NI-MPI cvičení 3

Analýza III

FIT ČVUT

Autoři: Karel Klouda, Tomáš Kalvoda, Jan Spěvák, Štěpán Starosta
Problémy, návrhy apod. hlaste v GitLabu.

Verze souboru: 2024-10-23 11:42.

Obsah

Poznámka

Co byste si měli z tohoto cvičení odnést:

- Jak sestavit Lagrangeovu funkci pro optimalizaci s vazbami ve tvaru rovností.
- Jak najít kritické body a rozhodnout o jejich povaze (ostrá lok. maxima/minima)

A co byste se měli doučit, pokud to ještě/už neumíte:

- Hledat lokální extrémy funkcí více proměnných bez vazeb.

10. Vázané extrémy s rovnostními podmínkami: Lagrangeova metoda

V tomto cvičení budeme řešit následující úlohu: hledáme opět lokální extrémy funkce více (reálných) proměnných

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

ovšem pouze pro množinu takových $x_1, x_2, \dots, x_n$, které splňují následující podmínky:

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Označme si množinu všech $x_1, x_2, \dots, x_n$ splňujících těchto p rovnic jako $\mathcal{M}$, tedy

$$\mathcal{M} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Aby všechno, co píšeme níže, platilo (tj. bylo možné dokázat), je třeba o funkcích f a g_i něco málo předpokládat (a tedy ověřit): funkce f a g_i mají spojité všechny druhé parciální derivace (jsou z $C_2(\mathbb{R}^n)$).
Začneme příkladem, který lze spočítat bez využití Lagrangeovy metody.

Cvičení 10.1

Najděte všechna lokální maxima a minima funkce $f(x, y) = 3x - 4y + 3$ na množině bodů kružnice $x^2 + y^2 = 4$.

a) *Využijte faktu, že graf funkce f je (nakloněná) rovina, a extrémy najděte s využitím znalosti gradientu (a jeho geometrické interpretace).*

b) *Převeďte úlohu na problém hledání extrémů funkce jedné proměnné pomocí parametrizace kružnice.*

Funkci $L : \mathcal{M} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definovanou

$$L(x; \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x)$$

nazýváme **Lagrangeovou funkcí** pro danou úlohu.

Věta 10.1 (Postačující podmínka existence ostrého lokálního minima pro rovnostní vazby)

Nechť $f, g_j, j \in \{1, \ldots, m\}$ *mají spojité všechny druhé parciální derivace na nějaké otevřené nadmnožině* $\tilde{\mathcal{M}} \supset \mathcal{M}$*. Pokud dvojice* $(x^*; \lambda^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *splňuje podmínky:*

(0) *(0. derivace)* $x^* \in \mathcal{M}$*;*

(1) *(1. derivace)* $\forall i, \frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*; \lambda^*) = 0$*;*

(2) *(2. derivace) pro každý (sloupcový) vektor* $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ *splňující*

$$\nabla g_j(x^*) \cdot v = 0, \quad \text{pro } \forall j \in \{1, \ldots, m\},$$

platí

$$v^T \cdot \nabla_x^2 L(x^*; \lambda^*) \cdot v > 0;$$

kde $\nabla_x^2 L$ *je Hessova matice funkce* L *vzhledem k proměnným* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$*, potom je* x^* *bodem ostrého lokálního minima.*

Všimněme si, že body (0) a (1) jsou ekvivalentní rovnosti $\nabla L(x^*; \lambda^*) = 0$.

Cvičení 10.2

Najděte všechny extrémy a určete jejich povahu pro funkci a vazbu z cvičení 10.1.

Základní cvičení 10.3

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ *za podmínky*

a) $g(x, y) = y - 1 = 0$;

b) $g(x, y) = y = 0$;

c) $g(x, y) = x^2 + 2x + y^2 = 0$.

Cvičení 10.4

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = xy$ *na množině zadané podmínkou*

$$x + y = 1.$$

Cvičení 10.5

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ *na množině zadané podmínkou*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

kde a *a* b *jsou nenulová reálná čísla.*

Cvičení 10.6

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = 2x^2 - 2y^2$ *na množině zadané podmínkou*

$$y + e^{-x^2} = 1.$$

Cvičení 10.7

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ *na množině zadané podmínkou*

$$x - y = \frac{\pi}{4}.$$

Cvičení 10.8

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = xyz$ na množině zadané podmínkami

$$x + y + z = 5 \quad \textit{a} \quad xy + yz + zx = 8.$$

Poznámka

Geometrická představa Lagrangeovy metody se mimo jiné opírá o fakt, že gradient je kolmý na tečnu na vrstevnici, pokud tato tečna existuje. Toto vyjádření i naše představivost vyžaduje, aby funkce měla pouze dvě proměnné. Vrstevnicí je myšlena množina bodů, jejichž funkční hodnota je rovna zafixované konstantě. K dokázání tohoto faktu je třeba věta o implicitní funkci a její derivaci.
Kolmost je zachována i pro funkce více než 2 proměnných s tím, že

- pojem vrstevnice je někdy rezervován pro $\mathbb{R}^2$, obecně lze hovořit o „množině bodů s konstantní funkční hodnotou“ (*level set*):

$$D_f(c) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in D_f \colon f(x_1, \ldots, x_n) = c\}\,;$$

- místo tečny je nutno hovořit o tečném prostoru.

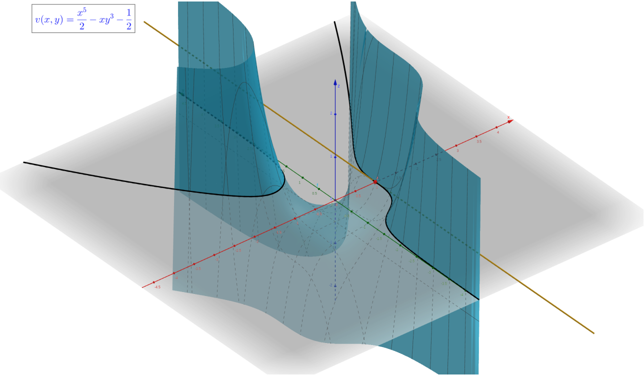
Cvičení 10.9 (Kolmost gradientu a tečny vrstevnice v $\mathbb{R}^2$)

Pro funkci $f(x,y) = \frac{x^5}{2} - xy^3$ *uvažujte její vrstevnici*

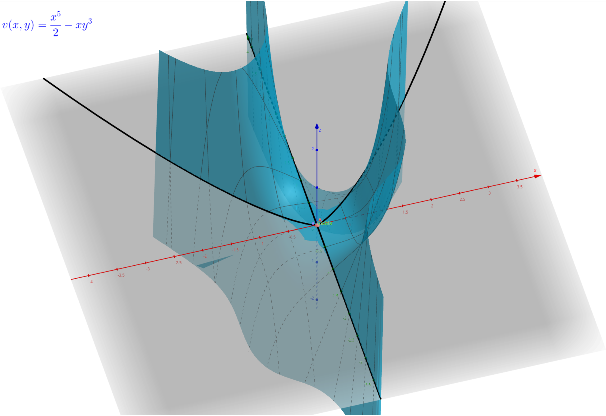
$$D_f\left(\frac{1}{2}\right) = \left\{(x,y)\colon f(x,y) = \frac{1}{2}\right\}.$$

(Ilustrace na obrázku 10 níže.)

1. *Ukažte, že pro každý bod* $A \in D_f\left(\frac{1}{2}\right)$ *existuje okolí* $H(A)$ *takové, že množinu* $H(A) \cap D_f\left(\frac{1}{2}\right)$ *je lze jednoznačně vyjádřiti jako graf funkce* φ *proměnné* x *nebo jako graf funkce* ψ *proměnné* y*.*
2. *Ukažte, že v každém bodě* $A \in D_f\left(\frac{1}{2}\right)$ *je gradient funkce* f *kolmý na tečnu ke grafu funkce* φ *nebo* ψ *z bodu (1).*
3. *Pro body* $(1,0)$ *a* $(2,2)$ *napište rovnici tečny ke grafu funkce z bodu (1).*
4. *Uvažme vrstevnici* $D_f(0)$*. Ve kterých bodech ji nelze lokálně popsat implicitní funkcí? Porovnejte s obrázkem 10.*



Obrázek 1: Vyobrazení vrstevnice z cvičení 10.9.



Obrázek 2: Vyobrazení vrstevnice z cvičení 10.9(4).

11. Vázané extrémy s rovnostními podmínkami a nerovnostními podmínkami

Základní cvičení 11.1

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y$ *za podmínky*

$$h(x,y) = x^2 + y^2 \leq 1.$$

Základní cvičení 11.2

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ *za podmínky*

$$h(x,y) = x^2 + 2x + y^2 \leq 0.$$

Cvičení 11.3

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 - y^2$ *na množině zadané podmínkou*

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

Cvičení 11.4

Uvažujme funkce $f(x,y) = x^3 + xy + y^2$ *a* $h(x,y) = x + 2y - 10$*.*
Prověřte, zda jsou body z následujícího seznamu, body lokálního extrému funkce f *vzhledem k podmínce* $h(x,y) \leq 0$*:*

a) $(0,0)$;
b) $(-2,6)$;
c) $(0,5)$;
d) $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right)$;