# NI-MPI přednáška 9

## Algebra I

Štěpán Starosta

13. 11. 2024

FIT ČVUT

23. Úvod do teorie grup

24. Hierarchie množin s jednou binární operací

25. Příklady

26. Vlastnosti neutrálních a inverzních prvků

27. Znázornění grup
    - Cayleyho tabulka grupy
    - Cayleyho graf grupy

# Hledání skrytých podobností ...

Uvažujme následující objekty:

- množina $\mathbb{Z}$ celých čísel a jejich sčítání,
- množina matic $\mathbb{R}^{n,n}$ s operací násobení matic,
- množinu relací na množině $A$ s operací skládání relací,
- množinu $\{0, 1, 2, 3\}$ s operací násobení modulo $4$,
- množinu konečných automatů a jejich skládání,
- množinu všech konečných řetězců nad zadanou abecedou a jejich spojování,
- množinu všech barev a operaci „míchání“,
- ...

# Hledání skrytých podobností ...

Uvažujme následující objekty:

- množina $\mathbb{Z}$ celých čísel a jejich sčítání,
- množina matic $\mathbb{R}^{n,n}$ s operací násobení matic,
- množinu relací na množině $A$ s operací skládání relací,
- množinu $\{0, 1, 2, 3\}$ s operací násobení modulo $4$,
- množinu konečných automatů a jejich skládání,
- množinu všech konečných řetězců nad zadanou abecedou a jejich spojování,
- množinu všech barev a operaci „míchání“,
- ...

**Co mají společného?**

# Společná struktura!

Všechny uvedené objekty mají stejnou strukturu. Skládají se ze dvou ingrediencí:

- Neprázdné (konečné či nekonečné) **množiny objektů**.
- **Binární operace**, která každé dvojici objektů z této množiny jednoznačně přiřadí objekt z uvažované množiny.

## Společná struktura!

Všechny uvedené objekty mají stejnou strukturu. Skládají se ze dvou ingrediencí:

- Neprázdné (konečné či nekonečné) **množiny objektů**.
- **Binární operace**, která každé dvojici objektů z této množiny jednoznačně přiřadí objekt z uvažované množiny.

Obecně se tedy jedná o dvojici množina a binární operace na ní a proto budeme (většinou) používat značení $(M, \cdot)$ (multiplikativní zápis) resp. $(M, +)$ (aditivní zápis), resp. $(M, \circ)$ (obecný zápis), kde

- $M$ je **neprázdná** množina,
- a pro binární operaci platí $\cdot : M \times M \to M$, resp. $+ : M \times M \to M$, resp. $\circ : M \times M \to M$.

# O co jde v teorii grup?

- Dvojici „množina a binární operace na ní“ mohou, jak bylo dříve na příkladech ukázáno, tvořit velice odlišné struktury. My je budeme klasifikovat podle vlastností, které mají.

# O co jde v teorii grup?

- Dvojici „množina a binární operace na ní“ mohou, jak bylo dříve na příkladech ukázáno, tvořit velice odlišné struktury. My je budeme klasifikovat podle vlastností, které mají.
- O této dvojici nás budou zajímat například následující otázky: Je operace asociativní? Je komutativní? Existují v množině prvky s vlastnostmi jako má jednička a nula v číselných množinách? ...

# O co jde v teorii grup?

- Dvojici „množina a binární operace na ní“ mohou, jak bylo dříve na příkladech ukázáno, tvořit velice odlišné struktury. My je budeme klasifikovat podle vlastností, které mají.
- O této dvojici nás budou zajímat například následující otázky: Je operace asociativní? Je komutativní? Existují v množině prvky s vlastnostmi jako má jednička a nula v číselných množinách? ...
- Obecná algebra se dále zabývá bohatšími strukturami jako jsou okruhy, tělesa a další. S těmi se setkáme později během semestru.

# O co jde v teorii grup?

- Dvojici „množina a binární operace na ní“ mohou, jak bylo dříve na příkladech ukázáno, tvořit velice odlišné struktury. My je budeme klasifikovat podle vlastností, které mají.
- O této dvojici nás budou zajímat například následující otázky: Je operace asociativní? Je komutativní? Existují v množině prvky s vlastnostmi jako má jednička a nula v číselných množinách? ...
- Obecná algebra se dále zabývá bohatšími strukturami jako jsou okruhy, tělesa a další. S těmi se setkáme později během semestru.

**A proč to děláme?**

*Pokud dokážeme nějaké tvrzení pro obecnou strukturu $(M, \circ)$, kde $\circ$ je asociativní operace, bude (automaticky) toto tvrzení platit pro všechny konkrétní struktury s asociativní binární operací.*

# O co jde v teorii grup?

- Dvojici „množina a binární operace na ní“ mohou, jak bylo dříve na příkladech ukázáno, tvořit velice odlišné struktury. My je budeme klasifikovat podle vlastností, které mají.
- O této dvojici nás budou zajímat například následující otázky: Je operace asociativní? Je komutativní? Existují v množině prvky s vlastnostmi jako má jednička a nula v číselných množinách? ...
- Obecná algebra se dále zabývá bohatšími strukturami jako jsou okruhy, tělesa a další. S těmi se setkáme později během semestru.

**A proč to děláme?**

*Pokud dokážeme nějaké tvrzení pro obecnou strukturu $(M, \circ)$, kde $\circ$ je asociativní operace, bude (automaticky) toto tvrzení platit pro všechny konkrétní struktury s asociativní binární operací. Důkaz tohoto tvrzení se zredukuje na (triviální) důkaz asociativity operace!*

# O co jde v teorii grup?

- Dvojici „množina a binární operace na ní“ mohou, jak bylo dříve na příkladech ukázáno, tvořit velice odlišné struktury. My je budeme klasifikovat podle vlastností, které mají.
- O této dvojici nás budou zajímat například následující otázky: Je operace asociativní? Je komutativní? Existují v množině prvky s vlastnostmi jako má jednička a nula v číselných množinách? ...
- Obecná algebra se dále zabývá bohatšími strukturami jako jsou okruhy, tělesa a další. S těmi se setkáme později během semestru.

**A proč to děláme?**

*Pokud dokážeme nějaké tvrzení pro obecnou strukturu $(M, \circ)$, kde $\circ$ je asociativní operace, bude (automaticky) toto tvrzení platit pro všechny konkrétní struktury s asociativní binární operací. Důkaz tohoto tvrzení se zredukuje na (triviální) důkaz asociativity operace!*
*Obecnou strukturu můžeme chápat jako **nadřazený objekt**, od kterého konkrétní struktury **dědí** všechny jeho vlastnosti.*

# Příklad „dědičnosti“ (1/4)

Na množině nenulových reálných čísel dokážeme následující větu:

**Věta 23.1**

*Pro všechna* $b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *má rovnice* $bx = c$ *jediné řešení* $x = \frac{c}{b}$.

# Příklad „dědičnosti“ (1/4)

Na množině nenulových reálných čísel dokážeme následující větu:

**Věta 23.1**

*Pro všechna* $b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *má rovnice* $bx = c$ *jediné řešení* $x = \frac{c}{b}$.

**Důkaz.**

Následující rovnosti jsou za předpokladu $b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ekvivalentní.

$$bx = c \quad \{\text{vyděl } b, \text{ lze pro } \forall b \neq 0\}$$

# Příklad „dědičnosti“ (1/4)

Na množině nenulových reálných čísel dokážeme následující větu:

**Věta 23.1**

*Pro všechna* $b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *má rovnice* $bx = c$ *jediné řešení* $x = \frac{c}{b}$.

**Důkaz.**

Následující rovnosti jsou za předpokladu $b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ekvivalentní.

$$bx = c \quad \{\text{vyděl } b, \text{ lze pro } \forall b \neq 0\}$$

$$\frac{bx}{b} = \frac{c}{b} \quad \{\text{použijeme asociativitu násobení}\}$$

# Příklad „dědičnosti“ (1/4)

Na množině nenulových reálných čísel dokážeme následující větu:

**Věta 23.1**

*Pro všechna* $b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *má rovnice* $bx = c$ *jediné řešení* $x = \frac{c}{b}$.

**Důkaz.**

Následující rovnosti jsou za předpokladu $b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ekvivalentní.

$$
\begin{aligned}
bx &= c && \{\text{vyděl } b\text{, lze pro } \forall b \neq 0\} \\
\frac{bx}{b} &= \frac{c}{b} && \{\text{použijeme asociativitu násobení}\} \\
\frac{b}{b}x &= \frac{c}{b} && \{\text{víme, že pro lib. } b \neq 0 \text{ je } \frac{b}{b} = 1\}
\end{aligned}
$$

# Příklad „dědičnosti“ (1/4)

Na množině nenulových reálných čísel dokážeme následující větu:

**Věta 23.1**

*Pro všechna* $b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *má rovnice* $bx = c$ *jediné řešení* $x = \frac{c}{b}$.

**Důkaz.**

Následující rovnosti jsou za předpokladu $b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ekvivalentní.

$$
\begin{aligned}
bx &= c && \{\text{vyděl } b\text{, lze pro } \forall b \neq 0\} \\
\frac{bx}{b} &= \frac{c}{b} && \{\text{použijeme asociativitu násobení}\} \\
\frac{b}{b}x &= \frac{c}{b} && \{\text{víme, že pro lib. } b \neq 0 \text{ je } \frac{b}{b} = 1\} \\
1x &= \frac{c}{b} && \{\text{pro lib. nenulové } d \text{ je } 1d = d\} \quad \square
\end{aligned}
$$

# Příklad „dědičnosti“ (1/4)

Na množině nenulových reálných čísel dokážeme následující větu:

**Věta 23.1**

*Pro všechna* $b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *má rovnice* $bx = c$ *jediné řešení* $x = \frac{c}{b}$.

**Důkaz.**

Následující rovnosti jsou za předpokladu $b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ekvivalentní.

$$
\begin{aligned}
bx &= c && \{\text{vyděl } b\text{, lze pro } \forall b \neq 0\} \\
\frac{bx}{b} &= \frac{c}{b} && \{\text{použijeme asociativitu násobení}\} \\
\frac{b}{b}x &= \frac{c}{b} && \{\text{víme, že pro lib. } b \neq 0 \text{ je } \frac{b}{b} = 1\} \\
1x &= \frac{c}{b} && \{\text{pro lib. nenulové } d \text{ je } 1d = d\} \quad \square
\end{aligned}
$$

**Co jsme potřebovali:** asociativitu, umět dělit nenulovým reálným číslem, existenci jedničky.

# Otázka

Je operace násobení matic asociativní?

# Příklad „dědičnosti“ (2/4)

Uvažujme nyní množinu $M$ všech matic z $\mathbb{R}^{n,n}$ s operací násobení matic.

# Příklad „dědičnosti“ (2/4)

Uvažujme nyní množinu $M$ všech matic z $\mathbb{R}^{n,n}$ s operací násobení matic.

- Je operace násobení matic asociativní?

# Příklad „dědičnosti“ (2/4)

Uvažujme nyní množinu $M$ všech matic z $\mathbb{R}^{n,n}$ s operací násobení matic.

- Je operace násobení matic asociativní?
  Ano. Pro $\forall A, B, C \in M$ platí $A(BC) = (AB)C$.

# Příklad „dědičnosti“ (2/4)

Uvažujme nyní množinu $M$ všech matic z $\mathbb{R}^{n,n}$ s operací násobení matic.

- Je operace násobení matic asociativní?
  Ano. Pro $\forall A, B, C \in M$ platí $A(BC) = (AB)C$.
- Existuje jednička (neutrální prvek) vůči maticovému násobení?

# Příklad „dědičnosti“ (2/4)

Uvažujme nyní množinu $M$ všech matic z $\mathbb{R}^{n,n}$ s operací násobení matic.

- Je operace násobení matic asociativní?
  Ano. Pro $\forall A, B, C \in M$ platí $A(BC) = (AB)C$.

- Existuje jednička (neutrální prvek) vůči maticovému násobení?
  Ano. Jednotková matice $E$ má vlastnost $EA = AE = A$ platící pro $\forall A \in M$.

# Příklad „dědičnosti“ (2/4)

Uvažujme nyní množinu $M$ všech matic z $\mathbb{R}^{n,n}$ s operací násobení matic.

- Je operace násobení matic asociativní?
  Ano. Pro $\forall A, B, C \in M$ platí $A(BC) = (AB)C$.
- Existuje jednička (neutrální prvek) vůči maticovému násobení?
  Ano. Jednotková matice $E$ má vlastnost $EA = AE = A$ platící pro $\forall A \in M$.
- Existuje ke každé matici $A \in M$ matice inverzní?

# Příklad „dědičnosti“ (2/4)

Uvažujme nyní množinu $M$ všech matic z $\mathbb{R}^{n,n}$ s operací násobení matic.

- Je operace násobení matic asociativní?
  Ano. Pro $\forall A, B, C \in M$ platí $A(BC) = (AB)C$.
- Existuje jednička (neutrální prvek) vůči maticovému násobení?
  Ano. Jednotková matice $E$ má vlastnost $EA = AE = A$ platící pro $\forall A \in M$.
- Existuje ke každé matici $A \in M$ matice inverzní?

  Neexistuje! Musíme se omezit na množinu všech **regulárních** matic z $M$, označovanou též $M_{\text{reg}} := \{A \in M \mid A \text{ je regulární}\}$.

# Příklad „dědičnosti“ (2/4)

Uvažujme nyní množinu $M$ všech matic z $\mathbb{R}^{n,n}$ s operací násobení matic.

- Je operace násobení matic asociativní?
  Ano. Pro $\forall A, B, C \in M$ platí $A(BC) = (AB)C$.
- Existuje jednička (neutrální prvek) vůči maticovému násobení?
  Ano. Jednotková matice $E$ má vlastnost $EA = AE = A$ platící pro $\forall A \in M$.
- Existuje ke každé matici $A \in M$ matice inverzní?

  Neexistuje! Musíme se omezit na množinu všech **regulárních** matic z $M$, označovanou též $M_{\text{reg}} := \{A \in M \mid A \text{ je regulární}\}$.

**Poznámka:** Všechna tato tvrzení již známe z Lineární algebry!

# Příklad „dědičnosti“ (3/4)

Máme vše co potřebujeme, větu můžeme přeformulovat pro matice:

**Věta 23.2**

*Pro všechna $B, C \in M_{reg}$ má rovnice $BX = C$ jediné řešení $X = B^{-1}C$.*

# Příklad „dědičnosti“ (3/4)

Máme vše co potřebujeme, větu můžeme přeformulovat pro matice:

**Věta 23.2**

*Pro všechna $B, C \in M_{reg}$ má rovnice $BX = C$ jediné řešení $X = B^{-1}C$.*

**Důkaz.**

Následující rovnosti jsou za předpokladu $B, C \in M_{\text{reg}}$ ekvivalentní.

$$BX = C \qquad \{\text{vynás. inverz. prvkem } B^{-1} \text{ zleva, existuje pro } \forall B\}$$

# Příklad „dědičnosti“ (3/4)

Máme vše co potřebujeme, větu můžeme přeformulovat pro matice:

**Věta 23.2**

*Pro všechna $B, C \in M_{reg}$ má rovnice $BX = C$ jediné řešení $X = B^{-1}C$.*

**Důkaz.**

Následující rovnosti jsou za předpokladu $B, C \in M_{\text{reg}}$ ekvivalentní.

$$\begin{aligned} BX &= C && \{\text{vynás. inverz. prvkem } B^{-1} \text{ zleva, existuje pro } \forall B\} \\ B^{-1}(BX) &= B^{-1}C && \{\text{přesuneme závorky díky asociativitě}\} \end{aligned}$$

# Příklad „dědičnosti“ (3/4)

Máme vše co potřebujeme, větu můžeme přeformulovat pro matice:

**Věta 23.2**

*Pro všechna $B, C \in M_{reg}$ má rovnice $BX = C$ jediné řešení $X = B^{-1}C$.*

**Důkaz.**

Následující rovnosti jsou za předpokladu $B, C \in M_{\text{reg}}$ ekvivalentní.

$$
\begin{aligned}
BX &= C && \{\text{vynás. inverz. prvkem } B^{-1} \text{ zleva, existuje pro } \forall B\} \\
B^{-1}(BX) &= B^{-1}C && \{\text{přesuneme závorky díky asociativitě}\} \\
(B^{-1}B)X &= B^{-1}C && \{\text{víme, že pro lib. } B \text{ je } B^{-1}B = E\}
\end{aligned}
$$

# Příklad „dědičnosti“ (3/4)

Máme vše co potřebujeme, větu můžeme přeformulovat pro matice:

**Věta 23.2**

*Pro všechna $B, C \in M_{reg}$ má rovnice $BX = C$ jediné řešení $X = B^{-1}C$.*

**Důkaz.**

Následující rovnosti jsou za předpokladu $B, C \in M_{\text{reg}}$ ekvivalentní.

$$
\begin{aligned}
BX &= C && \{\text{vynás. inverz. prvkem } B^{-1} \text{ zleva, existuje pro } \forall B\} \\
B^{-1}(BX) &= B^{-1}C && \{\text{přesuneme závorky díky asociativitě}\} \\
(B^{-1}B)X &= B^{-1}C && \{\text{víme, že pro lib. } B \text{ je } B^{-1}B = E\} \\
EX &= B^{-1}C && \{\text{pro lib. matici } D \text{ je } ED = D\}
\end{aligned}
$$

# Příklad „dědičnosti“ (3/4)

Máme vše co potřebujeme, větu můžeme přeformulovat pro matice:

**Věta 23.2**

*Pro všechna $B, C \in M_{reg}$ má rovnice $BX = C$ jediné řešení $X = B^{-1}C$.*

**Důkaz.**

Následující rovnosti jsou za předpokladu $B, C \in M_{\text{reg}}$ ekvivalentní.

$$
\begin{aligned}
BX &= C && \{\text{vynás. inverz. prvkem } B^{-1} \text{ zleva, existuje pro } \forall B\} \\
B^{-1}(BX) &= B^{-1}C && \{\text{přesuneme závorky díky asociativitě}\} \\
(B^{-1}B)X &= B^{-1}C && \{\text{víme, že pro lib. } B \text{ je } B^{-1}B = E\} \\
EX &= B^{-1}C && \{\text{pro lib. matici } D \text{ je } ED = D\} \\
X &= B^{-1}C
\end{aligned}
$$

□

# Příklad „dědičnosti“ (3/4)

Máme vše co potřebujeme, větu můžeme přeformulovat pro matice:

**Věta 23.2**

*Pro všechna $B, C \in M_{reg}$ má rovnice $BX = C$ jediné řešení $X = B^{-1}C$.*

**Důkaz.**

Následující rovnosti jsou za předpokladu $B, C \in M_{\text{reg}}$ ekvivalentní.

$$
\begin{aligned}
BX &= C && \{\text{vynás. inverz. prvkem } B^{-1} \text{ zleva, existuje pro } \forall B\} \\
B^{-1}(BX) &= B^{-1}C && \{\text{přesuneme závorky díky asociativitě}\} \\
(B^{-1}B)X &= B^{-1}C && \{\text{víme, že pro lib. } B \text{ je } B^{-1}B = E\} \\
EX &= B^{-1}C && \{\text{pro lib. matici } D \text{ je } ED = D\} \\
X &= B^{-1}C
\end{aligned}
$$

□

**Co jsme potřebovali:** asociativitu, existenci inverzní matice, existenci jednotkové matice.

# Příklad „dědičnosti“ (4/4)

Dvojici $(M, \circ)$, kde $\circ : M \times M \to M$, platí asociativní zákon, existuje neutrální prvek a ke každému prvku $b$ existuje inverzní prvek (značený $b^{-1}$) budeme říkat grupa.

# Příklad „dědičnosti“ (4/4)

Dvojici $(M, \circ)$, kde $\circ : M \times M \to M$, platí asociativní zákon, existuje neutrální prvek a ke každému prvku $b$ existuje inverzní prvek (značený $b^{-1}$) budeme říkat grupa.

Obecná věta pak bude znít:

**Věta 23.3**

*Pro libovolné prvky $b, c$ z grupy $(M, \circ)$ má rovnice $b \circ x = c$ jediné řešení $x = b^{-1} \circ c$.*

# Příklad „dědičnosti“ (4/4)

Dvojici $(M, \circ)$, kde $\circ : M \times M \to M$, platí asociativní zákon, existuje neutrální prvek a ke každému prvku $b$ existuje inverzní prvek (značený $b^{-1}$) budeme říkat grupa.

Obecná věta pak bude znít:

**Věta 23.3**

*Pro libovolné prvky $b, c$ z grupy $(M, \circ)$ má rovnice $b \circ x = c$ jediné řešení $x = b^{-1} \circ c$.*

**Důkaz.**

Následující rovnosti jsou ekvivalentní.

$$\begin{aligned} b \circ x &= c \\ b^{-1} \circ (b \circ x) &= b^{-1} \circ c \\ (b^{-1} \circ b) \circ x &= b^{-1} \circ c \\ x &= b^{-1} \circ c \end{aligned}$$

□

23. Úvod do teorie grup

24. Hierarchie množin s jednou binární operací

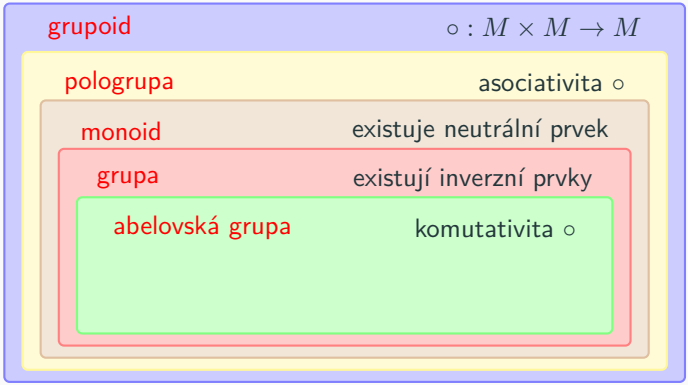
25. Příklady

26. Vlastnosti neutrálních a inverzních prvků

27. Znázornění grup
    - Cayleyho tabulka grupy
    - Cayleyho graf grupy

# Množiny s jednou binární operací

Libovolnou dvojici tvořenou neprázdnou množinou a binární operací na ní, $(M, \circ : M \times M \to M)$, budeme nazývat grupoid. Následným přidáváním dalších požadavků na operaci $\circ$ získáváme další struktury...



# Grupoid, pologrupa, monoid, grupa

**Definice 24.1**

Grupoid (*magma*) je uspořádaná dvojice $(M, \circ)$, kde $M$ je libovolná neprázdná množina a $\circ$ je binární operace na $M$.

- Pologrupa (*semigroup*) je grupoid $(M, \circ)$, pro který je $\circ$ asociativní operace.

# Grupoid, pologrupa, monoid, grupa

**Definice 24.1**

Grupoid (*magma*) je uspořádaná dvojice $(M, \circ)$, kde $M$ je libovolná neprázdná množina a $\circ$ je binární operace na $M$.

- Pologrupa (*semigroup*) je grupoid $(M, \circ)$, pro který je $\circ$ asociativní operace.
- Monoid je pologrupa $(M, \circ)$, ve které existuje neutrální prvek $e \in M$ takový, že

$$\text{pro všechna } a \in M \quad \text{platí} \quad e \circ a = a \circ e = a.$$

# Grupoid, pologrupa, monoid, grupa

**Definice 24.1**

Grupoid (*magma*) je uspořádaná dvojice $(M, \circ)$, kde $M$ je libovolná neprázdná množina a $\circ$ je binární operace na $M$.

- Pologrupa (*semigroup*) je grupoid $(M, \circ)$, pro který je $\circ$ asociativní operace.
- Monoid je pologrupa $(M, \circ)$, ve které existuje neutrální prvek $e \in M$ takový, že

$$\text{pro všechna } a \in M \quad \text{platí} \quad e \circ a = a \circ e = a.$$

- Grupa (*group*) je monoid $(M, \circ)$, ve kterém ke každému $a \in M$ existuje inverzní prvek $b \in M$ takový, že

$$b \circ a = a \circ b = e.$$

# Grupoid, pologrupa, monoid, grupa

**Definice 24.1**

Grupoid (*magma*) je uspořádaná dvojice $(M, \circ)$, kde $M$ je libovolná neprázdná množina a $\circ$ je binární operace na $M$.

- Pologrupa (*semigroup*) je grupoid $(M, \circ)$, pro který je $\circ$ asociativní operace.
- Monoid je pologrupa $(M, \circ)$, ve které existuje neutrální prvek $e \in M$ takový, že

$$\text{pro všechna } a \in M \quad \text{platí} \quad e \circ a = a \circ e = a.$$

- Grupa (*group*) je monoid $(M, \circ)$, ve kterém ke každému $a \in M$ existuje inverzní prvek $b \in M$ takový, že

$$b \circ a = a \circ b = e.$$

- Komutativní (abelovská) grupa je grupa $(M, \circ)$, kde $\circ$ je komutativní operace.

# První příklady

- Pro dvojici $(\mathbb{Z}, +)$ platí asociativní i komutativní zákon, neutrálním prvkem je $0$ a inverzní prvek k prvku $a$ je prvek $-a$, součet dvou celých čísel je celé číslo, jedná se tedy o abelovskou grupu.

# První příklady

- Pro dvojici $(\mathbb{Z}, +)$ platí asociativní i komutativní zákon, neutrálním prvkem je $0$ a inverzní prvek k prvku $a$ je prvek $-a$, součet dvou celých čísel je celé číslo, jedná se tedy o abelovskou grupu.
- Pro dvojici $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ platí asociativní i komutativní zákon, neutrálním prvkem je $1$ a inverzní prvek k (nenulovému) prvku $a$ je $\frac{1}{a}$, součin dvou nenulových reálných čísel je nenulové reálné číslo, jedná se tedy o abelovskou grupu.

# První příklady

- Pro dvojici $(\mathbb{Z}, +)$ platí asociativní i komutativní zákon, neutrálním prvkem je $0$ a inverzní prvek k prvku $a$ je prvek $-a$, součet dvou celých čísel je celé číslo, jedná se tedy o abelovskou grupu.
- Pro dvojici $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ platí asociativní i komutativní zákon, neutrálním prvkem je $1$ a inverzní prvek k (nenulovému) prvku $a$ je $\frac{1}{a}$, součin dvou nenulových reálných čísel je nenulové reálné číslo, jedná se tedy o abelovskou grupu.
- Pro dvojici $(M_{\text{reg}}, \cdot)$ platí asociativní zákon, neutrální prvek i inverní prvky existují (k $A \in M_{\text{reg}}$ je inverzním prvkem inverzní matice $A^{-1}$), ale neplatí komutativní zákon! Jedná se tedy o grupu, nikoli ovšem vždy abelovskou.

# První příklady

- Pro dvojici $(\mathbb{Z}, +)$ platí asociativní i komutativní zákon, neutrálním prvkem je $0$ a inverzní prvek k prvku $a$ je prvek $-a$, součet dvou celých čísel je celé číslo, jedná se tedy o abelovskou grupu.
- Pro dvojici $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ platí asociativní i komutativní zákon, neutrálním prvkem je $1$ a inverzní prvek k (nenulovému) prvku $a$ je $\frac{1}{a}$, součin dvou nenulových reálných čísel je nenulové reálné číslo, jedná se tedy o abelovskou grupu.
- Pro dvojici $(M_{\text{reg}}, \cdot)$ platí asociativní zákon, neutrální prvek i inverní prvky existují (k $A \in M_{\text{reg}}$ je inverzním prvkem inverzní matice $A^{-1}$), ale neplatí komutativní zákon! Jedná se tedy o grupu, nikoli ovšem vždy abelovskou. Příklad nekomutujících matic:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

# První příklady

- Pro dvojici $(\mathbb{Z}, +)$ platí asociativní i komutativní zákon, neutrálním prvkem je $0$ a inverzní prvek k prvku $a$ je prvek $-a$, součet dvou celých čísel je celé číslo, jedná se tedy o abelovskou grupu.

- Pro dvojici $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ platí asociativní i komutativní zákon, neutrálním prvkem je $1$ a inverzní prvek k (nenulovému) prvku $a$ je $\frac{1}{a}$, součin dvou nenulových reálných čísel je nenulové reálné číslo, jedná se tedy o abelovskou grupu.

- Pro dvojici $(M_{\text{reg}}, \cdot)$ platí asociativní zákon, neutrální prvek i inverní prvky existují (k $A \in M_{\text{reg}}$ je inverzním prvkem inverzní matice $A^{-1}$), ale neplatí komutativní zákon! Jedná se tedy o grupu, nikoli ovšem vždy abelovskou. Příklad nekomutujících matic:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Otázka**: Je součin dvou regulárních matic regulární matice?

# Matematická analogie k OOP

- Na grupoid, monoid, atd. se můžeme dívat jako na matematický (abstraktní) objekt či **třídu**, pro který je definována nějaká neprázdná množina a binární operace s danými vlastnostmi.

# Matematická analogie k OOP

- Na grupoid, monoid, atd. se můžeme dívat jako na matematický (abstraktní) objekt či **třídu**, pro který je definována nějaká neprázdná množina a binární operace s danými vlastnostmi.

- Pro tyto abstraktní třídy můžeme dokázat různá tvrzení (jako např. Větu o řešení „lineární“ rovnice pro grupy).

# Matematická analogie k OOP

- Na grupoid, monoid, atd. se můžeme dívat jako na matematický (abstraktní) objekt či **třídu**, pro který je definována nějaká neprázdná množina a binární operace s danými vlastnostmi.

- Pro tyto abstraktní třídy můžeme dokázat různá tvrzení (jako např. Větu o řešení „lineární“ rovnice pro grupy).

- Pokud potom pro nějakou instanci $(M, \circ)$ ukážeme, že je grupoid, monoid, atp., znamená to, že všechny tato tvrzení „zdědí“ a nemusíme je tedy dokazovat zvlášť.

# Poznámky ke značení a terminologii

- O množině $M$ také mluvíme jako o nosiči (*carrier*) grupy $G = (M, \circ)$.
- Zápisem $a \in G$, kde $G = (M, \circ)$, máme na mysli $a \in M$.

# Poznámky ke značení a terminologii

- O množině $M$ také mluvíme jako o nosiči (*carrier*) grupy $G = (M, \circ)$.
- Zápisem $a \in G$, kde $G = (M, \circ)$, máme na mysli $a \in M$.

**Značení 24.2**

| ***obecný zápis*** | ***multiplikativní zápis*** | ***aditivní zápis*** |
|---|---|---|
| $(M, \circ)$ | $(M, \cdot)$ | $(M, +)$ |
| *neutrální prvek:* $e$ | *neutrální prvek:* $1$ | *neutrální prvek:* $0$ |
| *inverzní prvek k* $a \in M$*:* $a^{-1}$ | *inverzní prvek k* $a \in M$*:* $a^{-1}$ | *inverzní prvek k* $a$*:* $-a$ |
| $\underbrace{a \circ a \circ \cdots \circ a}_{n-1 \text{ operací}} = a^n$ | $\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-1 \text{ operací}} = a^n$ | $\underbrace{a + a + \cdots + a}_{n-1 \text{ operací}} = n \times a$ |
| $a^0 = e$<br>$a^n \circ a^{-n} = e$ | $a^0 = 1$<br>$a^n \cdot a^{-n} = 1$ | $0 \times a = 0$<br>$\big(n \times a\big) + \big((-n) \times a\big) = 0$ |

# Uzavřenost množiny vůči binární operaci

V definici klademe na binární operaci $\circ$ podmínku, aby byla „binární operací na $M$“, což znamená, že výsledek aplikování binární operace na dva prvky z $M$ opět patří do $M$, stručněji $\circ : M \times M \to M$. Též říkáme, že **množina $M$ je uzavřená vůči $\circ$.**

## Uzavřenost množiny vůči binární operaci

V definici klademe na binární operaci $\circ$ podmínku, aby byla „binární operací na $M$“, což znamená, že výsledek aplikování binární operace na dva prvky z $M$ opět patří do $M$, stručněji $\circ : M \times M \to M$. Též říkáme, že **množina $M$ je uzavřená vůči $\circ$.**

**Příklad 24.3**
Dvojice $(\mathbb{Z}^-, \cdot)$ záporných celých čísel s klasickým násobením není ani grupoid, neboť $\mathbb{Z}^-$ není uzavřená vůči násobení: například $(-1) \cdot (-1) = 1 \notin \mathbb{Z}^-$.

# Uzavřenost množiny vůči binární operaci

V definici klademe na binární operaci $\circ$ podmínku, aby byla „binární operací na $M$“, což znamená, že výsledek aplikování binární operace na dva prvky z $M$ opět patří do $M$, stručněji $\circ : M \times M \to M$. Též říkáme, že **množina $M$ je uzavřená vůči $\circ$.**

**Příklad 24.3**
Dvojice $(\mathbb{Z}^-, \cdot)$ záporných celých čísel s klasickým násobením není ani grupoid, neboť $\mathbb{Z}^-$ není uzavřená vůči násobení: například $(-1) \cdot (-1) = 1 \notin \mathbb{Z}^-$.

Uzavřenost či neuzavřenost vůči binární operaci nemusí být vždy očividná:

**Příklad 24.4**
Uvažujme dvojici $(M_{\text{troj}}, \cdot)$ dolních trojúhelníkových matic s klasickým maticovým násobením. Je $M_{\text{troj}}$ vůči operaci $\cdot$ uzavřená?

# Ověřování vlastností $(M, \circ)$

Máme-li zadanou dvojici „množina a operace“ a chceme-li zjistit, jestli se jedná o grupoid, pologrupu, monoid, (abelovskou) grupu, můžeme systematicky postupovat (nepřekvapivě) v následujícím pořadí:

1. Je množina uzavřená vůči operaci? Pokud ano, je to grupoid, pokud ne, konec.
2. Je operace asociativní? Pokud ano, je to pologrupa, pokud ne, konec.
3. Existuje neutrální prvek? Pokud ano, je to monoid, pokud ne, konec.
4. Existuje ke každému prvku inverzní prvek? Pokud ano, je to grupa, pokud ne, konec.
5. Je operace komutativní? Pokud ano, je to abelovská grupa, pokud ne, konec.

# Ověřování vlastností $(M, \circ)$

Máme-li zadanou dvojici „množina a operace“ a chceme-li zjistit, jestli se jedná o grupoid, pologrupu, monoid, (abelovskou) grupu, můžeme systematicky postupovat (nepřekvapivě) v následujícím pořadí:

1. Je množina uzavřená vůči operaci? Pokud ano, je to grupoid, pokud ne, konec.
2. Je operace asociativní? Pokud ano, je to pologrupa, pokud ne, konec.
3. Existuje neutrální prvek? Pokud ano, je to monoid, pokud ne, konec.
4. Existuje ke každému prvku inverzní prvek? Pokud ano, je to grupa, pokud ne, konec.
5. Je operace komutativní? Pokud ano, je to abelovská grupa, pokud ne, konec.

Většinou jsou „důkazy“ v jednotlivých krocích jednoduché až očividné.

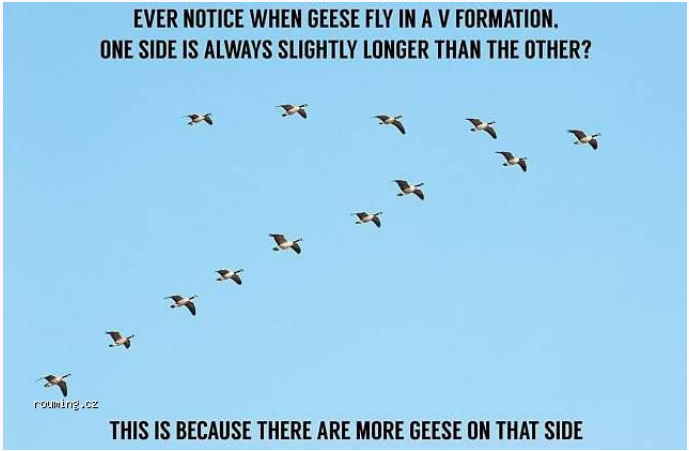
# Ověřování vlastností $(M, \circ)$

Máme-li zadanou dvojici „množina a operace“ a chceme-li zjistit, jestli se jedná o grupoid, pologrupu, monoid, (abelovskou) grupu, můžeme systematicky postupovat (nepřekvapivě) v následujícím pořadí:

1. Je množina uzavřená vůči operaci? Pokud ano, je to grupoid, pokud ne, konec.
2. Je operace asociativní? Pokud ano, je to pologrupa, pokud ne, konec.
3. Existuje neutrální prvek? Pokud ano, je to monoid, pokud ne, konec.
4. Existuje ke každému prvku inverzní prvek? Pokud ano, je to grupa, pokud ne, konec.
5. Je operace komutativní? Pokud ano, je to abelovská grupa, pokud ne, konec.

Většinou jsou „důkazy“ v jednotlivých krocích jednoduché až očividné. Někdy ne.

# Ověřování vlastností $(M, \circ)$




Uvedená „kuchařka“ je úplně zbytečná pokud znáte definice pojmů a chápete jejich hierarchii.

23. Úvod do teorie grup

24. Hierarchie množin s jednou binární operací

25. Příklady

26. Vlastnosti neutrálních a inverzních prvků

27. Znázornění grup
    - Cayleyho tabulka grupy
    - Cayleyho graf grupy

# Příklad č. 1

**Příklad 25.1**
Uvažujme grupoid $(\mathbb{Q}, \circ)$, kde binární operace $\circ$ je definována jako aritmetický průměr:

$$a \circ b := \frac{a+b}{2}\,.$$

Jedná se o grupoid / pologrupu / monoid / grupu?

# Příklad č. 1

**Příklad 25.1**
Uvažujme grupoid $(\mathbb{Q}, \circ)$, kde binární operace $\circ$ je definována jako aritmetický průměr:

$$a \circ b := \frac{a+b}{2}\,.$$

Jedná se o grupoid / pologrupu / monoid / grupu?

Pro racionální čísla $a$ a $b$ je výraz $\frac{a+b}{2}$ racionální číslo. Jde tedy o grupoid.

# Příklad č. 1

**Příklad 25.1**
Uvažujme grupoid $(\mathbb{Q}, \circ)$, kde binární operace $\circ$ je definována jako aritmetický průměr:

$$a \circ b := \frac{a+b}{2}\,.$$

Jedná se o grupoid / pologrupu / monoid / grupu?

Pro racionální čísla $a$ a $b$ je výraz $\frac{a+b}{2}$ racionální číslo. Jde tedy o grupoid.

V pologrupě musí platit asociativní zákon. Tvrdíme, že pro takto definovanou operaci $\circ$ *neplatí* a dokážeme to *protipříkladem*:

$$(2 \circ -2) \circ 4 = 0 \circ 4 = 2 \quad \text{ale} \quad 2 \circ (-2 \circ 4) = 2 \circ 1 = \frac{3}{2}\,.$$

Skutečně, pro takto zvolené prvky $\mathbb{Q}$ asociativní zákon neplatí a nejedná se proto o pologrupu. Z toho je již jasné, že $\mathbb{Q}$ s takto definovanou operací není ani monoid a ani grupa.

# Příklad č. 2

**Příklad 25.2**
Uvažujme grupoid $(\mathbb{R}^+, \circ)$, kde binární operace $\circ$ je definována takto:

$$a \circ b := \frac{a \cdot b}{a + b}.$$

Jedná se o pologrupu / monoid / grupu?

**Poznámka**: $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$.

# Příklad č. 2

**Příklad 25.2**
Uvažujme grupoid $(\mathbb{R}^+, \circ)$, kde binární operace $\circ$ je definována takto:

$$a \circ b := \frac{a \cdot b}{a + b}\,.$$

Jedná se o pologrupu / monoid / grupu?

**Poznámka**: $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$.

$$(a \circ b) \circ c = \{ \text{ definice } \circ \} = \frac{a \cdot b}{a + b} \circ c = \{ \text{ definice } \circ \} = \frac{\frac{a \cdot b}{a+b} \cdot c}{\frac{a \cdot b}{a+b} + c} =$$

$$= \frac{(a \cdot b) \cdot c}{a \cdot b + c \cdot (a + b)} = \frac{a \cdot (b \cdot c)}{a \cdot (b + c) + b \cdot c} = \frac{a \cdot \frac{b \cdot c}{b+c}}{a + \frac{b \cdot c}{b+c}} =$$

$$= \{ \text{ definice } \circ \} = a \circ \frac{c \cdot b}{c + b} = \{ \text{ definice } \circ \} = a \circ (b \circ c)\,.$$

Asociativní zákon platí a jedná se o pologrupu.

# Příklad č. 2

(...pokračování...)

Dokázali jsme, že $(\mathbb{R}^+, \circ)$ je pologrupa, je to též monoid? Neboli existuje neutrální prvek $e \in \mathbb{R}^+$ tak, že

$$(\forall a \in \mathbb{R}^+)(e \circ a = a \circ e = a) \ ?$$

# Příklad č. 2

(...pokračování...)

Dokázali jsme, že $(\mathbb{R}^+, \circ)$ je pologrupa, je to též monoid? Neboli existuje neutrální prvek $e \in \mathbb{R}^+$ tak, že

$$(\forall a \in \mathbb{R}^+)(e \circ a = a \circ e = a) \ ?$$

Neutrální prvek $e$ musí pro všechna $a \in \mathbb{R}^+$ splňovat rovnici

$$(a \circ e = a) \Rightarrow \left( \frac{a \cdot e}{a + e} = a \right) \Rightarrow (a \cdot e = a \cdot (a + e)) \Rightarrow (e = a + e) \Rightarrow (0 = a)\,,$$

která ale platí pouze pro $a = 0$. Neutrální prvek tedy neexistuje a o monoid se nejedná.

# Příklad č. 3

**Příklad 25.3**
Uvažujme grupoid $(\mathbb{R}, \cdot)$, kde za binární operaci $\cdot$ bereme klasické násobení čísel.

Jedná se o pologrupu / monoid / grupu?

# Příklad č. 3

**Příklad 25.3**
Uvažujme grupoid $(\mathbb{R}, \cdot)$, kde za binární operaci $\cdot$ bereme klasické násobení čísel.

Jedná se o pologrupu / monoid / grupu?

Asociativita $\cdot$ je známá vlastnost násobení reálných čísel. Jedná se tedy o pologrupu.

# Příklad č. 3

**Příklad 25.3**
Uvažujme grupoid $(\mathbb{R}, \cdot)$, kde za binární operaci $\cdot$ bereme klasické násobení čísel.

Jedná se o pologrupu / monoid / grupu?

Asociativita $\cdot$ je známá vlastnost násobení reálných čísel. Jedná se tedy o pologrupu.

Aby se jednalo o monoid, musí existovat neutrální prvek. Existuje?

# Příklad č. 3

**Příklad 25.3**
Uvažujme grupoid $(\mathbb{R}, \cdot)$, kde za binární operaci $\cdot$ bereme klasické násobení čísel.

Jedná se o pologrupu / monoid / grupu?

Asociativita $\cdot$ je známá vlastnost násobení reálných čísel. Jedná se tedy o pologrupu.

Aby se jednalo o monoid, musí existovat neutrální prvek. Existuje?

Pro neutrální prvek $e$ musí platit: $(\forall a \in \mathbb{R})(e \cdot a = a \cdot e = a)$ a takový prvek v $\mathbb{R}$ existuje a je to číslo $1$. Grupoid $(\mathbb{R}, \cdot)$ je tedy dokonce monoid.

# Příklad č. 3

**Příklad 25.3**
Uvažujme grupoid $(\mathbb{R}, \cdot)$, kde za binární operaci $\cdot$ bereme klasické násobení čísel.

Jedná se o pologrupu / monoid / grupu?

Asociativita $\cdot$ je známá vlastnost násobení reálných čísel. Jedná se tedy o pologrupu.

Aby se jednalo o monoid, musí existovat neutrální prvek. Existuje?

Pro neutrální prvek $e$ musí platit: $(\forall a \in \mathbb{R})(e \cdot a = a \cdot e = a)$ a takový prvek v $\mathbb{R}$ existuje a je to číslo $1$. Grupoid $(\mathbb{R}, \cdot)$ je tedy dokonce monoid.

A je to grupa? Neboli, existuje ke každému reálnému číslu $a$ číslo $a^{-1}$, tak že $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$? Existuje, ovšem pouze pokud $a$ není nula. O grupu se tedy nejedná.

## Důsledek

Z definice plyne, že každá grupa je monoid, každý monoid je pologrupa a každá pologrupa je grupoid. To můžeme symbolicky zapsat takto:

$$\text{grupoid} \supset \text{pologrupa} \supset \text{monoid} \supset \text{grupa}\,.$$

## Důsledek

Z definice plyne, že každá grupa je monoid, každý monoid je pologrupa a každá pologrupa je grupoid. To můžeme symbolicky zapsat takto:

$$\text{grupoid} \supset \text{pologrupa} \supset \text{monoid} \supset \text{grupa}\,.$$

Díky předchozím třem příkladům můžeme tuto hierarchii o něco zpřesnit:

$$\text{grupoid} \supsetneq \text{pologrupa} \supsetneq \text{monoid} \supsetneq \text{grupa}\,,$$

neboť jsme našli grupoid, který není pologrupou, pologrupu, která není monoidem a monoid, který není grupou.

# Cvičení i

**Základní cvičení 16.1**

Určete, které z následujících číselných množin s uvedenou operací tvoří grupoid / pologrupu / monoid / grupu / abelovskou grupu. Pokud existuje, najděte neutrální prvek a zjistěte, jak vypadají inverzní prvky.

(a) $(\mathbb{R}_0^+, +)$,

(b) $(\mathbb{R}_0^+, \cdot)$,

(c) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \div)$,

(d) $(\mathbb{Q}, -)$,

(e) $(\mathbb{Q}, \cdot)$,

(f) $(\mathbb{Q}, +)$.

# Cvičení ii

**Základní cvičení 16.3**

Mějme množinu $M = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Rozhodněte, zda tvoří dvojice $(M, \circ)$ grupoid / pologrupu / monoid / grupu / abelovskou grupu pokud je operace „$\circ$“

(a) sčítání modulo $n$.

(b) násobení modulo $n$.

# Příklad: grupa $\mathbb{Z}_n^+$

**Příklad 25.4 ($\mathbb{Z}_n^+$)**
Pro kladné $n \in \mathbb{N}$ je

$$\mathbb{Z}_n^+ := \big(\{0, 1, \ldots, n-1\}, +_n\big),$$

kde $+_n$ je sčítání modulo $n$, abelovská grupa.

- Množina $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \ldots, n-1\}$ je množina zbytkových tříd po dělení $n$. Množina $M$ je uzavřená vůči operaci sčítání modulo $n$.

# Příklad: grupa $\mathbb{Z}_n^+$

**Příklad 25.4 ($\mathbb{Z}_n^+$)**
Pro kladné $n \in \mathbb{N}$ je

$$\mathbb{Z}_n^+ := \big(\{0, 1, \ldots, n-1\}, +_n\big),$$

kde $+_n$ je sčítání modulo $n$, abelovská grupa.

- Množina $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \ldots, n-1\}$ je množina zbytkových tříd po dělení $n$. Množina $M$ je uzavřená vůči operaci sčítání modulo $n$.
- Uvažme $a, b, c \in \mathbb{Z}_n$ libovolné, potom existují $j_i, k_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$, tak, že

$$(a +_n b) +_n c = (a +_n b) + c + j_1 n = (a + b) + c + (k_1 + j_1)n,$$
$$a +_n (b +_n c) = a + (b +_n c) + j_2 n = a + (b + c) + (k_2 + j_2)n.$$

  Díky asociativitě $+$ tedy platí

$$(a +_n b) +_n c \equiv a +_n (b +_n c) \pmod{n}$$

  a dle definice $+_n$ pak i $(a +_n b) +_n c = a +_n (b +_n c)$.

# Příklad: grupa $\mathbb{Z}_n^+$

**Příklad 25.4 ($\mathbb{Z}_n^+$)**
Pro kladné $n \in \mathbb{N}$ je

$$\mathbb{Z}_n^+ := \big(\{0, 1, \ldots, n-1\},\, +_n\big),$$

kde $+_n$ je sčítání modulo $n$, abelovská grupa.

- Množina $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \ldots, n-1\}$ je množina zbytkových tříd po dělení $n$. Množina $M$ je uzavřená vůči operaci sčítání modulo $n$.
- Uvažme $a, b, c \in \mathbb{Z}_n$ libovolné, potom existují $j_i, k_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$, tak, že

$$(a +_n b) +_n c = (a +_n b) + c + j_1 n = (a + b) + c + (k_1 + j_1)n,$$
$$a +_n (b +_n c) = a + (b +_n c) + j_2 n = a + (b + c) + (k_2 + j_2)n.$$

  Díky asociativitě $+$ tedy platí

$$(a +_n b) +_n c \equiv a +_n (b +_n c) \pmod{n}$$

  a dle definice $+_n$ pak i $(a +_n b) +_n c = a +_n (b +_n c)$.
- Neutrálním prvkem vůči $+_n$ je $0$.

# Příklad: grupa $\mathbb{Z}_n^+$

**Příklad 25.4 ($\mathbb{Z}_n^+$)**
Pro kladné $n \in \mathbb{N}$ je

$$\mathbb{Z}_n^+ := \big(\{0, 1, \ldots, n-1\}, +_n\big),$$

kde $+_n$ je sčítání modulo $n$, abelovská grupa.

- Množina $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \ldots, n-1\}$ je množina zbytkových tříd po dělení $n$. Množina $M$ je uzavřená vůči operaci sčítání modulo $n$.
- Uvažme $a, b, c \in \mathbb{Z}_n$ libovolné, potom existují $j_i, k_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$, tak, že

  $$(a +_n b) +_n c = (a +_n b) + c + j_1 n = (a + b) + c + (k_1 + j_1)n,$$
  $$a +_n (b +_n c) = a + (b +_n c) + j_2 n = a + (b + c) + (k_2 + j_2)n.$$

  Díky asociativitě $+$ tedy platí

  $$(a +_n b) +_n c \equiv a +_n (b +_n c) \pmod{n}$$

  a dle definice $+_n$ pak i $(a +_n b) +_n c = a +_n (b +_n c)$.
- Neutrálním prvkem vůči $+_n$ je $0$.
- Inverzním prvkem k $a \in \mathbb{Z}_n$, $a \neq 0$, je $n - a$. Inverzním prvkem k $0$ je $0$.

# Příklad: grupa $\mathbb{Z}_n^+$

**Příklad 25.4 ($\mathbb{Z}_n^+$)**
Pro kladné $n \in \mathbb{N}$ je

$$\mathbb{Z}_n^+ := \big(\{0, 1, \ldots, n-1\}, +_n\big),$$

kde $+_n$ je sčítání modulo $n$, abelovská grupa.

- Množina $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \ldots, n-1\}$ je množina zbytkových tříd po dělení $n$. Množina $M$ je uzavřená vůči operaci sčítání modulo $n$.
- Uvažme $a, b, c \in \mathbb{Z}_n$ libovolné, potom existují $j_i, k_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$, tak, že

  $$(a +_n b) +_n c = (a +_n b) + c + j_1 n = (a + b) + c + (k_1 + j_1)n,$$
  $$a +_n (b +_n c) = a + (b +_n c) + j_2 n = a + (b + c) + (k_2 + j_2)n.$$

  Díky asociativitě $+$ tedy platí

  $$(a +_n b) +_n c \equiv a +_n (b +_n c) \pmod{n}$$

  a dle definice $+_n$ pak i $(a +_n b) +_n c = a +_n (b +_n c)$.
- Neutrálním prvkem vůči $+_n$ je $0$.
- Inverzním prvkem k $a \in \mathbb{Z}_n$, $a \neq 0$, je $n - a$. Inverzním prvkem k $0$ je $0$.

# Příklad: grupa $\mathbb{Z}_n^\times$ (1 ze 2)

**Příklad 25.5 ($\mathbb{Z}_n^\times$)**
Pro kladné $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, je

$$\mathbb{Z}_n^\times := \big(\{k \in \{1, \ldots, n-1\} : k \text{ a } n \text{ jsou nesoudělná}\}, \times_n\big),$$

kde $\times_n$ je násobení modulo $n$, abelovská grupa.

**Tvrdíme**: jsou-li $k$ a $\ell$ z $\{1, \ldots, n-1\}$ nesoudělná s $n$, pak i $k \times_n \ell$ je nesoudělné s $n$.

**Důkaz sporem**: buďte $k$ a $\ell$ nesoudělná s $n$ a $d \in \{0, \ldots, n-1\}$ takové, že $k\ell = jn + d$ pro nějaké $j \in \mathbb{Z}$. Předpokládejme, že $d$ je soudělné s $n$. Jelikož $d$ je soudělné s $n$, existuje prvočíslo dělící čísla $d$ i $n$, které musí dělit i $k$ nebo $\ell$, což je spor.

Máme tedy uzavřenost množiny vzhledem k dané operaci.

# Příklad: grupa $\mathbb{Z}_n^\times$ (1 ze 2)

**Příklad 25.5 ($\mathbb{Z}_n^\times$)**
Pro kladné $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, je

$$\mathbb{Z}_n^\times := \big(\{k \in \{1, \ldots, n-1\} : k \text{ a } n \text{ jsou nesoudělná}\}, \times_n\big),$$

kde $\times_n$ je násobení modulo $n$, abelovská grupa.

**Tvrdíme**: jsou-li $k$ a $\ell$ z $\{1, \ldots, n-1\}$ nesoudělná s $n$, pak i $k \times_n \ell$ je nesoudělné s $n$.

**Důkaz sporem**: buďte $k$ a $\ell$ nesoudělná s $n$ a $d \in \{0, \ldots, n-1\}$ takové, že $k\ell = jn + d$ pro nějaké $j \in \mathbb{Z}$. Předpokládejme, že $d$ je soudělné s $n$. Jelikož $d$ je soudělné s $n$, existuje prvočíslo dělící čísla $d$ i $n$, které musí dělit i $k$ nebo $\ell$, což je spor.

Máme tedy uzavřenost množiny vzhledem k dané operaci.

Asociativita operace $\times_n$ plyne z asociativity násobení reálných čísel podobně jako v předcházejícím příkladě.

# Příklad: grupa $\mathbb{Z}_n^\times$ (1 ze 2)

**Příklad 25.5 ($\mathbb{Z}_n^\times$)**
Pro kladné $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, je

$$\mathbb{Z}_n^\times := \big(\{k \in \{1, \ldots, n-1\} : k \text{ a } n \text{ jsou nesoudělná}\}, \times_n\big),$$

kde $\times_n$ je násobení modulo $n$, abelovská grupa.

**Tvrdíme**: jsou-li $k$ a $\ell$ z $\{1, \ldots, n-1\}$ nesoudělná s $n$, pak i $k \times_n \ell$ je nesoudělné s $n$.

**Důkaz sporem**: buďte $k$ a $\ell$ nesoudělná s $n$ a $d \in \{0, \ldots, n-1\}$ takové, že $k\ell = jn + d$ pro nějaké $j \in \mathbb{Z}$. Předpokládejme, že $d$ je soudělné s $n$. Jelikož $d$ je soudělné s $n$, existuje prvočíslo dělící čísla $d$ i $n$, které musí dělit i $k$ nebo $\ell$, což je spor.

Máme tedy uzavřenost množiny vzhledem k dané operaci.

Asociativita operace $\times_n$ plyne z asociativity násobení reálných čísel podobně jako v předcházejícím příkladě.

Neutrální prvek je $1$.

# Příklad: grupa $\mathbb{Z}_n^\times$ (2 ze 2)

Inverzní prvky: je-li $k$ nesoudělné s $n$, existují $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tak, že

$$\alpha k + \beta n = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha k \equiv 1 \pmod{n}.$$

Jelikož je takové číslo $\alpha$ nesoudělné s $n$, tak $\alpha \bmod n$ je hledaný inverzní prvek.

$\times_n$ je komutativní. $\mathbb{Z}_n^\times$ je tedy skutečně abelovská grupa.

Nemohlo by v nosiči být více zbytků po dělení $n$ (vzhledem k $\times_n$)?

Ne, čísla **soudělná s** $n$ nemají inverzní prvek: uvažujme jakékoli číslo $1 < k < n$ soudělné s $n$. Předpokládejme, že $\ell$ je inverzní prvek k prvku $k$, tedy že platí $k\ell \equiv 1 \pmod{n}$. Tedy pro nějaké $j$ platí $k\ell = 1 + jn$, a tedy $1 = k\ell - jn = d(\frac{k}{d}\ell - j\frac{n}{d})$, kde $d$, $d > 1$, je společný faktor $k$ a $n$. Tím dostaneme spor, tedy k prvku $k$ bychom nenašli inverzní prvek.

# Terminologie: modulární grupy celých čísel

$\mathbb{Z}_n^+$ je **aditivní modulární grupa (celých čísel) modulo** $n$.

$\mathbb{Z}_n^\times$ je **multiplikativní modulární grupa (celých čísel) modulo** $n$.

Jiná běžná značení: $\mathbb{Z}_n^*$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

23. Úvod do teorie grup

24. Hierarchie množin s jednou binární operací

25. Příklady

26. Vlastnosti neutrálních a inverzních prvků

27. Znázornění grup
    - Cayleyho tabulka grupy
    - Cayleyho graf grupy

# Jednoznačnost neutrálního prvku

**Věta 26.1**

*V monoidu existuje právě jeden neutrální prvek.*

# Jednoznačnost neutrálního prvku

**Věta 26.1**

*V monoidu existuje právě jeden neutrální prvek.*

**Důkaz.**

Buď $(G, \circ)$ monoid a $e$ nějaký neutrální prvek (z definice víme, že tam alespoň jeden je!). Dokážeme *sporem*, že $e$ je jediný neutrální prvek.

Pro spor předpokládejme, že v monoidu existuje další neutrální prvek $\overline{e}$ různý od $e$, tj. $e \neq \overline{e}$. Potom platí

$$\overline{e} = \overline{e} \circ e = e,$$

kde jsme použili vlastnost neutrálního prvku danou definicí. Tím dostáváme spor s tím, že $\overline{e}$ a $e$ jsou různé. □

# Jednoznačnost inverzního prvku

**Věta 26.2**

*V grupě má každý prvek právě jeden inverzní prvek.*

# Jednoznačnost inverzního prvku

**Věta 26.2**

*V grupě má každý prvek právě jeden inverzní prvek.*

**Důkaz.**

Buď $(G, \circ)$ grupa, $a$ libovolný prvek této grupy a nějaký k němu inverzní prvek $b$ (z definice grupy víme, že tam alespoň jeden je). Dokážeme *sporem*, že $b$ je jediný inverzní prvek.

Pro spor předpokládejme, že v grupě existuje jiný inverzní prvek $c$ různý od $b$. Potom platí

$$c = c \circ e = c \circ (a \circ b) = (c \circ a) \circ b = e \circ b = b,$$

kde $e$ je neutrální prvek. Tím dostáváme spor s tím, že $c$ a $b$ jsou různé. □

# Inverzní prvek - značení

**Značení 26.3**

*V souladu se zavedeným značením 24.2 značíme inverzní prvek k prvku $a$ grupy $(G, \circ)$ pro obecné (multiplikativní) značení takto:*

$$a^{-1},$$

*a pro aditivní značení takto:*

$$-a.$$

23. Úvod do teorie grup

24. Hierarchie množin s jednou binární operací

25. Příklady

26. Vlastnosti neutrálních a inverzních prvků

27. Znázornění grup
    - Cayleyho tabulka grupy
    - Cayleyho graf grupy

# Cayleyho tabulka pro konečné grupy

Pokud má množina $M$ z dvojice $(M, \circ)$ konečný počet prvků, lze její strukturu (danou operací $\circ$) kompletně zachytit v tzv. Cayleyho tabulce, jejíž konstrukce je zřejmá z následujícího příkladu.

# Cayleyho tabulka pro konečné grupy

Pokud má množina $M$ z dvojice $(M, \circ)$ konečný počet prvků, lze její strukturu (danou operací $\circ$) kompletně zachytit v tzv. Cayleyho tabulce, jejíž konstrukce je zřejmá z následujícího příkladu.

**Příklad 27.1**
Uvažujme grupu $\mathbb{Z}_4^+$. Jelikož má její nosič $4$ prvky, bude mít Cayleyho tabulka $4$ řádky a $4$ sloupce označené těmito čtyřmi prvky (takže bude typicky znázorněná jako tabulka 5x5).

# Cayleyho tabulka pro konečné grupy

Pokud má množina $M$ z dvojice $(M, \circ)$ konečný počet prvků, lze její strukturu (danou operací $\circ$) kompletně zachytit v tzv. Cayleyho tabulce, jejíž konstrukce je zřejmá z následujícího příkladu.

**Příklad 27.1**
Uvažujme grupu $\mathbb{Z}_4^+$. Jelikož má její nosič $4$ prvky, bude mít Cayleyho tabulka $4$ řádky a $4$ sloupce označené těmito čtyřmi prvky (takže bude typicky znázorněná jako tabulka 5x5).

| $+_4$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | |
| 1 | | | | |
| 2 | | | | 1 |
| 3 | | | | |

Nyní do pole na řádku $m$ a v sloupci $n$ vyplníme výsledek $m +_4 n = m + n \pmod 4$. Například do řádku $2$ a sloupce $3$ vyplníme $2 + 3 \pmod 4 = 1$.

# Cayleyho tabulka pro konečné grupy

Pokud má množina $M$ z dvojice $(M, \circ)$ konečný počet prvků, lze její strukturu (danou operací $\circ$) kompletně zachytit v tzv. Cayleyho tabulce, jejíž konstrukce je zřejmá z následujícího příkladu.

**Příklad 27.1**
Uvažujme grupu $\mathbb{Z}_4^+$. Jelikož má její nosič $4$ prvky, bude mít Cayleyho tabulka $4$ řádky a $4$ sloupce označené těmito čtyřmi prvky (takže bude typicky znázorněná jako tabulka 5x5).

| $+_4$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 0 | 1 | 2 |

Nyní do pole na řádku $m$ a v sloupci $n$ vyplníme výsledek $m +_4 n = m + n \pmod 4$. Například do řádku $2$ a sloupce $3$ vyplníme $2 + 3 \pmod 4 = 1$.

# Jak poznat různé věci z Cayleyovy tabulky

Cayleho tabulka skýtá o dané množině a operaci veškeré informace. Některé vlastnosti lze z tabulky vyčíst velmi snadno, jiné už hůře:

# Jak poznat různé věci z Cayleyovy tabulky

Cayleho tabulka skýtá o dané množině a operaci veškeré informace. Některé vlastnosti lze z tabulky vyčíst velmi snadno, jiné už hůře:

- Uzavřenost množiny $M$ vůči operaci $\circ$ poznáme tak, že

# Jak poznat různé věci z Cayleyovy tabulky

Cayleho tabulka skýtá o dané množině a operaci veškeré informace. Některé vlastnosti lze z tabulky vyčíst velmi snadno, jiné už hůře:

- Uzavřenost množiny $M$ vůči operaci $\circ$ poznáme tak, že všechny pole tabulky obsahují prvky z množiny $M$.

# Jak poznat různé věci z Cayleyovy tabulky

Cayleho tabulka skýtá o dané množině a operaci veškeré informace. Některé vlastnosti lze z tabulky vyčíst velmi snadno, jiné už hůře:

- Uzavřenost množiny $M$ vůči operaci $\circ$ poznáme tak, že všechny pole tabulky obsahují prvky z množiny $M$.
- Asociativitu operace z tabulky poznáme

# Jak poznat různé věci z Cayleyovy tabulky

Cayleho tabulka skýtá o dané množině a operaci veškeré informace. Některé vlastnosti lze z tabulky vyčíst velmi snadno, jiné už hůře:

- Uzavřenost množiny $M$ vůči operaci $\circ$ poznáme tak, že všechny pole tabulky obsahují prvky z množiny $M$.
- Asociativitu operace z tabulky poznáme těžko (projděte všechny trojice prvků a ověřte splnění asociativity…).

# Jak poznat různé věci z Cayleyovy tabulky

Cayleho tabulka skýtá o dané množině a operaci veškeré informace. Některé vlastnosti lze z tabulky vyčíst velmi snadno, jiné už hůře:

- Uzavřenost množiny $M$ vůči operaci $\circ$ poznáme tak, že všechny pole tabulky obsahují prvky z množiny $M$.
- Asociativitu operace z tabulky poznáme těžko (projděte všechny trojice prvků a ověřte splnění asociativity...).
- Neutrální prvek $e$ v tabulce poznáme tak, že

# Jak poznat různé věci z Cayleyovy tabulky

Cayleho tabulka skýtá o dané množině a operaci veškeré informace. Některé vlastnosti lze z tabulky vyčíst velmi snadno, jiné už hůře:

- Uzavřenost množiny $M$ vůči operaci $\circ$ poznáme tak, že všechny pole tabulky obsahují prvky z množiny $M$.
- Asociativitu operace z tabulky poznáme těžko (projděte všechny trojice prvků a ověřte splnění asociativity...).
- Neutrální prvek $e$ v tabulce poznáme tak, že v „jeho“ řádku a sloupci se přesně opakují označení řádku a sloupce tabulky.

# Jak poznat různé věci z Cayleyovy tabulky

Cayleho tabulka skýtá o dané množině a operaci veškeré informace. Některé vlastnosti lze z tabulky vyčíst velmi snadno, jiné už hůře:

- Uzavřenost množiny $M$ vůči operaci $\circ$ poznáme tak, že všechny pole tabulky obsahují prvky z množiny $M$.
- Asociativitu operace z tabulky poznáme těžko (projděte všechny trojice prvků a ověřte splnění asociativity...).
- Neutrální prvek $e$ v tabulce poznáme tak, že v „jeho“ řádku a sloupci se přesně opakují označení řádku a sloupce tabulky.
- Inverzní prvek k prvku $a$ najdeme tak, že

# Jak poznat různé věci z Cayleyovy tabulky

Cayleho tabulka skýtá o dané množině a operaci veškeré informace. Některé vlastnosti lze z tabulky vyčíst velmi snadno, jiné už hůře:

- Uzavřenost množiny $M$ vůči operaci $\circ$ poznáme tak, že všechny pole tabulky obsahují prvky z množiny $M$.
- Asociativitu operace z tabulky poznáme těžko (projděte všechny trojice prvků a ověřte splnění asociativity...).
- Neutrální prvek $e$ v tabulce poznáme tak, že v „jeho“ řádku a sloupci se přesně opakují označení řádku a sloupce tabulky.
- Inverzní prvek k prvku $a$ najdeme tak, že najdeme v příslušně označeném řádku a sloupci neutrální prvek $e$ ...

# Jak poznat různé věci z Cayleyovy tabulky

Cayleho tabulka skýtá o dané množině a operaci veškeré informace. Některé vlastnosti lze z tabulky vyčíst velmi snadno, jiné už hůře:

- Uzavřenost množiny $M$ vůči operaci $\circ$ poznáme tak, že všechny pole tabulky obsahují prvky z množiny $M$.
- Asociativitu operace z tabulky poznáme těžko (projděte všechny trojice prvků a ověřte splnění asociativity...).
- Neutrální prvek $e$ v tabulce poznáme tak, že v „jeho“ řádku a sloupci se přesně opakují označení řádku a sloupce tabulky.
- Inverzní prvek k prvku $a$ najdeme tak, že najdeme v příslušně označeném řádku a sloupci neutrální prvek $e$ ...
- Operace je komutativní, pokud

# Jak poznat různé věci z Cayleyovy tabulky

Cayleho tabulka skýtá o dané množině a operaci veškeré informace. Některé vlastnosti lze z tabulky vyčíst velmi snadno, jiné už hůře:

- Uzavřenost množiny $M$ vůči operaci $\circ$ poznáme tak, že všechny pole tabulky obsahují prvky z množiny $M$.
- Asociativitu operace z tabulky poznáme těžko (projděte všechny trojice prvků a ověřte splnění asociativity...).
- Neutrální prvek $e$ v tabulce poznáme tak, že v „jeho“ řádku a sloupci se přesně opakují označení řádku a sloupce tabulky.
- Inverzní prvek k prvku $a$ najdeme tak, že najdeme v příslušně označeném řádku a sloupci neutrální prvek $e$ ...
- Operace je komutativní, pokud je tabulka symetrická vůči hlavní diagonále.

# Jak poznat různé věci z Cayleyovy tabulky

Cayleho tabulka skýtá o dané množině a operaci veškeré informace. Některé vlastnosti lze z tabulky vyčíst velmi snadno, jiné už hůře:

- Uzavřenost množiny $M$ vůči operaci $\circ$ poznáme tak, že všechny pole tabulky obsahují prvky z množiny $M$.
- Asociativitu operace z tabulky poznáme těžko (projděte všechny trojice prvků a ověřte splnění asociativity...).
- Neutrální prvek $e$ v tabulce poznáme tak, že v „jeho“ řádku a sloupci se přesně opakují označení řádku a sloupce tabulky.
- Inverzní prvek k prvku $a$ najdeme tak, že najdeme v příslušně označeném řádku a sloupci neutrální prvek $e$ ...
- Operace je komutativní, pokud je tabulka symetrická vůči hlavní diagonále.

**Poznámka:** Cayleyho tabulka není příliš praktická v případě, kdy množina $M$ má velký počet prvků.

# Cayleyho tabulka a latinský čtverec (1/4)

**Otázka**: Lze z Cayleyho tabulky snadno poznat, jestli se jedná o tabulku grupy?

**Odpověď**: Skoro.

# Cayleyho tabulka a latinský čtverec (1/4)

**Otázka**: Lze z Cayleyho tabulky snadno poznat, jestli se jedná o tabulku grupy?

**Odpověď**: Skoro.

**Věta 27.2**

*Cayleyho tabulka každé grupy tvoří latinský čtverec.*

- Latinský čtverec pro $n$ prvkovou množinu $M$ je matice $n \times n$ taková, že v každém řádku i sloupci jsou vždy všechny prvky množiny $M$.

# Cayleyho tabulka a latinský čtverec (1/4)

**Otázka**: Lze z Cayleyho tabulky snadno poznat, jestli se jedná o tabulku grupy?

**Odpověď**: Skoro.

**Věta 27.2**

*Cayleyho tabulka každé grupy tvoří latinský čtverec.*

- Latinský čtverec pro $n$ prvkovou množinu $M$ je matice $n \times n$ taková, že v každém řádku i sloupci jsou vždy všechny prvky množiny $M$.
- Větu dokážeme tak, že dokážeme jinou větu, ze které už bude důkaz této věty triviálně vyplývat.

# Cayleyho tabulka a latinský čtverec (1/4)

**Otázka**: Lze z Cayleyho tabulky snadno poznat, jestli se jedná o tabulku grupy?

**Odpověď**: Skoro.

**Věta 27.2**

*Cayleyho tabulka každé grupy tvoří latinský čtverec.*

- Latinský čtverec pro $n$ prvkovou množinu $M$ je matice $n \times n$ taková, že v každém řádku i sloupci jsou vždy všechny prvky množiny $M$.
- Větu dokážeme tak, že dokážeme jinou větu, ze které už bude důkaz této věty triviálně vyplývat.
- Bohužel ne každá Cayleho tabulka tvořící latinský čtverec je tabulkou grupy. Později si ukážeme protipříklad.

# Cayleyho tabulka a latinský čtverec (2/4)

**Věta 27.3**

*V každé grupě lze jednoznačně dělit.*
*Tzn.: V každé grupě* $(G, \circ)$ *mají pro libovolné* $a, b \in G$ *rovnice*

$$a \circ x = b \quad \textit{a} \quad y \circ a = b \quad \textit{jediné řešení.}$$

Tuto větu jsme dokázali dříve v této přednášce ještě před zavedením pojmu grupa, přesto zde uvedeme další důkaz, lehce „algebraičtější“.

# Cayleyho tabulka a latinský čtverec (2/4)

**Věta 27.3**

*V každé grupě lze jednoznačně dělit.*
*Tzn.: V každé grupě* $(G, \circ)$ *mají pro libovolné* $a, b \in G$ *rovnice*

$$a \circ x = b \quad \text{a} \quad y \circ a = b \quad \text{jediné řešení.}$$

Tuto větu jsme dokázali dříve v této přednášce ještě před zavedením pojmu grupa, přesto zde uvedeme další důkaz, lehce „algebraičtější“.

**Důkaz.**

Jelikož se jedná o grupu, každý prvek má (jediný) inverzní prvek, a snadno tedy zjistíme, že řešením rovnic jsou prvky $a^{-1} \circ b$ resp. $b \circ a^{-1}$.

Jednoznačnost se dokáže sporem: nechť existuje řešení $x_1 \neq a^{-1} \circ b$, potom

$$x_1 = (a^{-1} \circ a) \circ x_1 = a^{-1} \circ (a \circ x_1) = a^{-1} \circ b\,.$$

□

# Cayleyho tabulka a latinský čtverec (3/4)

Nyní dokážeme předchozí větu, která říká že Cayleyho tabulka grupy je latinský čtverec:

**Důkaz.**

Dokážeme to sporem:

- Předpokládejme, že tabulka nějaké grupy $(G, \circ)$ není latinský čtverec.

# Cayleyho tabulka a latinský čtverec (3/4)

Nyní dokážeme předchozí větu, která říká že Cayleyho tabulka grupy je latinský čtverec:

**Důkaz.**

Dokážeme to sporem:

- Předpokládejme, že tabulka nějaké grupy $(G, \circ)$ není latinský čtverec.
- To znamená, že v nějakém řádku nebo sloupci se jeden prvek, označme jej $b$, opakuje dvakrát. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že je to v řádku $n$ ve sloupcích $m_1$ a $m_2$.

| $\circ$ | $\cdots$ | $m_1$ | $\cdots$ | $m_2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | |
| $n$ | $\cdots$ | $b$ | $\cdots$ | $b$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | |

# Cayleyho tabulka a latinský čtverec (3/4)

Nyní dokážeme předchozí větu, která říká že Cayleyho tabulka grupy je latinský čtverec:

**Důkaz.**

Dokážeme to sporem:

- Předpokládejme, že tabulka nějaké grupy $(G, \circ)$ není latinský čtverec.
- To znamená, že v nějakém řádku nebo sloupci se jeden prvek, označme jej $b$, opakuje dvakrát. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že je to v řádku $n$ ve sloupcích $m_1$ a $m_2$.

| $\circ$ | $\cdots$ | $m_1$ | $\cdots$ | $m_2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | |
| $n$ | $\cdots$ | $b$ | $\cdots$ | $b$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | |

- Z toho ale okamžitě vyplývá, že rovnice $n \circ x = b$ má dvě různá řešení $m_1$ a $m_2$, což je **spor s předchozí větou**! □

# Cayleyho tabulka a latinský čtverec (4/4)

- Ukázali jsme, že to, že Cayleyho tabulka je latinský čtverec, je *nutnou* podmínkou pro to, aby daná množina a operace byla grupou.

# Cayleyho tabulka a latinský čtverec (4/4)

- Ukázali jsme, že to, že Cayleyho tabulka je latinský čtverec, je *nutnou* podmínkou pro to, aby daná množina a operace byla grupou.
- Jak ukazuje následující protipříklad, nejedná se o podmínku *postačující*.

**Příklad 27.4**
Uvažujme množinu $M = \{a, b, c\}$ s operací zadanou touto Cayleyho tabulkou:

| $\circ$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $a$ | $c$ |
| $b$ | $c$ | $b$ | $a$ |
| $c$ | $a$ | $c$ | $b$ |

Tato tabulka tvoří latinský čtverec, ale přesto není tabulkou grupy. (Proč?)

# Cayleyho graf grupy

Vizualizovat konečnou grupu $G = (M, \circ)$ lze dále pomocí Cayleyho orientovaného grafu $(V, E)$, kde

- vrcholy grafu $V$ jsou prvky grupy, tj. $V = M$,
- orientovaná hrana $(a, b)$ patří do $E$, právě když $b = a \circ c$ pro jisté $c \in N$.

Množinu $N$ vhodně zvolíme předem (většinou neobsahuje neutrální prvek grupy $G$; typicky jde o generující množinu, viz příští přednáška). Hrany lze pro přehlednost obarvit podle příslušnosti k $c$.

# Cayleyho graf grupy

Vizualizovat konečnou grupu $G = (M, \circ)$ lze dále pomocí Cayleyho orientovaného grafu $(V, E)$, kde

- vrcholy grafu $V$ jsou prvky grupy, tj. $V = M$,
- orientovaná hrana $(a, b)$ patří do $E$, právě když $b = a \circ c$ pro jisté $c \in N$.

Množinu $N$ vhodně zvolíme předem (většinou neobsahuje neutrální prvek grupy $G$; typicky jde o generující množinu, viz příští přednáška). Hrany lze pro přehlednost obarvit podle příslušnosti k $c$.

Podobně jako u Cayleyho tabulek platí, že se Cayleyho grafy hodí pro grupy s menším počtem prvků. Lépe v nich navíc vynikne struktura grupy (viz dále).

# Cayleyho graf grupy

Vizualizovat konečnou grupu $G = (M, \circ)$ lze dále pomocí Cayleyho orientovaného grafu $(V, E)$, kde

- vrcholy grafu $V$ jsou prvky grupy, tj. $V = M$,
- orientovaná hrana $(a, b)$ patří do $E$, právě když $b = a \circ c$ pro jisté $c \in N$.

Množinu $N$ vhodně zvolíme předem (většinou neobsahuje neutrální prvek grupy $G$; typicky jde o generující množinu, viz příští přednáška). Hrany lze pro přehlednost obarvit podle příslušnosti k $c$.

Podobně jako u Cayleyho tabulek platí, že se Cayleyho grafy hodí pro grupy s menším počtem prvků. Lépe v nich navíc vynikne struktura grupy (viz dále).

Pokud by grupa nebyla abelovská, museli bychom kreslit i hrany $(a, b)$ pro $a = b \circ c$ pro $c \in N$.

# Cayleyho graf grupy: příklad $\mathbb{Z}_4^+$