NI-MPI cvičení 4 handout 13. února 2025
Problémy, návrhy apod. hlaste v GitLabu.
Verze souboru: 2024-11-06 08:11.

Obsah

Co byste si měli z tohoto cvičení odnést:

- Jak spočítat vícerozměrný integrál přes obdélníkovou a obecnou oblast.
- Jak provést substituci ve vícerozměrném intergrálu.

A co byste se měli doučit pokud to ještě/už neumíte:

- Integrovat funkce jedné proměnné.

12 Integrály přes obdélníkovou oblast

Při výpočtech využíváme násl. větu, která nám dovoluje problém integrace přes více proměnných převést (v „rozumných" případech) na integraci přes jednu proměnnou.

Věta 12.1 Buď $f(x, y)$ integrabilní funkce na $D = [a, b] \times [c, d]$. Pokud existuje jeden z integrálů

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \quad \text{nebo} \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

potom je roven dvojnému integrálu

$$\iint_D f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y\,.$$

!

Základní cvičení 12.1 Buď $f(x, y) = \frac{x^2}{1+y^2}$ a $D = [2, 3] \times [0, 3]$. Spočítejte

$$\int_D f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

!

Cvičení 12.2 Buď $f(x, y) = e^{2x+y}$ a $D = [0, 1] \times [0, 3]$. Spočítejte

$$\iint_D f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

?

Cvičení 12.3 Buď $f(x, y) = \sin(x + y)$ a $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. Spočítejte

$$\iint_D f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

?

Cvičení 12.4 Spočítejte objem tělesa ohraničeného rovinami $x = 0, x = 3, y = -1, y = 1, z = 0$ a plochou $z = f(x, y) = x^2 + y^2$.

Cvičení 12.5 Buď $f(x, y, z) = (x + 2y + 3z)^2$ a $D = [0, 1] \times [-\frac{1}{2}, 0] \times [0, \frac{1}{3}]$. Spočítejte

$$\iiint_D f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

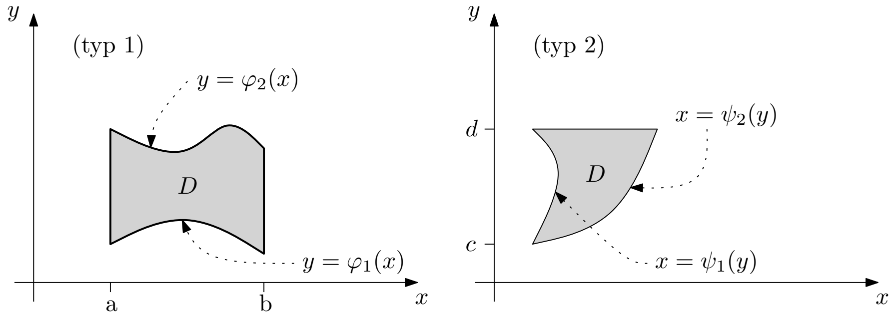
Cvičení 12.6 Buď $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$ a $D = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. Spočítejte

$$\iiint_D f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

13 Integrály přes obecnou oblast

Budeme uvažovat dva typy oblastí:

- (typ 1) x je z intervalu $[a, b]$ a y je omezené spoj. funkcemi $\varphi_1(x)$ a $\varphi_2(x)$ splňujícími $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ pro všechna $x \in [a, b]$,
- (typ 2) y je z intervalu $[c, d]$ a x je omezené spoj. funkcemi $\psi_1(y)$ a $\psi_2(y)$ splňujícími $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ pro všechna $y \in [c, d]$.



A integrály přes takovéto oblasti budeme počítat dle následující věty.

Věta 13.1 Pokud integrály napravo existují, platí pro oblast D, že

- je-li D typu 1, máme
$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$
- je-li D typu 2, máme
$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Základní cvičení 13.1 Buď $f(x,y) = xy$. Spočítejte

$$\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde D je omezená množina ohraničená křivkami $y^2 = x$ a $y = x - 2$.

Cvičení 13.2 Vypočítejte

$$\iint_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

kde D je oblast pod grafem funkce $y = x^2$ pro $x \in [0, \frac{1}{2}]$.

Cvičení 13.3 Vypočítejte

$$\iint_D (x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

kde D je „vyplněný“ trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(0,1)$ a $(2,2)$.

Cvičení 13.4 Vypočítejte

$$\int_0^1 \int_x^1 xy\mathrm{d}y\mathrm{d}x\,.$$

Cvičení 13.5 Vypočítejte

$$\int_0^1 \int_{1-y}^1 (x+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Cvičení 13.6 Vypočítejte

$$\iint_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

kde D je „vyplněný“ trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(1,0)$ a $(2,1)$.

14 Substituce v integrálu

Mějme $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\Psi(\mathbf{v}) = (\Psi_1(\mathbf{v}), \ldots, \Psi_n(\mathbf{v}))$. **Jacobiho matice** funkce Ψ je následující zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n,n}$ (pro $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$)

$$J_\Psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial v_1} & \cdots & \frac{\partial \Psi_1}{\partial v_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Psi_n}{\partial v_1} & \cdots & \frac{\partial \Psi_n}{\partial v_n} \end{pmatrix},$$

pokud všechny parciální derivace existují.

Věta 14.1 Nechť D je omezená uzavřená množina na $\mathbb{R}^n$. Nechť $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ má spojité všechny parciální derivace (všech složek) na nějaké otevřené nadmnožině množiny D a *skoro všude* na D platí, že Ψ je bijekce a $\det J_\Psi$ je nenulový. Potom pro každou spojitou funkci $f : D \to \mathbb{R}$ platí

$$\int_{\psi(D)} f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_D f(\Psi(\mathbf{v}))\,|\det J_\Psi(\mathbf{v})|\,\mathrm{d}\mathbf{v}$$

kde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Základní cvičení 14.1 Buď $f(x, y) = 3x + 2y - 1$. Spočítejte

$$\int_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde $D = \{(x, y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 4 \text{ a } x \le y\}$. ■

Cvičení 14.2 Spočtěte

$$\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \le y \le x + 1, 1 - x \le y \le 2 - x\}$.

Použijte substituci $u = x + y, v = x - y$.

?

Cvičení 14.3 Spočtěte

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4, x \le y \le \sqrt{3}x\right\}$.

?

Cvičení 14.4 Mějme desku ve tvaru čtvrtkruhu o poloměru r. Plošná hustota desky v daném bodě je rovna druhé mocnině vzdálenosti tohoto bodu od středu kruhu. Spočtěte souřadnice těžiště této desky.

?

Cvičení 14.5 Vypočtěte objem (3D) koule o poloměru r. ■

Řešení

Řešení Cvičení 12.2:

$$\iint_D e^{2x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^3 \left(\int_0^1 e^{2x+y}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^3 \left[\frac{1}{2}e^{2x+y}\right]_{x=0}^1 \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^3 (e^{2+y} - e^y)\mathrm{d}y =$$
$$= \frac{1}{2}(e^2 - 1)\int_0^3 e^y\mathrm{d}y = \frac{(e^2-1)(e^3-1)}{2}$$

Řešení Cvičení 12.3: 0 (plocha pod rovinou danou osami x a y se počítá jako záporná, stejně jako v případě funkcí jedné proměnné)

Řešení Cvičení 12.4: 20

Řešení Cvičení 12.5: $\frac{1}{12}$

Řešení Cvičení 12.6: $(e - 1)^3$

Řešení Cvičení 13.2:

$$\iint_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{1/2} \left(\int_0^{x^2} (x+y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{x^2} \mathrm{d}x = \int_0^{1/2} (x^3 + \frac{x^4}{2} \mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{10} \right]_0^{1/2} = \frac{3}{160}$$

Řešení Cvičení 13.3:

$$\iint_D (x+y)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \left(\int_x^{x/2+1} (x+y)^2 \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \cdots = \frac{21}{6}$$

Řešení Cvičení 13.4: $\frac{1}{8}$

Řešení Cvičení 13.5: $\frac{7}{12}$

Řešení Cvičení 13.6: $\frac{1}{3}$

Řešení Cvičení 14.2: $\frac{1}{4}$

Řešení Cvičení 14.3: $\frac{7\pi}{36}$

Řešení Cvičení 14.4: Těžiště je ve vzdálenoti $\frac{9r\sqrt{2}}{5\pi}$ od středu kruhu na jeho ose zrcadlové symetrie (souřadnice záleží na volbě souřadného systému).

ChangeLog

Verze	Datum	Autor	Log
1.21	6.11.24	ŠS	Oprava připomenutí věty o substituci. Odstranění problematického cvičení o Lebesgueově integrálu.
1.2	30.11.20	ŠS	Přidaná poznámka k poslednímu cvičením o substituci.
1.1	11.12.19	ŠS	Oprava výsledku prvního příkladu na substituci.
1.0	25.11.19	ŠS	Výchozí verze.