NI-MPI cvičení 6 handout 13. února 2025
Problémy, návrhy apod. hlaste v GitLabu.
Verze souboru: 2021-10-25 13:10.

Obsah

16 Odhady v numerických algoritmech

Lemma 16.1. *Pokud* $|\delta_i| \leq \mathbf{u}$ *a* $|\rho_i| = 1$ *pro všechna* $i \in \{1, \dots, n\}$, $n\mathbf{u} < 1$, *tak platí*

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + \delta_i)^{\rho_i} = 1 + \Theta_n,$$

kde $|\Theta_n| \leq \dfrac{n\mathbf{u}}{1 - n\mathbf{u}}$.

Následující značení se hodí pro počítání nakumulovaných chyb (zanedbává přesnou hodnotu nakumulované chyby):

Značení 16.2. $\langle n \rangle = \prod_{i=1}^{n} (1 + \delta_i)^{\rho_i}$

Cvičení 16.1 Dokažte lemma 16.1. ?

Základní cvičení 16.2 Mějme pevně danou množinu strojových čísel F (např. v jednoduché přesnosti) a uvažujme standardní model aritmetických operací. !

Uvažujme algoritmus $V : F^n \to F$, který počítá skalární součin, tedy

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots \alpha_n x_n,$$

kde $\alpha \in F$ jsou pevně zvolené parametry.

1. Odhadněte dopřednou chybu.

2. Odhadněte zpětnou chybu.

Předpokládáme, že nedojde k podtečení, přetečení apod.

Základní cvičení 16.3 Mějme pevně danou množinu strojových čísel F (např. v jednoduché přesnosti) a uvažujme standardní model aritmetických operací. !

Uvažujme zobrazení $p : x \mapsto (x - 2)^9$ a 3 způsoby jeho výpočtu:

a) $p_a(x) = (x - 2)^9$;

b) $p_b(x) = x^9 - 18x^8 + 144x^7 - 672x^6 + 2016x^5 - 4032x^4 + 5376x^3 - 4608x^2 + 2304x - 512$;

c) $p_c(x) = -512 + x\,(2304 + x\,(-4608 + x\,(\dots)))$ (Hornerova metoda/pravidlo).

Uvažujme algoritmus $V_z : F \to F : x \mapsto p_z(x)$ pro $z \in \{a, b, c\}$ (tedy počítá fukční hodnotu $p(x)$ 3 výše uvedenými způsoby).

Pro všechny 3 varianty

1. odhadněte dopřednou chybu, a

2. odhadněte zpětnou chybu.

Předpokládáme, že nedojde k podtečení, přetečení apod.

Řešení

Řešení Cvičení 16.1: Důkaz. Dokážeme indukcí.

$n = 1$ a $\rho_1 = 1$, pak $|\Theta_1| = |\delta_1| \leq \mathbf{u} < \dfrac{\mathbf{u}}{1-\mathbf{u}}$.

$n = 1$ a $\rho_1 = -1$, pak $\frac{1}{1+\delta_1} = 1 - \frac{\delta_1}{1+\delta_1}$ a tedy $|\Theta_1| = \frac{|\delta_1|}{|1+\delta_1|} \leq \dfrac{\mathbf{u}}{1-\mathbf{u}}$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n = j-1$.

Nechť $\rho_j = 1$, pak $\prod_{i=1}^{j}(1+\delta_i)^{\rho_i} = (1+\Theta_{j-1})(1+\delta_j) = 1 + \underbrace{\delta_j + \Theta_{j-1} + \delta_j\Theta_{j-1}}_{\Theta_j}$.

$|\Theta_j| \leq |\delta_j| + |\Theta_{j-1}| + |\delta_j\Theta_{j-1}| \leq \mathbf{u} + \dfrac{(j-1)\mathbf{u}}{1-(j-1)\mathbf{u}} + \dfrac{(j-1)\mathbf{u}^2}{1-(j-1)\mathbf{u}}$,

výraz sečteme a dostaneme $\dfrac{j\mathbf{u}}{1-(j-1)\mathbf{u}} \leq \dfrac{j\mathbf{u}}{1-j\mathbf{u}}$.

Nechť $\rho_j = -1$, pak $\prod_{i=1}^{j}(1+\delta_i)^{\rho_i} = \dfrac{1+\Theta_{j-1}}{1+\delta_j} = 1 + \underbrace{\dfrac{-\delta_j+\Theta_{j-1}}{1+\delta_j}}_{\Theta_j}$.

$|\Theta_j| \leq \dfrac{|\delta_j|}{|1+\delta_j|} + \dfrac{|\Theta_{j-1}|}{|1+\delta_j|} \leq \dfrac{\mathbf{u}}{1-\mathbf{u}} + \dfrac{1}{1-\mathbf{u}}\dfrac{(j-1)\mathbf{u}}{1-(j-1)\mathbf{u}}$,

výraz sečteme a dostaneme $\dfrac{j\mathbf{u}-(j-1)\mathbf{u}^2}{1-j\mathbf{u}+j\mathbf{u}^2} \leq \dfrac{j\mathbf{u}}{1-j\mathbf{u}}$. ∎

ChangeLog

Verze	Datum	Autor	Log
1.0	11.12.2019	ŠS	Výchozí verze.