

Obsah

16 Odhady v numerických algoritmech 33

Řešení 34

16 Odhady v numerických algoritmech

Lemma 16.1. *Pokud $|\delta_i| \leq \mathbf{u}$ a $|\rho_i| = 1$ pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$, $n\mathbf{u} < 1$, tak platí*


$$\prod_{i=1}^n (1 + \delta_i)^{\rho_i} = 1 + \Theta_n,$$

kde $|\Theta_n| \leq \frac{n\mathbf{u}}{1 - n\mathbf{u}}$.

Následující značení se hodí pro počítání nakumulovaných chyb (zanedbává přesnou hodnotu nakumulované chyby):

Značení 16.2. $\langle n \rangle = \prod_{i=1}^n (1 + \delta_i)^{\rho_i}$

Cvičení 16.1 Dokažte lemma 16.1. 


Základní cvičení 16.2 Mějme pevně danou množinu strojových čísel F (např. v jednoduché přesnosti) a uvažujme standardní model aritmetických operací. 


Uvažujme algoritmus $V : F^n \rightarrow F$, který počítá skalární součin, tedy

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n,$$

 kde $\alpha \in F$ jsou pevně zvolené parametry.


1. Odhadněte dopřednou chybu.
2. Odhadněte zpětnou chybu.

Předpokládáme, že nedojde k podtečení, přetečení apod. 

Základní cvičení 16.3 Mějme pevně danou množinu strojových čísel F (např. v jednoduché přesnosti) a uvažujme standardní model aritmetických operací. 

Uvažujme zobrazení $p : x \mapsto (x - 2)^9$ a 3 způsoby jeho výpočtu:

- a) $p_a(x) = (x - 2)^9$;
- b) $p_b(x) = x^9 - 18x^8 + 144x^7 - 672x^6 + 2016x^5 - 4032x^4 + 5376x^3 - 4608x^2 + 2304x - 512$;
- c) $p_c(x) = -512 + x(2304 + x(-4608 + x(\dots)))$ (Hornerova metoda/pravidlo).

 Uvažujme algoritmus $V_z : F \rightarrow F : x \mapsto p_z(x)$ pro $z \in \{a, b, c\}$ (tedy počítá funkční hodnotu $p(x)$ 3 výše uvedenými způsoby).

Pro všechny 3 varianty

1. odhadněte dopřednou chybu, a

2. odhadněte zpětnou chybu.

Předpokládáme, že nedojde k podtečení, přetečení apod. ■

Řešení

Řešení Cvičení 16.1: Důkaz. Dokážeme indukcí.

$n = 1$ a $\rho_1 = 1$, pak $|\Theta_1| = |\delta_1| \leq \mathbf{u} < \frac{\mathbf{u}}{1 - \mathbf{u}}$.

$n = 1$ a $\rho_1 = -1$, pak $\frac{1}{1 + \delta_1} = 1 - \frac{\delta_1}{1 + \delta_1}$ a tedy $|\Theta_1| = \frac{|\delta_1|}{|1 + \delta_1|} \leq \frac{\mathbf{u}}{1 - \mathbf{u}}$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n = j - 1$.

Nechť $\rho_j = 1$, pak $\prod_{i=1}^j (1 + \delta_i)^{\rho_i} = (1 + \Theta_{j-1})(1 + \delta_j) = 1 + \underbrace{\delta_j + \Theta_{j-1} + \delta_j \Theta_{j-1}}_{\Theta_j}$.

$$|\Theta_j| \leq |\delta_j| + |\Theta_{j-1}| + |\delta_j \Theta_{j-1}| \leq \mathbf{u} + \frac{(j-1)\mathbf{u}}{1 - (j-1)\mathbf{u}} + \frac{(j-1)\mathbf{u}^2}{1 - (j-1)\mathbf{u}},$$

výraz sečteme a dostaneme $\frac{j\mathbf{u}}{1 - (j-1)\mathbf{u}} \leq \frac{j\mathbf{u}}{1 - j\mathbf{u}}$.

Nechť $\rho_j = -1$, pak $\prod_{i=1}^j (1 + \delta_i)^{\rho_i} = \frac{1 + \Theta_{j-1}}{1 + \delta_j} = 1 + \underbrace{\frac{-\delta_j + \Theta_{j-1}}{1 + \delta_j}}_{\Theta_j}$.

$$|\Theta_j| \leq \frac{|\delta_j|}{|1 + \delta_j|} + \frac{|\Theta_{j-1}|}{|1 + \delta_j|} \leq \frac{\mathbf{u}}{1 - \mathbf{u}} + \frac{1}{1 - \mathbf{u}} \frac{(j-1)\mathbf{u}}{1 - (j-1)\mathbf{u}},$$

výraz sečteme a dostaneme $\frac{j\mathbf{u} - (j-1)\mathbf{u}^2}{1 - j\mathbf{u} + j\mathbf{u}^2} \leq \frac{j\mathbf{u}}{1 - j\mathbf{u}}$. ■

ChangeLog

Verze	Datum	Autor	Log
1.0	11.12.2019	ŠS	Výchozí verze.