MI-MPI cvičení 10 handout 2. prosince 2019
Problémy, návrhy apod. hlaste v GitLabu.
Verze souboru: 2018-12-13 08:58.

Obsah

Co byste si měli z tohoto cvičení odnést:

- Jak je definované sjednocení / průnik / doplněk pro Fuzzy množiny, za pomoci Gödelovy, Lukasiewiczovy a součinové t-normy.
- Jak se aplikují fuzzy pravidla tvaru IF - THEN pomocí Mamdaniho metody.
- Jak se provádí defuzzyfikace.

23 Operace s fuzzy množinami

Fuzzy množina je dvojice $A = (U, \mu_A)$, kde U je neprázdná množina, tzv. *universum* a $\mu : U \to [0, 1]$ je funkce, která určuje *stupeň příslušnosti* každého prvku universa k fuzzy množině A. Klasické množiny lze tedy chápat jako speciální případ fuzzy množin, kdy stupeň příslušnosti je vždy buď nula (do množiny vůbec nepatří) nebo jedna (zcela patří do množiny). Fuzzy množiny jsou pak obohaceny o možnost, kdy do nich některé prvky patří se stupněm mezi těmito krajními hodnotami.

V tomto cvičení si zavedeme klasické tři operace, které známe pro klasické množiny: doplněk, průnik a sjednocení. Doplněk k množině $A = (U, \mu)$ je množina $A^C = (U, 1 - \mu_A)$. Platí tedy pro každý prvek univerza $x \in U$, že součet stupně příslušnosti $\mu_A(x)$ množině A a stupně příslušnosti $\mu_{A^C}(x) = 1 - \mu_A(x)$ k množině A^C je jedna.

Otázka, jak definovat průnik a sjednocení, již nemá jednoznačnou odpověď. My si ukážeme tři způsoby, i když jich existuje více (vizte přednášku). Průnik definujeme pomocí tzv. *t-normy*. Buďte $A = (U, \mu_A)$ a $B = (U, \mu_B)$ dvě fuzzy množiny na stejném universu, potom pro všechna $x \in U$ definujeme $\mu_{A\cap B}$ takto:

$$\begin{aligned}
\text{Gödelova t-norma:} \quad & \mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \\
\text{součinová t-norma:} \quad & \mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \\
\text{Łukasiewiczova t-norma:} \quad & \mu_{A\cap B}(x) = \max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\}.
\end{aligned}$$

Pro klasické množiny umíme pomocí doplňku a průniku již definovat i sjednocení, neboť platí de Morganův zákon:

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C.$$

Podobně to platí i pro fuzzy množiny: t-konormy definující sjednocení fuzzy množin lze dopočítat z doplňku a t-normy, vizte násl. cvičení.

Cvičení 23.1 Najděte s pomocí de Morganova zákona funkci $\mu_{A\cup B}$ definující stupeň příslušnosti k sjednocení fuzzy množin $A = (U, \mu_A)$ a $B = (U, \mu_B)$, pokud průnik definujeme pomocí

(a) Gödelovy t-normy,

(b) součinové t-normy,

(c) Łukasiewiczova t-normy.

Cvičení 23.2 Uvažujme pět fuzzy množin popisujících ryhlost auta na běžné silnici (tj., ne dálnici) mimo obec: *velmi nízká, nízká, vysoká, velmi vysoká, přehnaná.* Stupně příslušnosti rychlostí k těmto fuzzy množinám jsou po částech lineární funkce, jejichž hodnoty pro celé desítky km/h jsou dány v tabulce 1, a které jsou jinde lineární. Načrtněte grafy těchto stupňu příslušnosti.

stupeň příslušnosti	rychlost [km/h]														
fuzzy množiny	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
velmi nízká	1	1	0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
nízká	0	0.5	1	1	1	0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
vysoká	0	0	0	0	0	0.5	1	1	1	0.5	0	0	0	0	0
velmi vysoká	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5	1	1	0.5	0	0	0
přehnaná	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5	1	1	1	1

Tabulka 1: Hodnoty stupňu příslušnosti rychlostí k fuzzy množinám popisujícím rychlost auta na běžné silnici mimo obec pro celé desítky km/h. Jinde jsou tyto stupně příslušnosti lineární

Cvičení 23.3 Napište definici a načrtněte graf stupně příslušnosti rychlostí k fuzzy množině *nízká* $\cup$ *vysoká*, parafrázované jako *nízká nebo vysoká* při použití následujících konjunkcí:

a) Gödelovy (=minimové),

b) Łukasiewiczovy,

c) součinové.

Cvičení 23.4 Napište definici a načrtněte graf stupně příslušnosti rychlostí k fuzzy množině *velmi vysoká* $\cap$ $\neg$*přehnaná*, parafrázované jako *velmi vysoká ale ne přehnaná* při použití stejných konjunkcí jako v předchozím úkolu.

Cvičení 23.5

Předpokládejme, že vztah mezi rychlostí auta a tím, jak řidič brzdí, je popsán následujícími 5 pravidly:

R_1 IF rychlost velmi nízká THEN brždění žádné;

R_2 IF rychlost nízká THEN brždění žádné;

R_3 IF rychlost vysoká THEN brždění malé;

R_4 IF rychlost velmi vysoká THEN brždění střední;

R_5 IF rychlost přehnaná THEN brždění velké.

přičemž *žádné, malé, střední, velké* jsou fuzzy množiny, ke kterým intenzity brždění patří v následujících stupních příslušnosti:

$$\mu_{\text{žádné}}(i) = \begin{cases} 1 & \text{pro } i \in \langle 0, 10\rangle, \\ \frac{30-i}{20} & \text{pro } i \in \langle 10, 30\rangle, \\ 0 & \text{pro } i \in \langle 30, 100\rangle, \end{cases} \qquad \mu_{\text{malé}}(i) = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \in \langle 0, 10\rangle, \\ \frac{i-10}{20} & \text{pro } i \in \langle 10, 30\rangle, \\ \frac{50-i}{20} & \text{pro } i \in \langle 30, 50\rangle, \\ 0 & \text{pro } i \in \langle 50, 100\rangle, \end{cases}$$

$$\mu_{\text{střední}}(i) = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \in \langle 0, 30\rangle, \\ \frac{i-30}{20} & \text{pro } i \in \langle 30, 50\rangle, \\ \frac{70-i}{20} & \text{pro } i \in \langle 50, 70\rangle, \\ 0 & \text{pro } i \in \langle 70, 100\rangle, \end{cases} \qquad \mu_{\text{velké}}(i) = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \in \langle 0, 50\rangle, \\ \frac{i-50}{20} & \text{pro } i \in \langle 50, 70\rangle, \\ 1 & \text{pro } i \in \langle 70, 100\rangle. \end{cases}$$

Popište stupeň příslušnosti intenzity brždění k fuzzy množině, která je výsledkem aplikace pravidel R_1–R_5 Mamdaniho metodou na rychlost 50 km/h a vypočtěte intenzitu brždění, kterou dostaneme defuzzyfikací této množiny metodou těžiště.

Řešení

Řešení Cvičení 23.1: Pro Gödela platí, že

$$1 - \mu_{A\cup B}(x) = \min\{1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\} = 1 - \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\},$$

a tedy $\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ pro všechna $x \in U$.

Pro součinovou t-normu vyjde podobným postupem $\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$ a pro Łukasiewiczovu t-normu pak $\mu_{A\cup B}(x) = \min\{\mu_A(x) + \mu_B(x), 1\}$.

Řešení Cvičení 23.2: Viz obr. 1.

Řešení Cvičení 23.3: **a)**

$$\mu_{\text{Gödel}}(s) = \begin{cases} \frac{s}{20} & \text{pro } s \in \langle 0, 20\rangle, \\ 1 & \text{pro } s \in \langle 20, 40\rangle, \\ 1 - \frac{s-40}{20} & \text{pro } s \in \langle 40, 50\rangle, \\ 1 - \frac{60-s}{20} & \text{pro } s \in \langle 50, 60\rangle, \\ 1 & \text{pro } s \in \langle 60, 80\rangle, \\ \frac{100-s}{20} & \text{pro } s \in \langle 80, 100\rangle, \\ 0 & \text{pro } s \geq 100. \end{cases} \tag{2}$$

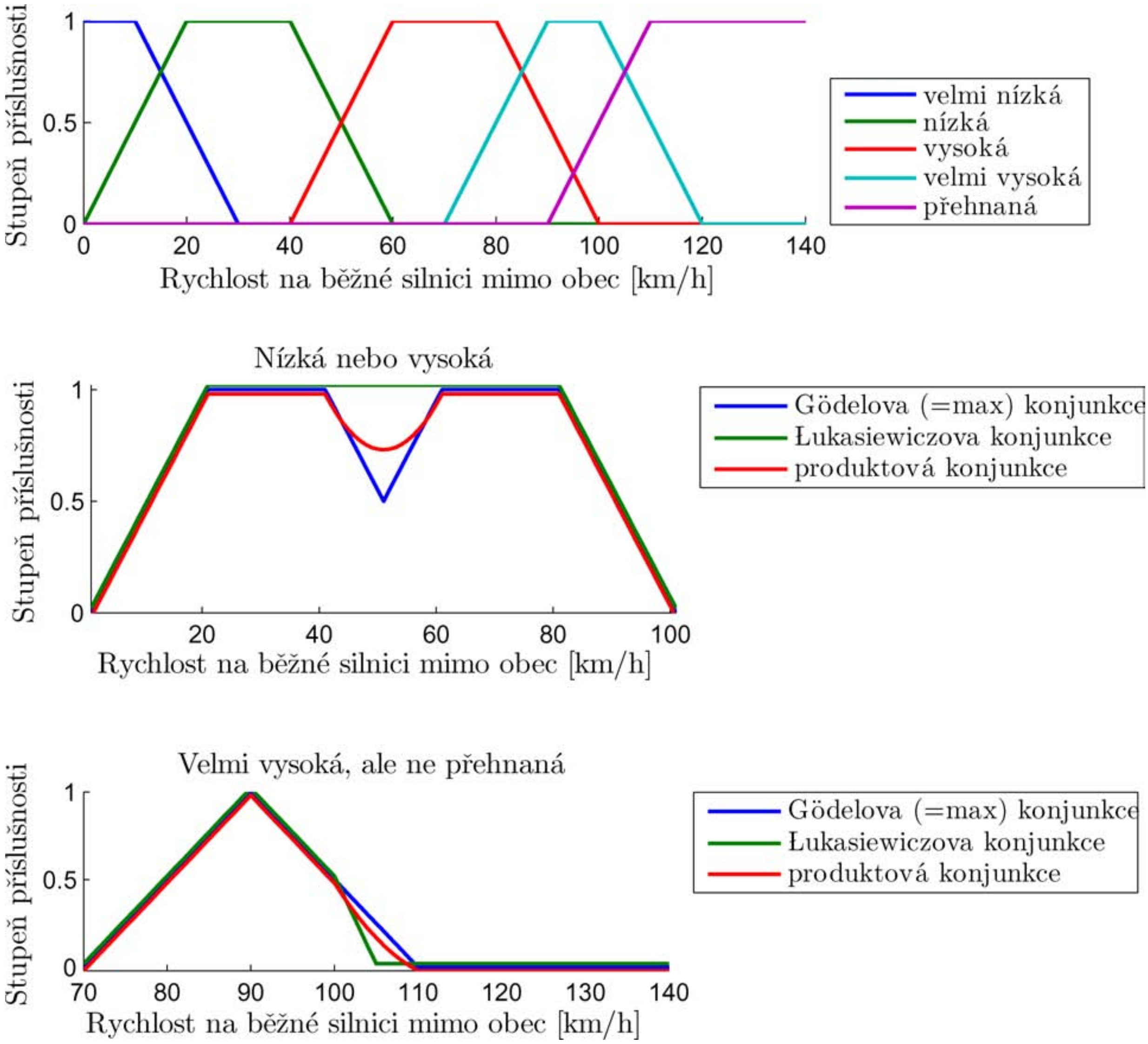
b)

$$\mu_{\text{Łukasiewicz}}(s) = \begin{cases} \frac{s}{20} & \text{pro } s \in \langle 0, 20\rangle, \\ 1 & \text{pro } s \in \langle 20, 80\rangle, \\ \frac{100-s}{20} & \text{pro } s \in \langle 80, 100\rangle, \\ 0 & \text{pro } s \geq 100. \end{cases} \tag{3}$$

c)

$$\mu_{\text{product}}(s) = \begin{cases} \frac{s}{20} & \text{pro } s \in \langle 0, 20\rangle, \\ 1 & \text{pro } s \in \langle 20, 40\rangle, \\ 1 - \frac{s-40}{20} \cdot \frac{60-s}{20} & \text{pro } s \in \langle 40, 60\rangle, \\ 1 & \text{pro } s \in \langle 60, 80\rangle, \\ \frac{100-s}{20} & \text{pro } s \in \langle 80, 100\rangle, \\ 0 & \text{pro } s \geq 100. \end{cases} \tag{4}$$

+ obr. 1.



Obrázek 1: Stupně příslušnosti rychlostí k fuzzy množinám *velmi nízká, nízká, vysoká, velmi vysoká, přehnaná* (nahoře), k fuzzy množině *nízká* ∪ *vysoká*, parafrázované jako *nízká nebo vysoká* (uprostřed) a k fuzzy množině *velmi vysoká* ∩ ¬*přehnaná*, parafrázované jako *velmi vysoká ale ne přehnaná* (dole)

Řešení Cvičení 23.4: **a)**

$$\mu_{\text{Gödel}}(s) = \begin{cases} 0 & \text{pro } s \leq 70 \\ \frac{s-70}{20} & \text{pro } s \in \langle 70, 90 \rangle, \\ \frac{110-s}{20} & \text{pro } s \in \langle 90, 110 \rangle, \\ 0 & \text{pro } s \geq 110. \end{cases} \tag{5}$$

b)

$$\mu_{\text{Łukasiewicz}}(s) = \begin{cases} 0 & \text{pro } s \leq 70 \\ \frac{s-70}{20} & \text{pro } s \in \langle 70, 90 \rangle, \\ \frac{110-s}{20} & \text{pro } s \in \langle 90, 100 \rangle, \\ \frac{105-s}{10} & \text{pro } s \in \langle 100, 105 \rangle, \\ 0 & \text{pro } s \geq 105. \end{cases} \tag{6}$$

c)

$$\mu_{\text{product}}(s) = \begin{cases} 0 & \text{pro } s \leq 70 \\ \frac{s-70}{20} & \text{pro } s \in \langle 70, 90 \rangle, \\ \frac{110-s}{20} & \text{pro } s \in \langle 90, 100 \rangle, \\ \frac{s-110}{20} \cdot \frac{s-120}{20} & \text{pro } s \in \langle 100, 110 \rangle, \\ 0 & \text{pro } s \geq 110. \end{cases} \tag{7}$$

+ obr. 1.

Řešení Cvičení 23.5: Stupeň příslušnosti rychlosti 50 km/h k fuzzy množinám *nízká* a *vysoká* je 0.5, stupeň její příslušnosti k fuzzy množinám *velmi nízká, velmi vysoká* a *přehnaná* je 0. Stupeň příslušnosti $\mu_{\text{speed 50}}$ fuzzy množiny, která je výsledkem aplikace R_1–R_5 na rychlost 50 km/h, potom Mamdaniho metodou vychází

$$\begin{aligned} \mu_{\text{speed 50}} = \max(\min(0, \mu_{\text{žádné}}), \min(0.5, \mu_{\text{žádné}}), \min(0.5, \mu_{\text{malé}}), \min(0, \mu_{\text{střední}}), \min(0, \mu_{\text{velké}})) = \\ = \max(\min(0.5, \mu_{\text{žádné}}), \min(0.5, \mu_{\text{malé}})), \end{aligned} \tag{8}$$

neboli

$$\mu_{\text{speed 50}}(i) = \begin{cases} 0.5 & \text{pro } i \in \langle 0, 40 \rangle, \\ \frac{50-i}{20} & \text{pro } i \in \langle 40, 50 \rangle, \\ 0 & \text{pro } i \in \langle 50, 100 \rangle. \end{cases} \tag{9}$$

Defuzzyfikace:

$$\frac{\int_0^{100} i \mu_{\text{speed 50}}(i) \mathrm{d}i}{\int_0^{100} \mu_{\text{speed 50}}(i) \mathrm{d}i} = \frac{\int_0^{40} 0.5 i \mathrm{d}i + \int_{40}^{50} \frac{50-i}{20} i \mathrm{d}i}{\int_0^{40} 0.5 \mathrm{d}i + \int_{40}^{50} \frac{50-i}{20} \mathrm{d}i} = \frac{400 + 325/3}{20 + 2.5} = 22.59. \tag{10}$$

ChangeLog

Verze	Datum	Autor	Log
1.0	13.12.2018	ŠS	Verze z roku 2017/2018.