NI-MPI přednáška 14

Algebra III

Štěpán Starosta

25. 11. 2024

FIT ČVUT

Různé grupy – stejná struktura (1 z 6)

$\mathbb{Z}_5^\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

řád: 4

podgrupy: $\{1\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$

neutrální prvek: 1

inverze: $1^{-1} = 1$, $2^{-1} = 3$, $3^{-1} = 2$, $4^{-1} = 4$

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

řád: 4

podgrupy: $\{0\}$, $\{0, 2\}$, $\{0, 1, 2, 3\}$

neutrální prvek: 0

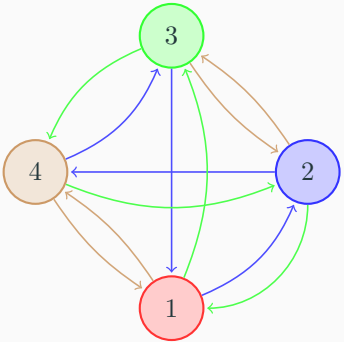
inverze: $0^{-1} = 0$, $1^{-1} = 3$, $2^{-1} = 2$, $3^{-1} = 1$

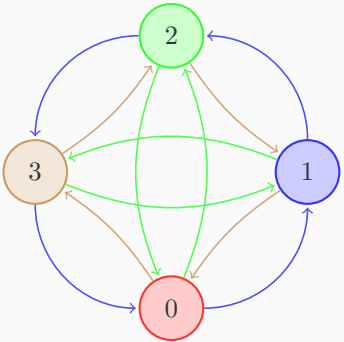
Nejsou $\mathbb{Z}_4^+$ a $\mathbb{Z}_5^\times$ vlastně stejné grupy lišící se pouze ve „jménech“ svých prvků a označení operace?

Různé grupy – stejná struktura (2 z 6)

$\mathbb{Z}_5^\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2





Různé grupy – stejná struktura (3 z 6)

$\mathbb{Z}_5^\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Zkusme přejmenovat prvky grupy $\mathbb{Z}_5^\times$ tak, abychom dostali $\mathbb{Z}_4^+$:

- neutrální prvek má velmi speciální a jedinečné vlastnosti, proto přejmenujme 1 na 0,
- pokud se má zachovat kompletně struktura, musí jediné dvouprvkové podgrupě $\{1, 4\}$ (v $\mathbb{Z}_5^\times$) odpovídat podgrupa $\{0, 2\}$ (v $\mathbb{Z}_4^+$), proto $4 \leftrightarrow 2$,
- nyní už stačí přejmenovat 2 a 3: zjistíme, že obě zbývající možnosti fungují, zvolme tedy např. $3 \leftrightarrow 1$ a $2 \leftrightarrow 3$,
- a nyní už stačí přeházet řádky …a máme Cayleyho tabulku $\mathbb{Z}_4^+$.

Různé grupy – stejná struktura (4 z 6)

- Našli jsme způsob, jak přeznačit prvky v jedné tabulce, abychom dostali přesně tabulku druhou (po přeházení řádků a sloupců).

- Toto přejmenování je vlastně **prosté** zobrazení množiny $\{1,2,3,4\}$ **na** množinu $\{0,1,2,3\}$, označme jej h_1:

$$h_1(1) = 0, \quad h_1(2) = 3, \quad h_1(3) = 1, \quad h_1(4) = 2\,.$$

- Jak jsme naznačili, fungovalo by i h_2 (jen bychom museli na závěr jinak zpřeházet řádky a sloupce):

$$h_2(1) = 0, \quad h_2(2) = 1, \quad h_2(3) = 3, \quad h_2(4) = 2\,.$$

Nefungovaly by tedy všechny bijekce? A jestli ne, tak čím jsou tyto dvě výjimečné?

Různé grupy – stejná struktura (5 z 6)

Přejmenujme prvky grupy $\mathbb{Z}_5^\times$ podle bijekce h_3:

$$h_3(1) = 0, \quad h_3(2) = 3, \quad h_3(3) = 2, \quad h_3(4) = 1\,.$$

$\mathbb{Z}_5^\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

- Výsledná tabulka ale neodpovídá grupě $\mathbb{Z}_4^+$ s operací sčítání modulo 4, neboť například $3 + 3 \pmod 4 \neq 1$.
- Bijekce h_3 tedy nevytvoří stejnou strukturu jakou má grupa $\mathbb{Z}_4^+$, takovou vlastnost mají pouze h_1 a h_2.

Různé grupy – stejná struktura (6 z 6)

Hledaná vlastnost bijekce h, kterou mají pouze bijekce h_1 a h_2, je tato:

$$\text{pro všechna } n, m \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ platí} \quad h(n \times_5 m) = h(n) +_4 h(m),$$

kde $\times_5$ značí operaci v grupě $\mathbb{Z}_5^\times$ a $+_4$ v grupě $\mathbb{Z}_4^+$.

*Slovy: Jestliže na libovolné prvky v grupě $\mathbb{Z}_5^\times$ aplikujeme operaci $\times_5$ a pak je zobrazíme do $\mathbb{Z}_4^+$ pomocí h, dostaneme vždy stejný výsledek, jako kdybychom je nejdříve pomocí h zobrazili do $\mathbb{Z}_4^+$ a **potom** aplikovali operaci $+_4$.*

$$\begin{array}{ccc} n, m \in \mathbb{Z}_5^\times & \xrightarrow{\times_5} & n \times_5 m \in \mathbb{Z}_5^\times \\ \Big\downarrow h & & \Big\downarrow h \\ h(n), h(m) \in \mathbb{Z}_4^+ & \xrightarrow{+_4} & h(n) +_4 h(m) = h(n \times_5 m) \end{array}$$

Bijekce navíc musí tzv. zachovávat operaci. Vzpomeňte na lineární zobrazení...

Homomorfismus a izomorfismus

Definice 33.1

Buďte $G = (M, \circ_G)$ a $H = (N, \circ_H)$ dva grupoidy. Zobrazení $h : M \to N$ nazveme homomorfismem G do H jestliže

$$\text{pro všechna } x, y \in M \text{ platí} \quad h(x \circ_G y) = h(x) \circ_H h(y).$$

Je-li navíc h injektivní, resp. surjektivní, resp. bijektivní, říkáme že h je monomorfismus, resp. epimorfismus, resp. izomorfismus.

- Homomorfismus tedy zachovává strukturu danou binární operací: je jedno jestli nejdříve aplikuji operaci a pak homomorfismus, nebo naopak.
- Jediné, co potřebujeme pro definování této vlastnosti, je uzavřenost množiny vůči binární operaci, proto jsme homomorfismus definovali pro nejobecnější grupoidy.
- Definice se přímo přenáší na grupy, a používá se termín (homo|mono|epi|izo)morfismus grup.

Řecké jazykové okénko

- morfismus: z řecké slova *morfé*, znamenajícího forma, tvar
- homo: *homós*, stejný,
- izo: *ísos*, sobě rovný,
- epi: *epí*, na,
- mono: *monós*, samotný, jediný.

Izomorfní grupy

Definice 33.2

Grupy G a H nazýváme izomorfní, právě když existuje izomorfismus $G \to H$. O grupě G také říkáme, že je izomorfní s grupou H.

- Vlastnost dvou grup „být izomorfní“ je relace ekvivalence na třídě všech grup.
- Příkladem izomorfních grup jsou $\mathbb{Z}_5^\times$ a $\mathbb{Z}_4^+$: našli jsme dokonce dva různé izomorfismy h_1 a h_2.
- Je jasné, že izomorfní grupy musí mít stejný řád!

Základní vlastnosti homomorfismu (1 ze 2)

Věta 33.3

Buď h homomorfismus grupy $G = (M, \circ_G)$ do grupoidu $H = (N, \circ_H)$. Potom $h(G) := (h(M), \circ_H)$ je grupa.

Důkaz.

Ukážeme postupně že v $h(G)$ platí asoc. zákon, existuje neutrální prvek a každý prvek má inverzi.

- Každý prvek $h(G)$ lze napsat jako $h(x)$ pro nějaké vhodné x.
- Pro všechna $x, y, z \in M$ platí

$$(h(x) \circ_H h(y)) \circ_H h(z) = h(x \circ_G y) \circ_H h(z) = h((x \circ_G y) \circ_G z) = \\ = h(x \circ_G (y \circ_G z)) = h(x) \circ_H (h(y) \circ_H h(z))$$

- Označme e_G neutr. prvek v G, potom $h(e_G)$ je neutrální prvek v $h(G)$, neboť pro všechna x platí $h(e_G) \circ_H h(x) = h(e_G \circ_G x) = h(x)$.
- Podobně se ukáže, že inverzí k $h(x)$ je $h(x^{-1})$. □

Základní vlastnosti homomorfismu (2 ze 2)

Je-li H grupa, tak předchozí věta a její důkaz mají následující důsledky:

- Neutrální prvek jedné grupy se homomorfismem zobrazí vždy na neutrální prvek té druhé grupy.
- Také inverze se zachovávají v následujícím smyslu: $h(x^{-1}) = h(x)^{-1}$.
- Je-li h homomorfismus grupy G do H, pak $h(G)$ je podgrupa v H.
- Např. $h(n) = 2n$ je homomorfismus grupy $\mathbb{Z}_4^+$ do $\mathbb{Z}_8^+$ a $h(\mathbb{Z}_4^+)$ je podgrupa $\{0, 2, 4, 6\}$.

...až na izomorfismus (1 ze 4)

Izomorfní grupy jsou vlastně totožné, liší se pouze pojmenováním prvků, jak jsme viděli v případě grup $\mathbb{Z}_4^+$ a $\mathbb{Z}_5^\times$. Řekneme-li, že existuje pouze jedna grupa s jistou vlastností až na izomorfismus, znamená to, že všechny grupy s touto jistou vlastností jsou navzájem izomorfní. Ukážeme si tři známá tvrzení tohoto typu.

Věta 33.4

Libovolné dvě cyklické grupy mající stejný řád jsou izomorfní.

Důkaz: náznak – doladit za domácí úkol.

Buď $G = \langle a \rangle$ cyklická grupa s generátorem a. Ukážeme, že libovolná nekonečná cyklická grupa je izomorfní s grupou $(\mathbb{Z}, +)$ a že libovolná cyklická grupa řádu n je izomorfní s $\mathbb{Z}_n^+$. Zbytek už plyne z tranzitivity relace „být izomorfní“. Hledaný izomorfismus je bijekce (ze $\mathbb{Z}$ či $\mathbb{Z}_n^+$ na G) definovaná pro všechna k jako $h(k) = a^k$. □

$(\mathbb{Z}, +)$ a $\mathbb{Z}_n^+$ jsou tedy jedinými cyklickými grupami až na izomorfismus.

...až na izomorfismus (2 ze 4)

Příklad 33.5 (Kleinova grupa)

Kleinova grupa je grupa $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \circ)$, kde

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

a $\circ$ je sčítání modulo 2 po složkách: např. $(1,0) \circ (1,1) = (0,1)$.

Kleinova grupa není cyklická a tedy nemůže být izomorfní se $\mathbb{Z}_4^+$! Kleinova grupa je izomorfní $\mathbb{Z}_8^\times$. Lze dokonce ukázat toto (zkuste si to, je to jednoduché):

Věta 33.6

Existují pouze dvě neizomorfní grupy řádu 4.

$\mathbb{Z}_4^+$ a Kleinova grupa jsou tedy až na izomorfismus jediné grupy řádu 4.

...až na izomorfismus (3 ze 4)

Příklad 33.7 (Symetrická grupa)

Symetrickou grupou množiny $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ nazveme množinu všech permutací této množiny s operací skládání zobrazení a značíme ji S_n.

- Permutace je bijekce z množiny do stejné množiny, tedy v našem případě z $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ do $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.
- Každou permutaci $\pi \in S_n$ můžeme zadat výčtem hodnot:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix},$$

  první řádek navíc můžeme vynechat, takže např. $(1\ 2\ 4\ 3\ 5) \in S_5$ je permutace prohazující 3. a 4. prvek.
- Složením permutací $(1\ 2\ 4\ 3\ 5) \circ (2\ 1\ 3\ 5\ 4)$ je $(2\ 1\ 4\ 5\ 3)$.
- Skládání zobrazení je asociativní, permutace $(1\ 2\ 3\ \cdots n)$ je neutrální prvek a inverzním prvkem je inverzní zobrazení – jedná se tedy skutečně o grupu. Řád S_n je $n!$.

...až na izomorfismus (4 ze 4)

Podgrupy symetrické grupy S_n nazýváme grupami permutací.

- Například permutace $(1\ 2\ 4\ 3\ 5) \in S_5$ prohazující 3. a 4.prvek generuje podgrupu grupy S_5 obsahující dva prvky

$$(1\ 2\ 4\ 3\ 5) \quad \text{a} \quad (1\ 2\ 3\ 4\ 5)\,.$$

- Struktura podgrup S_n je velice (v jistém slova smyslu maximálně) bohatá, o čemž svědčí následující věta.

Věta 33.8 (Cayleyova)

Libovolná konečná grupa je izomorfní s nějakou grupou permutací.

Důkaz: náznak pro zájemce.

Buď a prvek grupy G řádu n s binární operací $\circ$. Definujeme $\pi_a(x) = a \circ x$. Jelikož lze v grupě jednoznačně dělit, je π_a bijekce a tedy permutace! Hledaný monomorfismus (tj. izomorfismus s podgrupou S_n) je zobrazení definované pro každý prvek a takto: $h(a) = \pi_a$ ... □

Řešené příklady

Základní cvičení 9.4

Pro prvočíslo p popište, jak byste našli izomorfismus grupy $\mathbb{Z}_p^\times$ s grupou $\mathbb{Z}_{p-1}^+$. Kolik různých izomorfismů existuje?

Diskrétní logaritmus obecně

Problém diskrétního logaritmu můžeme definovat v libovolné cyklické grupě:

Definice 34.1 (problém diskrétního logaritmu v grupě $G = (M, \cdot)$)

Buď $G = (M, \cdot)$ cyklická grupa řádu n, α nějaký její generátor a β její prvek. Řešit problém diskrétního logaritmu znamená najít celé číslo $1 \leq k \leq n$ takové, že

$$\alpha^k = \beta.$$

Použijeme-li aditivní značení:

Definice 34.2 (problém diskrétního logaritmu v grupě $G = (M, +)$)

Buď $G = (M, +)$ cyklická grupa řádu n, α nějaký její generátor a β její prvek. Řešit problém diskrétního logaritmu znamená najít celé číslo $1 \leq k \leq n$ takové, že

$$k \times \alpha = \beta.$$

Poznámka: Zahodíme-li požadavek na cykličnost grupy G, pak má úloha diskrétního logaritmu řešení

Ne ve všech grupách je to těžké

Uvažujme grupu $\mathbb{Z}_p^+$. To je cyklická grupa prvočíselného řádu p, a každé kladné $\alpha \leq p-1$ je její generátor. Problém diskrétního logaritmu v této grupě má formu rovnice

$$k\alpha \equiv \beta \pmod{p}.$$

Tu umíme snadno vyřešit. Najdeme inverzi α^{-1} k α v grupě $\mathbb{Z}_p^\times$ (pomocí polynomiálního `EEA` (v délce vstupu), viz další přednášky a dřívější studium) a řešením je

$$k = \beta\alpha^{-1} \bmod p.$$

Příklad 34.3
Uvažujme $p = 11, \alpha = 3, \beta = 5$. Hledáme k tak, aby

$$k \cdot 3 \equiv 5 \pmod{11}.$$

Snadno ověříme, že v $\mathbb{Z}_{11}^\times$ je $3^{-1} = 4$ a tedy $k = (5 \cdot 4) \bmod 11 = 9$.

Výpočet diskrétního logaritmu obecně?

Obecně není známý žádný rozumně rychlý algoritmus řešící problém diskrétního logaritmu.

V případě grupy $\mathbb{Z}_p^\times$ je počet kroků známých algoritmů úměrný $\sqrt{p}$, což pro p délky 1024 bitů dává cca 2^{512} operací. (Obecně se je počet kroků úměrný $\sqrt{n}$, kde n je řád základu logaritmu.)

Inverzní operaci k logaritmu, tedy mocnění, umíme v $\mathbb{Z}_p^\times$ rychle.

Získáváme tedy jednosměrnou (*one-way*) funkci, kterou lze použít pro **asymetrickou šifru**: najít $\beta \equiv \alpha^x \pmod p$ je lehké, známe-li x, α a p, najít x, známe-li β, α a p je **obecně** velmi obtížné

Poznámka: Pro konstrukci RSA byla použita jednosměrná funkce „násobení prvočísel“: násobit prvočísla je lehké a rychlé, hledat prvočíselný rozklad výsledku je **obecně** složité.

Diffie-Hellman Key Exchange

Inicializace: Alice si najde velké prvočíslo p a nějaký generátor α grupy $\mathbb{Z}_p^\times$. **Zveřejní p a α.** (najít velké prvočíslo a generátor nejsou lehké úkoly!)

Alice	**Bob**
zvolí soukromý klíč $a \in \{2, \ldots, p-2\}$	zvolí soukromý klíč $b \in \{2, \ldots, p-2\}$
spočte veřejný klíč $A \equiv \alpha^a \bmod p$	spočte veřejný klíč $B \equiv \alpha^b \bmod p$
	výměna veřejných klíčů A a B
spočítá $k_{AB} \equiv B^a \bmod p$	spočítá $k_{AB} \equiv A^b \bmod p$

Princip

Diffie-Hellman Key Exchange stojí na následujících faktech:

- Mocnění v $\mathbb{Z}_p^\times$ je komutativní a tedy vypočtené k_{AB} je pro Alici i Boba stejné:

$$\begin{aligned} k_{AB} &\equiv (\alpha^b)^a \equiv \alpha^{ab} \mod p \\ k_{AB} &\equiv (\alpha^a)^b \equiv \alpha^{ab} \mod p, \end{aligned}$$

- mocnění není výpočetně náročné (square & multiply),
- inverzní operace k mocnění, tedy diskrétní logaritmus, je výpočetně velmi náročná.

Kontrolní otázka 34.1

Víme, že grupy $\mathbb{Z}_p^\times$ a $\mathbb{Z}_{p-1}^+$ jsou izomorfní a tedy vlastně totožné. Není to problém pro Diffie-Hellmana, nedělá to z řešení diskrétního logaritmu v $\mathbb{Z}_p^\times$ lehký problém?