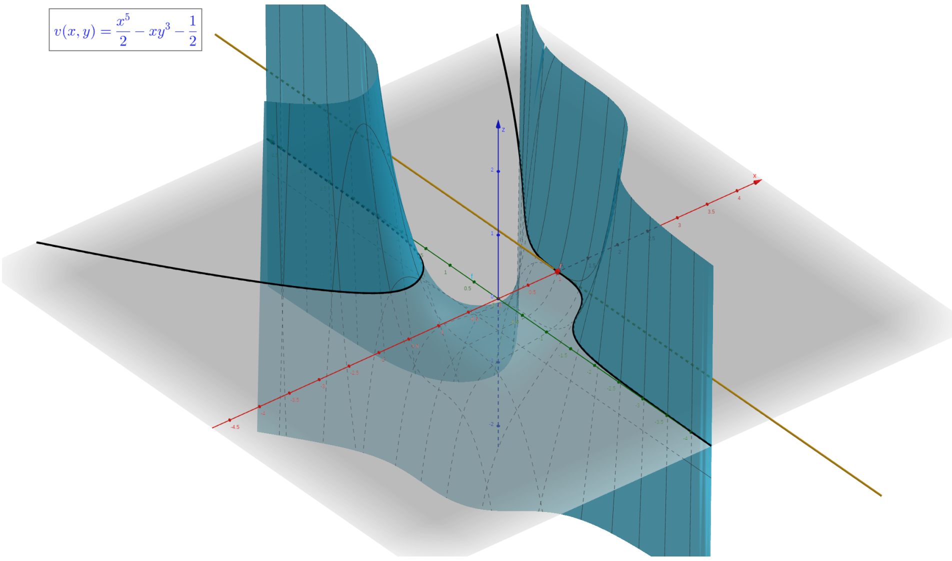
(Ilustrace na obrázku 10 níže.)

1. Ukažte, že pro každý bod $A \in D_f\left(\frac{1}{2}\right)$ existuje okolí $H(A)$ takové, že množinu $H(A) \cap D_f\left(\frac{1}{2}\right)$ je lze jednoznačně vyjádřiti jako graf funkce $\varphi$ proměnné $x$ nebo jako graf funkce $\psi$ proměnné $y$.
2. Ukažte, že v každém bodě $A \in D_f\left(\frac{1}{2}\right)$ je gradient funkce $f$ kolmý na tečnu ke grafu funkce $\varphi$ nebo $\psi$ z bodu (1).
3. Pro body $(1,0)$ a $(2,2)$ napište rovnici tečny ke grafu funkce z bodu (1).
4. Uvažme vrstevnici $D_f(0)$. Ve kterých bodech ji nelze lokálně popsat implicitní funkcí? Porovnejte s obrázkem 10.

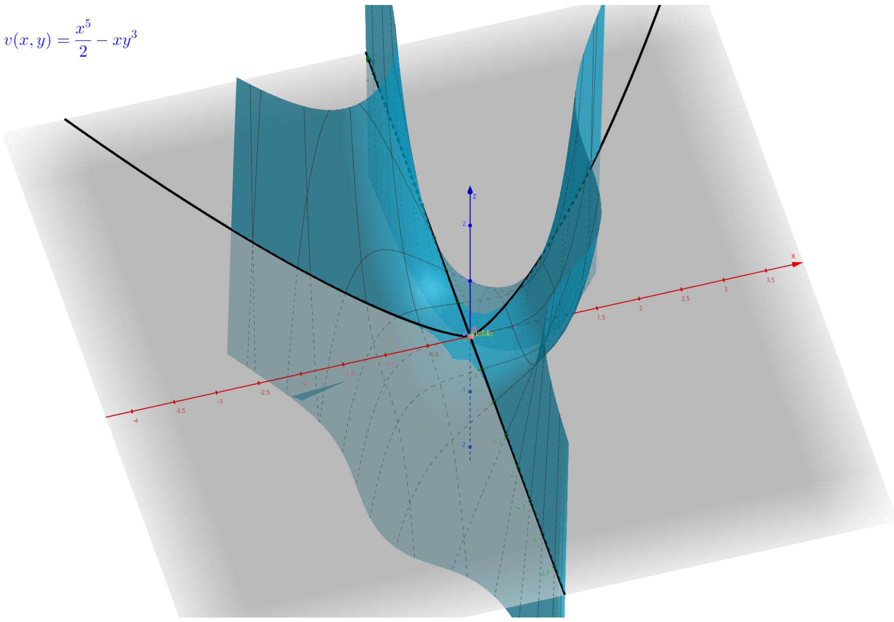
# 11 Vázané extrémy s rovnostními podmínkami a nerovnostními podmínkami

**Základní cvičení 11.1** Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y$ za podmínky

$$h(x,y) = x^2 + y^2 \leq 1.$$




Obrázek 1: Vyobrazení vrstevnice z cvičení 10.9.




Obrázek 2: Vyobrazení vrstevnice z cvičení 10.9(4).

**Základní cvičení 11.2** Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ za podmínky

$$h(x,y) = x^2 + 2x + y^2 \leq 0.$$

**Cvičení 11.3** Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 - y^2$ na množině zadané podmínkou

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

**Cvičení 11.4** Uvažujme funkce $f(x,y) = x^3 + xy + y^2$ a $h(x,y) = x + 2y - 10$.

Prověřte, zda jsou body z následujícího seznamu, body lokálního extrému funkce $f$ vzhledem k podmínce $h(x,y) \leq 0$:

a) $(0,0)$;

b) $(-2,6)$;

c) $(0,5)$;

d) $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right)$;

## Řešení

*Řešení Cvičení 10.1:* v bodě (6/5,-8/5) je ostré lok. maximum a v bodě (-6/5,8/5) je ostré lok. minimum

*Řešení Cvičení 10.4:* maximum v bodě (1/2, 1/2)

*Řešení Cvičení 10.5:* minimum v bodě $\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$

*Řešení Cvičení 10.6:* v bodě $(0,0)$ je ostré lokální minimum.

*Řešení Cvičení 10.7:* extrémy jsou body $(x,y)$, kde $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$ a $y = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$ pro všechna $k \in \mathbb{Z}$. Pro lichá $k$ se jedná o minima, pro sudá o maxima.

*Řešení Cvičení 10.8:* minima v bodech (2,2,1), (2,1,2) a (1,2,2) a maxima v $\frac{1}{3}(4,4,7)$, $\frac{1}{3}(4,7,4)$ a $\frac{1}{3}(7,4,4)$

*Řešení Cvičení 10.9:*

1. Ukažte že gradient $f$ je ve všech bodech $f$ nenulový a užijte větu o implicitní funkci.
2. Užitím věty o implicitní funkci nalzněte směrový vektor tečny v obecném bodě $A \in V$ a ukažte, že jeho skalární součin s gradientem je 0.
3. V bodě $(1,0)$: $x = 1$, v bodě $(2,2)$: $y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$.

*Řešení Cvičení 11.3:* $(0, \pm 2)$ je minimum a $(\pm 2, 0)$ maximum

## ChangeLog

| Verze | Datum | Autor | Log |
|---|---|---|---|
| 1.4 | 17.10.24 | JS | Úprava cvičení na kolmost gradientu a tečny. |
| 1.3 | 10.10.23 | ŠS | Oprava připomenutí postačující podmínky. |
| 1.2 | 2.10.23 | ŠS | Přidáno cvičení na kolmost gradientu a tečny. |
| 1.2 | 3.10.22 | ŠS | Úprava znění věty pro rovnostní podmínky. |
| 1.12 | 10.11.21 | ŠS | Správné umístění nového příkladu. |
| 1.11 | 10.11.21 | ŠS | Vektor v místo vektoru z v hlavní větě. |
| 1.1 | 3.12.18 | ŠS | Oprava řešení 17.8. |
| 1.0 | 26.11.18 | ŠS | Verze z roku 2017/2018. |