NI-MPI přednáška 14

Algebra III

Štěpán Starosta

25. 11. 2024

FIT ČVUT

33. Homomorfismy a izomorfismy

- Motivační příklad
- Definice a vlastnosti

34. Aplikace teorie grup v kryptografii

- Problém diskrétního logaritmu
- Diffie-Hellman Key Exchange

Různé grupy – stejná struktura (1 z 6)

$\mathbb{Z}_5^\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Různé grupy – stejná struktura (1 z 6)

$\mathbb{Z}_5^\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

řád: 4

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

řád: 4

Různé grupy – stejná struktura (1 z 6)

$\mathbb{Z}_5^\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

řád: 4

podgrupy: $\{1\}$, $\{1,4\}$, $\{1,2,3,4\}$

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

řád: 4

podgrupy: $\{0\}$, $\{0,2\}$, $\{0,1,2,3\}$

Různé grupy – stejná struktura (1 z 6)

$\mathbb{Z}_5^\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

řád: 4

podgrupy: $\{1\}$, $\{1,4\}$, $\{1,2,3,4\}$

neutrální prvek: 1

inverze: $1^{-1} = 1$, $2^{-1} = 3$, $3^{-1} = 2$, $4^{-1} = 4$

řád: 4

podgrupy: $\{0\}$, $\{0,2\}$, $\{0,1,2,3\}$

neutrální prvek: 0

inverze: $0^{-1} = 0$, $1^{-1} = 3$, $2^{-1} = 2$, $3^{-1} = 1$

Různé grupy – stejná struktura (1 z 6)

$\mathbb{Z}_5^\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

řád: 4

podgrupy: $\{1\}$, $\{1,4\}$, $\{1,2,3,4\}$

neutrální prvek: 1

inverze: $1^{-1}=1$, $2^{-1}=3$, $3^{-1}=2$, $4^{-1}=4$

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

řád: 4

podgrupy: $\{0\}$, $\{0,2\}$, $\{0,1,2,3\}$

neutrální prvek: 0

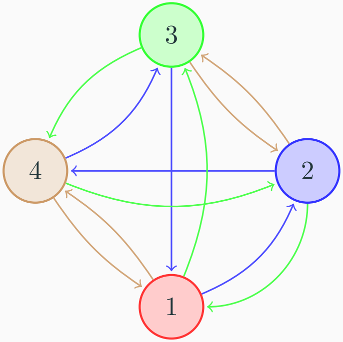
inverze: $0^{-1}=0$, $1^{-1}=3$, $2^{-1}=2$, $3^{-1}=1$

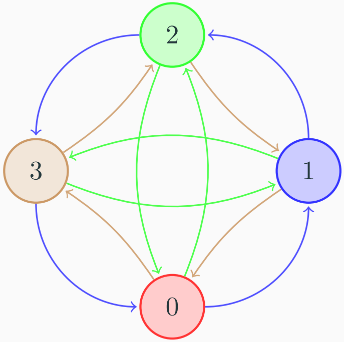
Nejsou $\mathbb{Z}_4^+$ a $\mathbb{Z}_5^\times$ vlastně stejné grupy lišící se pouze ve „jménech“ svých prvků a označení operace?

Různé grupy – stejná struktura (2 z 6)

$\mathbb{Z}_5^\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2





Různé grupy – stejná struktura (3 z 6)

$\mathbb{Z}_5^\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Zkusme přejmenovat prvky grupy $\mathbb{Z}_5^\times$ tak, abychom dostali $\mathbb{Z}_4^+$:

Různé grupy – stejná struktura (3 z 6)

$\mathbb{Z}_5^\times$	0	2	3	4
0	0	2	3	4
2	2	4	0	3
3	3	0	4	2
4	4	3	2	0

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Zkusme přejmenovat prvky grupy $\mathbb{Z}_5^\times$ tak, abychom dostali $\mathbb{Z}_4^+$:

- neutrální prvek má velmi speciální a jedinečné vlastnosti, proto přejmenujme 1 na 0,

Různé grupy – stejná struktura (3 z 6)

$\mathbb{Z}_5^\times$	0	2	3	2
0	0	2	3	2
2	2	2	0	3
3	3	0	2	2
2	2	3	2	0

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Zkusme přejmenovat prvky grupy $\mathbb{Z}_5^\times$ tak, abychom dostali $\mathbb{Z}_4^+$:

- neutrální prvek má velmi speciální a jedinečné vlastnosti, proto přejmenujme 1 na 0,
- pokud se má zachovat kompletně struktura, musí jediné dvouprvkové podgrupě $\{1,4\}$ (v $\mathbb{Z}_5^\times$) odpovídat podgrupa $\{0,2\}$ (v $\mathbb{Z}_4^+$), proto $4 \leftrightarrow 2$,

Různé grupy – stejná struktura (3 z 6)

$\mathbb{Z}_5^\times$	0	3	1	2
0	0	3	1	2
3	3	2	0	1
1	1	0	2	3
2	2	1	3	0

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Zkusme přejmenovat prvky grupy $\mathbb{Z}_5^\times$ tak, abychom dostali $\mathbb{Z}_4^+$:

- neutrální prvek má velmi speciální a jedinečné vlastnosti, proto přejmenujme 1 na 0,
- pokud se má zachovat kompletně struktura, musí jediné dvouprvkové podgrupě $\{1, 4\}$ (v $\mathbb{Z}_5^\times$) odpovídat podgrupa $\{0, 2\}$ (v $\mathbb{Z}_4^+$), proto $4 \leftrightarrow 2$,
- nyní už stačí přejmenovat 2 a 3: zjistíme, že obě zbývající možnosti fungují, zvolme tedy např. $3 \leftrightarrow 1$ a $2 \leftrightarrow 3$,

Různé grupy – stejná struktura (3 z 6)

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Zkusme přejmenovat prvky grupy $\mathbb{Z}_5^\times$ tak, abychom dostali $\mathbb{Z}_4^+$:

- neutrální prvek má velmi speciální a jedinečné vlastnosti, proto přejmenujme 1 na 0,
- pokud se má zachovat kompletně struktura, musí jediné dvouprvkové podgrupě $\{1, 4\}$ (v $\mathbb{Z}_5^\times$) odpovídat podgrupa $\{0, 2\}$ (v $\mathbb{Z}_4^+$), proto $4 \leftrightarrow 2$,
- nyní už stačí přejmenovat 2 a 3: zjistíme, že obě zbývající možnosti fungují, zvolme tedy např. $3 \leftrightarrow 1$ a $2 \leftrightarrow 3$,
- a nyní už stačí přeházet řádky …a máme Cayleyho tabulku $\mathbb{Z}_4^+$.

Různé grupy – stejná struktura (4 z 6)

- Našli jsme způsob, jak přeznačit prvky v jedné tabulce, abychom dostali přesně tabulku druhou (po přeházení řádků a sloupců).

Různé grupy – stejná struktura (4 z 6)

- Našli jsme způsob, jak přeznačit prvky v jedné tabulce, abychom dostali přesně tabulku druhou (po přeházení řádků a sloupců).

- Toto přejmenování je vlastně **prosté** zobrazení množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ **na** množinu $\{0, 1, 2, 3\}$, označme jej h_1:

$$h_1(1) = 0, \quad h_1(2) = 3, \quad h_1(3) = 1, \quad h_1(4) = 2\,.$$

Různé grupy – stejná struktura (4 z 6)

- Našli jsme způsob, jak přeznačit prvky v jedné tabulce, abychom dostali přesně tabulku druhou (po přeházení řádků a sloupců).
- Toto přejmenování je vlastně **prosté** zobrazení množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ **na** množinu $\{0, 1, 2, 3\}$, označme jej h_1:

$$h_1(1) = 0, \quad h_1(2) = 3, \quad h_1(3) = 1, \quad h_1(4) = 2\,.$$

- Jak jsme naznačili, fungovalo by i h_2 (jen bychom museli na závěr jinak zpřeházet řádky a sloupce):

$$h_2(1) = 0, \quad h_2(2) = 1, \quad h_2(3) = 3, \quad h_2(4) = 2\,.$$

Různé grupy – stejná struktura (4 z 6)

- Našli jsme způsob, jak přeznačit prvky v jedné tabulce, abychom dostali přesně tabulku druhou (po přeházení řádků a sloupců).

- Toto přejmenování je vlastně **prosté** zobrazení množiny $\{1, 2, 3, 4\}$ **na** množinu $\{0, 1, 2, 3\}$, označme jej h_1:
$$h_1(1) = 0, \quad h_1(2) = 3, \quad h_1(3) = 1, \quad h_1(4) = 2\,.$$

- Jak jsme naznačili, fungovalo by i h_2 (jen bychom museli na závěr jinak zpřeházet řádky a sloupce):
$$h_2(1) = 0, \quad h_2(2) = 1, \quad h_2(3) = 3, \quad h_2(4) = 2\,.$$

Nefungovaly by tedy všechny bijekce? A jestli ne, tak čím jsou tyto dvě výjimečné?

Různé grupy – stejná struktura (5 z 6)

Přejmenujme prvky grupy $\mathbb{Z}_5^\times$ podle bijekce h_3:

$$h_3(1) = 0, \quad h_3(2) = 3, \quad h_3(3) = 2, \quad h_3(4) = 1\,.$$

$\mathbb{Z}_5^\times$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Různé grupy – stejná struktura (5 z 6)

Přejmenujme prvky grupy $\mathbb{Z}_5^\times$ podle bijekce h_3:

$$h_3(1) = 0, \quad h_3(2) = 3, \quad h_3(3) = 2, \quad h_3(4) = 1\,.$$

$h_3(\mathbb{Z}_5^\times)$	0	3	2	1
0	0	3	2	1
3	3	1	0	2
2	2	0	1	3
1	1	2	3	0

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

- Výsledná tabulka ale neodpovídá grupě $\mathbb{Z}_4^+$ s operací sčítání modulo 4, neboť například $3 + 3 \pmod 4 \neq 1$.

Různé grupy – stejná struktura (5 z 6)

Přejmenujme prvky grupy $\mathbb{Z}_5^\times$ podle bijekce h_3:

$$h_3(1) = 0, \quad h_3(2) = 3, \quad h_3(3) = 2, \quad h_3(4) = 1\,.$$

$h_3(\mathbb{Z}_5^\times)$	0	3	2	1
0	0	3	2	1
3	3	1	0	2
2	2	0	1	3
1	1	2	3	0

$\mathbb{Z}_4^+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

- Výsledná tabulka ale neodpovídá grupě $\mathbb{Z}_4^+$ s operací sčítání modulo 4, neboť například $3 + 3 \pmod 4 \neq 1$.
- Bijekce h_3 tedy nevytvoří stejnou strukturu jakou má grupa $\mathbb{Z}_4^+$, takovou vlastnost mají pouze h_1 a h_2.

Různé grupy – stejná struktura (6 z 6)

Hledaná vlastnost bijekce h, kterou mají pouze bijekce h_1 a h_2, je tato:

$$\text{pro všechna } n, m \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ platí} \quad h(n \times_5 m) = h(n) +_4 h(m),$$

kde $\times_5$ značí operaci v grupě $\mathbb{Z}_5^\times$ a $+_4$ v grupě $\mathbb{Z}_4^+$.

Různé grupy – stejná struktura (6 z 6)

Hledaná vlastnost bijekce h, kterou mají pouze bijekce h_1 a h_2, je tato:

pro všechna $n, m \in \{1, 2, 3, 4\}$ platí $\quad h(n \times_5 m) = h(n) +_4 h(m)$,

kde $\times_5$ značí operaci v grupě $\mathbb{Z}_5^\times$ a $+_4$ v grupě $\mathbb{Z}_4^+$.

> *Slovy: Jestliže na libovolné prvky v grupě $\mathbb{Z}_5^\times$ aplikujeme operaci $\times_5$ a pak je zobrazíme do $\mathbb{Z}_4^+$ pomocí h, dostaneme vždy stejný výsledek, jako kdybychom je nejdříve pomocí h zobrazili do $\mathbb{Z}_4^+$ a **potom** aplikovali operaci $+_4$.*

$$\begin{tikzcd}
n, m \in \mathbb{Z}_5^\times \arrow[r, "\times_5"] \arrow[d, "h"'] & n \times_5 m \in \mathbb{Z}_5^\times \arrow[d, "h"] \\
h(n), h(m) \in \mathbb{Z}_4^+ \arrow[r, "+_4"] & h(n) +_4 h(m) = h(n \times_5 m)
\end{tikzcd}$$

Bijekce navíc musí tzv. zachovávat operaci. Vzpomeňte na lineární zobrazení...

Homomorfismus a izomorfismus

Definice 33.1

Buďte $G = (M, \circ_G)$ a $H = (N, \circ_H)$ dva grupoidy. Zobrazení $h : M \to N$ nazveme homomorfismem G do H jestliže

$$\text{pro všechna } x, y \in M \text{ platí} \quad h(x \circ_G y) = h(x) \circ_H h(y).$$

Je-li navíc h injektivní, resp. surjektivní, resp. bijektivní, říkáme že h je monomorfismus, resp. epimorfismus, resp. izomorfismus.

Homomorfismus a izomorfismus

Definice 33.1

Buďte $G = (M, \circ_G)$ a $H = (N, \circ_H)$ dva grupoidy. Zobrazení $h : M \to N$ nazveme homomorfismem G do H jestliže

$$\text{pro všechna } x, y \in M \text{ platí} \quad h(x \circ_G y) = h(x) \circ_H h(y).$$

Je-li navíc h injektivní, resp. surjektivní, resp. bijektivní, říkáme že h je monomorfismus, resp. epimorfismus, resp. izomorfismus.

- Homomorfismus tedy zachovává strukturu danou binární operací: je jedno jestli nejdříve aplikuji operaci a pak homomorfismus, nebo naopak.
- Jediné, co potřebujeme pro definování této vlastnosti, je uzavřenost množiny vůči binární operaci, proto jsme homomorfismus definovali pro nejobecnější grupoidy.
- Definice se přímo přenáší na grupy, a používá se termín (homo|mono|epi|izo)morfismus grup.

Řecké jazykové okénko

- morfismus: z řecké slova *morfé*, znamenajícího forma, tvar
- homo: *homós*, stejný,
- izo: *ísos*, sobě rovný,
- epi: *epí*, na,
- mono: *monós*, samotný, jediný.

Izomorfní grupy

Definice 33.2

Grupy G a H nazýváme izomorfní, právě když existuje izomorfismus $G \to H$. O grupě G také říkáme, že je izomorfní s grupou H.

- Vlastnost dvou grup „být izomorfní“ je relace ekvivalence na třídě všech grup.

Izomorfní grupy

Definice 33.2

Grupy G a H nazýváme izomorfní, právě když existuje izomorfismus $G \to H$. O grupě G také říkáme, že je izomorfní s grupou H.

- Vlastnost dvou grup „být izomorfní“ je relace ekvivalence na třídě všech grup.
- Příkladem izomorfních grup jsou $\mathbb{Z}_5^\times$ a $\mathbb{Z}_4^+$: našli jsme dokonce dva různé izomorfismy h_1 a h_2.

Izomorfní grupy

Definice 33.2

Grupy G a H nazýváme izomorfní, právě když existuje izomorfismus $G \to H$. O grupě G také říkáme, že je izomorfní s grupou H.

- Vlastnost dvou grup „být izomorfní“ je relace ekvivalence na třídě všech grup.
- Příkladem izomorfních grup jsou $\mathbb{Z}_5^\times$ a $\mathbb{Z}_4^+$: našli jsme dokonce dva různé izomorfismy h_1 a h_2.
- Je jasné, že izomorfní grupy musí mít stejný řád!

Základní vlastnosti homomorfismu (1 ze 2)

Věta 33.3

Buď h homomorfismus grupy $G = (M, \circ_G)$ do grupoidu $H = (N, \circ_H)$. Potom $h(G) := (h(M), \circ_H)$ je grupa.

Důkaz.

Ukážeme postupně že v $h(G)$ platí asoc. zákon, existuje neutrální prvek a každý prvek má inverzi.

- Každý prvek $h(G)$ lze napsat jako $h(x)$ pro nějaké vhodné x.

Základní vlastnosti homomorfismu (1 ze 2)

Věta 33.3

Buď h homomorfismus grupy $G = (M, \circ_G)$ do grupoidu $H = (N, \circ_H)$. Potom $h(G) := (h(M), \circ_H)$ je grupa.

Důkaz.

Ukážeme postupně že v $h(G)$ platí asoc. zákon, existuje neutrální prvek a každý prvek má inverzi.

- Každý prvek $h(G)$ lze napsat jako $h(x)$ pro nějaké vhodné x.
- Pro všechna $x, y, z \in M$ platí

$$(h(x) \circ_H h(y)) \circ_H h(z) = h(x \circ_G y) \circ_H h(z) = h((x \circ_G y) \circ_G z) =$$
$$= h(x \circ_G (y \circ_G z)) = h(x) \circ_H (h(y) \circ_H h(z))$$

Základní vlastnosti homomorfismu (1 ze 2)

Věta 33.3

Buď h homomorfismus grupy $G = (M, \circ_G)$ do grupoidu $H = (N, \circ_H)$. Potom $h(G) := (h(M), \circ_H)$ je grupa.

Důkaz.

Ukážeme postupně že v $h(G)$ platí asoc. zákon, existuje neutrální prvek a každý prvek má inverzi.

- Každý prvek $h(G)$ lze napsat jako $h(x)$ pro nějaké vhodné x.
- Pro všechna $x, y, z \in M$ platí

$$\begin{aligned}(h(x) \circ_H h(y)) \circ_H h(z) = h(x \circ_G y) \circ_H h(z) = h((x \circ_G y) \circ_G z) = \\ = h(x \circ_G (y \circ_G z)) = h(x) \circ_H (h(y) \circ_H h(z))\end{aligned}$$

- Označme e_G neutr. prvek v G, potom $h(e_G)$ je neutrální prvek v $h(G)$, neboť pro všechna x platí $h(e_G) \circ_H h(x) = h(e_G \circ_G x) = h(x)$.

Základní vlastnosti homomorfismu (1 ze 2)

Věta 33.3

Buď h homomorfismus grupy $G = (M, \circ_G)$ do grupoidu $H = (N, \circ_H)$. Potom $h(G) := (h(M), \circ_H)$ je grupa.

Důkaz.

Ukážeme postupně že v $h(G)$ platí asoc. zákon, existuje neutrální prvek a každý prvek má inverzi.

- Každý prvek $h(G)$ lze napsat jako $h(x)$ pro nějaké vhodné x.
- Pro všechna $x, y, z \in M$ platí

$$(h(x) \circ_H h(y)) \circ_H h(z) = h(x \circ_G y) \circ_H h(z) = h((x \circ_G y) \circ_G z) = \\ = h(x \circ_G (y \circ_G z)) = h(x) \circ_H (h(y) \circ_H h(z))$$

- Označme e_G neutr. prvek v G, potom $h(e_G)$ je neutrální prvek v $h(G)$, neboť pro všechna x platí $h(e_G) \circ_H h(x) = h(e_G \circ_G x) = h(x)$.
- Podobně se ukáže, že inverzí k $h(x)$ je $h(x^{-1})$. $\square$

Základní vlastnosti homomorfismu (2 ze 2)

Je-li H grupa, tak předchozí věta a její důkaz mají následující důsledky:

- Neutrální prvek jedné grupy se homomorfismem zobrazí vždy na neutrální prvek té druhé grupy.

Základní vlastnosti homomorfismu (2 ze 2)

Je-li H grupa, tak předchozí věta a její důkaz mají následující důsledky:

- Neutrální prvek jedné grupy se homomorfismem zobrazí vždy na neutrální prvek té druhé grupy.
- Také inverze se zachovávají v následujícím smyslu: $h(x^{-1}) = h(x)^{-1}$.

Základní vlastnosti homomorfismu (2 ze 2)

Je-li H grupa, tak předchozí věta a její důkaz mají následující důsledky:

- Neutrální prvek jedné grupy se homomorfismem zobrazí vždy na neutrální prvek té druhé grupy.
- Také inverze se zachovávají v následujícím smyslu: $h(x^{-1}) = h(x)^{-1}$.
- Je-li h homomorfismus grupy G do H, pak $h(G)$ je podgrupa v H.

Základní vlastnosti homomorfismu (2 ze 2)

Je-li H grupa, tak předchozí věta a její důkaz mají následující důsledky:

- Neutrální prvek jedné grupy se homomorfismem zobrazí vždy na neutrální prvek té druhé grupy.
- Také inverze se zachovávají v následujícím smyslu: $h(x^{-1}) = h(x)^{-1}$.
- Je-li h homomorfismus grupy G do H, pak $h(G)$ je podgrupa v H.
- Např. $h(n) = 2n$ je homomorfismus grupy $\mathbb{Z}_4^+$ do $\mathbb{Z}_8^+$ a $h(\mathbb{Z}_4^+)$ je podgrupa $\{0, 2, 4, 6\}$.

...až na izomorfismus (1 ze 4)

Izomorfní grupy jsou vlastně totožné, liší se pouze pojmenováním prvků, jak jsme viděli v případě grup $\mathbb{Z}_4^+$ a $\mathbb{Z}_5^\times$. Řekneme-li, že existuje pouze jedna grupa s jistou vlastností až na izomorfismus, znamená to, že všechny grupy s touto jistou vlastností jsou navzájem izomorfní. Ukážeme si tři známá tvrzení tohoto typu.

Věta 33.4

Libovolné dvě cyklické grupy mající stejný řád jsou izomorfní.

...až na izomorfismus (1 ze 4)

Izomorfní grupy jsou vlastně totožné, liší se pouze pojmenováním prvků, jak jsme viděli v případě grup $\mathbb{Z}_4^+$ a $\mathbb{Z}_5^\times$. Řekneme-li, že existuje pouze jedna grupa s jistou vlastností až na izomorfismus, znamená to, že všechny grupy s touto jistou vlastností jsou navzájem izomorfní. Ukážeme si tři známá tvrzení tohoto typu.

Věta 33.4

Libovolné dvě cyklické grupy mající stejný řád jsou izomorfní.

Důkaz: náznak – doladit za domácí úkol.

Buď $G = \langle a \rangle$ cyklická grupa s generátorem a. Ukážeme, že libovolná nekonečná cyklická grupa je izomorfní s grupou $(\mathbb{Z}, +)$ a že libovolná cyklická grupa řádu n je izomorfní s $\mathbb{Z}_n^+$. Zbytek už plyne z tranzitivity relace „být izomorfní“. Hledaný izomorfismus je bijekce (ze $\mathbb{Z}$ či $\mathbb{Z}_n^+$ na G) definovaná pro všechna k jako $h(k) = a^k$. $\square$

...až na izomorfismus (1 ze 4)

Izomorfní grupy jsou vlastně totožné, liší se pouze pojmenováním prvků, jak jsme viděli v případě grup $\mathbb{Z}_4^+$ a $\mathbb{Z}_5^\times$. Řekneme-li, že existuje pouze jedna grupa s jistou vlastností až na izomorfismus, znamená to, že všechny grupy s touto jistou vlastností jsou navzájem izomorfní. Ukážeme si tři známá tvrzení tohoto typu.

Věta 33.4

Libovolné dvě cyklické grupy mající stejný řád jsou izomorfní.

Důkaz: náznak – doladit za domácí úkol.

Buď $G = \langle a \rangle$ cyklická grupa s generátorem a. Ukážeme, že libovolná nekonečná cyklická grupa je izomorfní s grupou $(\mathbb{Z}, +)$ a že libovolná cyklická grupa řádu n je izomorfní s $\mathbb{Z}_n^+$. Zbytek už plyne z tranzitivity relace „být izomorfní“. Hledaný izomorfismus je bijekce (ze $\mathbb{Z}$ či $\mathbb{Z}_n^+$ na G) definovaná pro všechna k jako $h(k) = a^k$. $\square$

$(\mathbb{Z}, +)$ a $\mathbb{Z}_n^+$ jsou tedy jedinými cyklickými grupami až na izomorfismus.

Příklad 33.5 (Kleinova grupa)

Kleinova grupa je grupa $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \circ)$, kde

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$

a $\circ$ je sčítání modulo 2 po složkách: např. $(1,0) \circ (1,1) = (0,1)$.

Příklad 33.5 (Kleinova grupa)

Kleinova grupa je grupa $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \circ)$, kde

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$

a $\circ$ je sčítání modulo 2 po složkách: např. $(1,0) \circ (1,1) = (0,1)$.

Kleinova grupa není cyklická a tedy nemůže být izomorfní se $\mathbb{Z}_4^+$! Kleinova grupa je izomorfní $\mathbb{Z}_8^\times$. Lze dokonce ukázat toto (zkuste si to, je to jednoduché):

Věta 33.6

Existují pouze dvě neizomorfní grupy řádu 4.

...až na izomorfismus (2 ze 4)

Příklad 33.5 (Kleinova grupa)

Kleinova grupa je grupa $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \circ)$, kde

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

a $\circ$ je sčítání modulo 2 po složkách: např. $(1,0) \circ (1,1) = (0,1)$.

Kleinova grupa není cyklická a tedy nemůže být izomorfní se $\mathbb{Z}_4^+$! Kleinova grupa je izomorfní $\mathbb{Z}_8^\times$. Lze dokonce ukázat toto (zkuste si to, je to jednoduché):

Věta 33.6

Existují pouze dvě neizomorfní grupy řádu 4.

$\mathbb{Z}_4^+$ a Kleinova grupa jsou tedy až na izomorfismus jediné grupy řádu 4.

...až na izomorfismus (3 ze 4)

Příklad 33.7 (Symetrická grupa)

Symetrickou grupou množiny $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ nazveme množinu všech permutací této množiny s operací skládání zobrazení a značíme ji S_n.

Příklad 33.7 (Symetrická grupa)

Symetrickou grupou množiny $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ nazveme množinu všech permutací této množiny s operací skládání zobrazení a značíme ji S_n.

- Permutace je bijekce z množiny do stejné množiny, tedy v našem případě z $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ do $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Příklad 33.7 (Symetrická grupa)

Symetrickou grupou množiny $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ nazveme množinu všech permutací této množiny s operací skládání zobrazení a značíme ji S_n.

- Permutace je bijekce z množiny do stejné množiny, tedy v našem případě z $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ do $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.
- Každou permutaci $\pi \in S_n$ můžeme zadat výčtem hodnot:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix},$$

  první řádek navíc můžeme vynechat, takže např. $(1\ 2\ 4\ 3\ 5) \in S_5$ je permutace prohazující $3.$ a $4.$ prvek.

Příklad 33.7 (Symetrická grupa)

Symetrickou grupou množiny $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ nazveme množinu všech permutací této množiny s operací skládání zobrazení a značíme ji S_n.

- Permutace je bijekce z množiny do stejné množiny, tedy v našem případě z $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ do $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.
- Každou permutaci $\pi \in S_n$ můžeme zadat výčtem hodnot:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix},$$

  první řádek navíc můžeme vynechat, takže např. $(1\ 2\ 4\ 3\ 5) \in S_5$ je permutace prohazující $3.$ a $4.$ prvek.
- Složením permutací $(1\ 2\ 4\ 3\ 5) \circ (2\ 1\ 3\ 5\ 4)$ je $(2\ 1\ 4\ 5\ 3)$.

Příklad 33.7 (Symetrická grupa)

Symetrickou grupou množiny $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ nazveme množinu všech permutací této množiny s operací skládání zobrazení a značíme ji S_n.

- Permutace je bijekce z množiny do stejné množiny, tedy v našem případě z $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ do $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.
- Každou permutaci $\pi \in S_n$ můžeme zadat výčtem hodnot:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix},$$

  první řádek navíc můžeme vynechat, takže např. $(1\ 2\ 4\ 3\ 5) \in S_5$ je permutace prohazující 3. a 4. prvek.
- Složením permutací $(1\ 2\ 4\ 3\ 5) \circ (2\ 1\ 3\ 5\ 4)$ je $(2\ 1\ 4\ 5\ 3)$.
- Skládání zobrazení je asociativní, permutace $(1\ 2\ 3\ \cdots n)$ je neutrální prvek a inverzním prvkem je inverzní zobrazení – jedná se tedy skutečně o grupu. Řád S_n je $n!$.

...až na izomorfismus (4 ze 4)

Podgrupy symetrické grupy S_n nazýváme grupami permutací.

- Například permutace $(1\ 2\ 4\ 3\ 5) \in S_5$ prohazující $3.$ a $4.$prvek generuje podgrupu grupy S_5 obsahující dva prvky
$$(1\ 2\ 4\ 3\ 5) \quad \text{a} \quad (1\ 2\ 3\ 4\ 5)\,.$$

...až na izomorfismus (4 ze 4)

Podgrupy symetrické grupy S_n nazýváme grupami permutací.

- Například permutace $(1\ 2\ 4\ 3\ 5) \in S_5$ prohazující 3. a 4.prvek generuje podgrupu grupy S_5 obsahující dva prvky

$$(1\ 2\ 4\ 3\ 5) \quad \text{a} \quad (1\ 2\ 3\ 4\ 5)\,.$$

- Struktura podgrup S_n je velice (v jistém slova smyslu maximálně) bohatá, o čemž svědčí následující věta.

Věta 33.8 (Cayleyova)

Libovolná konečná grupa je izomorfní s nějakou grupou permutací.

Důkaz: náznak pro zájemce.

Buď a prvek grupy G řádu n s binární operací $\circ$. Definujeme $\pi_a(x) = a \circ x$. Jelikož lze v grupě jednoznačně dělit, je π_a bijekce a tedy permutace! Hledaný monomorfismus (tj. izomorfismus s podgrupou S_n) je zobrazení definované pro každý prvek a takto: $h(a) = \pi_a$ ... $\square$

Řešené příklady

Základní cvičení 9.4

Pro prvočíslo p popište, jak byste našli izomorfismus grupy $\mathbb{Z}_p^\times$ s grupou $\mathbb{Z}_{p-1}^+$. Kolik různých izomorfismů existuje?

33. Homomorfismy a izomorfismy

- Motivační příklad
- Definice a vlastnosti

34. Aplikace teorie grup v kryptografii

- Problém diskrétního logaritmu
- Diffie-Hellman Key Exchange

Diskrétní logaritmus obecně

Problém diskrétního logaritmu můžeme definovat v libovolné cyklické grupě:

Definice 34.1 (problém diskrétního logaritmu v grupě $G = (M, \cdot)$)

Buď $G = (M, \cdot)$ cyklická grupa řádu n, α nějaký její generátor a β její prvek. Řešit problém diskrétního logaritmu znamená najít celé číslo $1 \leq k \leq n$ takové, že

$$\alpha^k = \beta.$$

Diskrétní logaritmus obecně

Problém diskrétního logaritmu můžeme definovat v libovolné cyklické grupě:

Definice 34.1 (problém diskrétního logaritmu v grupě $G = (M, \cdot)$)

Buď $G = (M, \cdot)$ cyklická grupa řádu n, α nějaký její generátor a β její prvek. Řešit problém diskrétního logaritmu znamená najít celé číslo $1 \leq k \leq n$ takové, že

$$\alpha^k = \beta.$$

Použijeme-li aditivní značení:

Definice 34.2 (problém diskrétního logaritmu v grupě $G = (M, +)$)

Buď $G = (M, +)$ cyklická grupa řádu n, α nějaký její generátor a β její prvek. Řešit problém diskrétního logaritmu znamená najít celé číslo $1 \leq k \leq n$ takové, že

$$k \times \alpha = \beta.$$

Diskrétní logaritmus obecně

Problém diskrétního logaritmu můžeme definovat v libovolné cyklické grupě:

Definice 34.1 (problém diskrétního logaritmu v grupě $G = (M, \cdot)$)

Buď $G = (M, \cdot)$ cyklická grupa řádu n, α nějaký její generátor a β její prvek. Řešit problém diskrétního logaritmu znamená najít celé číslo $1 \leq k \leq n$ takové, že

$$\alpha^k = \beta.$$

Použijeme-li aditivní značení:

Definice 34.2 (problém diskrétního logaritmu v grupě $G = (M, +)$)

Buď $G = (M, +)$ cyklická grupa řádu n, α nějaký její generátor a β její prvek. Řešit problém diskrétního logaritmu znamená najít celé číslo $1 \leq k \leq n$ takové, že

$$k \times \alpha = \beta.$$

Poznámka: Zahodíme-li požadavek na cykličnost grupy G, pak má úloha diskrétního logaritmu řešení

Ne ve všech grupách je to těžké

Uvažujme grupu $\mathbb{Z}_p^+$. To je cyklická grupa prvočíselného řádu p, a každé kladné $\alpha \leq p-1$ je její generátor. Problém diskrétního logaritmu v této grupě má formu rovnice

$$k\alpha \equiv \beta \pmod{p}.$$

Ne ve všech grupách je to těžké

Uvažujme grupu $\mathbb{Z}_p^+$. To je cyklická grupa prvočíselného řádu p, a každé kladné $\alpha \leq p-1$ je její generátor. Problém diskrétního logaritmu v této grupě má formu rovnice

$$k\alpha \equiv \beta \pmod{p}.$$

Tu umíme snadno vyřešit. Najdeme inverzi α^{-1} k α v grupě $\mathbb{Z}_p^\times$ (pomocí polynomiálního `EEA` (v délce vstupu), viz další přednášky a dřívější studium) a řešením je

$$k = \beta\alpha^{-1} \bmod p.$$

Ne ve všech grupách je to těžké

Uvažujme grupu $\mathbb{Z}_p^+$. To je cyklická grupa prvočíselného řádu p, a každé kladné $\alpha \leq p-1$ je její generátor. Problém diskrétního logaritmu v této grupě má formu rovnice

$$k\alpha \equiv \beta \pmod{p}.$$

Tu umíme snadno vyřešit. Najdeme inverzi α^{-1} k α v grupě $\mathbb{Z}_p^\times$ (pomocí polynomiálního `EEA` (v délce vstupu), viz další přednášky a dřívější studium) a řešením je

$$k = \beta\alpha^{-1} \bmod p.$$

Příklad 34.3

Uvažujme $p = 11, \alpha = 3, \beta = 5$. Hledáme k tak, aby

$$k \cdot 3 \equiv 5 \pmod{11}.$$

Ne ve všech grupách je to těžké

Uvažujme grupu $\mathbb{Z}_p^+$. To je cyklická grupa prvočíselného řádu p, a každé kladné $\alpha \leq p-1$ je její generátor. Problém diskrétního logaritmu v této grupě má formu rovnice

$$k\alpha \equiv \beta \pmod{p}.$$

Tu umíme snadno vyřešit. Najdeme inverzi α^{-1} k α v grupě $\mathbb{Z}_p^\times$ (pomocí polynomiálního `EEA` (v délce vstupu), viz další přednášky a dřívější studium) a řešením je

$$k = \beta\alpha^{-1} \bmod p.$$

Příklad 34.3

Uvažujme $p = 11, \alpha = 3, \beta = 5$. Hledáme k tak, aby

$$k \cdot 3 \equiv 5 \pmod{11}.$$

Snadno ověříme, že v $\mathbb{Z}_{11}^\times$ je $3^{-1} = 4$ a tedy $k = (5 \cdot 4) \bmod 11 = 9$.

Výpočet diskrétního logaritmu obecně?

Obecně není známý žádný rozumně rychlý algoritmus řešící problém diskrétního logaritmu.

V případě grupy $\mathbb{Z}_p^\times$ je počet kroků známých algoritmů úměrný $\sqrt{p}$, což pro p délky 1024 bitů dává cca 2^{512} operací. (Obecně se je počet kroků úměrný $\sqrt{n}$, kde n je řád základu logaritmu.)

Inverzní operaci k logaritmu, tedy mocnění, umíme v $\mathbb{Z}_p^\times$ rychle.

Získáváme tedy jednosměrnou (*one-way*) funkci, kterou lze použít pro **asymetrickou šifru**: najít $\beta \equiv \alpha^x \pmod{p}$ je lehké, známe-li x, α a p, najít x, známe-li β, α a p je **obecně** velmi obtížné

Poznámka: Pro konstrukci RSA byla použita jednosměrná funkce „násobení prvočísel“: násobit prvočísla je lehké a rychlé, hledat prvočíselný rozklad výsledku je **obecně** složité.

Diffie-Hellman Key Exchange

Inicializace: Alice si najde velké prvočíslo p a nějaký generátor α grupy $\mathbb{Z}_p^\times$. **Zveřejní p a α.** (najít velké prvočíslo a generátor nejsou lehké úkoly!)

Alice	**Bob**
zvolí soukromý klíč $a \in \{2, \ldots, p-2\}$	zvolí soukromý klíč $b \in \{2, \ldots, p-2\}$
spočte veřejný klíč $A \equiv \alpha^a \bmod p$	spočte veřejný klíč $B \equiv \alpha^b \bmod p$

$$\xleftrightarrow{\text{výměna veřejných klíču } A \text{ a } B}$$

spočítá $k_{AB} \equiv B^a \bmod p$	spočítá $k_{AB} \equiv A^b \bmod p$

Princip

Diffie-Hellman Key Exchange stojí na následujících faktech:

- Mocnění v $\mathbb{Z}_p^\times$ je komutativní a tedy vypočtené k_{AB} je pro Alici i Boba stejné:

$$\begin{aligned} k_{AB} &\equiv (\alpha^b)^a \equiv \alpha^{ab} \mod p \\ k_{AB} &\equiv (\alpha^a)^b \equiv \alpha^{ab} \mod p, \end{aligned}$$

- mocnění není výpočetně náročné (square & multiply),
- inverzní operace k mocnění, tedy diskrétní logaritmus, je výpočetně velmi náročná.

Kontrolní otázka 34.1

Víme, že grupy $\mathbb{Z}_p^\times$ *a* $\mathbb{Z}_{p-1}^+$ *jsou izomorfní a tedy vlastně totožné. Není to problém pro Diffie-Hellmana, nedělá to z řešení diskrétního logaritmu v* $\mathbb{Z}_p^\times$ *lehký problém?*