

# NI-MPI přednáška 2

Analýza II: funkce více proměnných

---

30. 9. 2022

FIT ČVUT

## Parciální derivace druhého řádu

První parciální derivace (nějaké funkce  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^n$ ) je zobrazením z množiny všech bodů, kde parciální derivace existuje.

Pro jednoduchost předpokládejme, že tomu tak je pro všechny body z  $D_f$  (obecně je to pro nějakou podmnožinu  $D_f$ ) a všechny proměnné  $x_i$ .

Taková zobrazení budou opět zobrazení typu  $D_f \rightarrow \mathbb{R}$ , tedy  $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D_f \rightarrow \mathbb{R}$

Můžeme je tedy opět zkusit (parciální derivace nemusí existovat) parciálně derivovat. Dostaneme parciální derivaci druhého řádu (parciálně derivujeme podle  $x_j$  parciální derivaci podle  $x_i$ ) v bodě  $\mathbf{b}$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{b}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (\mathbf{b}).$$

- Pokud  $i \neq j$ , hovoříme také o **smíšené** (druhé) parciální derivaci.
- Pokud  $i = j$ , zapisuje se též zkráceně:  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{b})$ .
- Opět lze chápat jako zobrazení z nějaké podmnožiny  $D_f$ .

jiná značení (jako zobrazení):  $\partial_{xy} f, f_{xy}$ .

## Definice 4.1

Mějme funkci  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subset \mathbb{R}^n$ .

Existují-li všechny druhé parciální derivace funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{b}$ , pak se zaznamenávají do matice takto:

$$\nabla^2 f(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{b}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{b}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{b}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{b}) \end{pmatrix}.$$

Matici  $\nabla^2 f(\mathbf{b})$  nazýváme **Hessovou maticí funkce  $f$  v bodě  $\mathbf{b}$**  (též Hessián).

Lze chápat jako zobrazení z podmnožiny  $D_f$  do  $\mathbb{R}^{n,n}$ .

# Zaměnitelnost druhých parciálních derivací

## Věta 4.2

Nechť  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subset \mathbb{R}^2$  a  $\mathbf{b} \in D_f$ .

Pokud existuje  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{b})$  a funkce  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  je v  $\mathbf{b}$  spojitá, potom  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{b})$  existuje a platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{b}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{b}).$$

Tedy pokud nějaká smíšená druhé parciální derivace existuje a je spojitá, pak nezávisí na pořadí parciálního derivování (vše v bodě  $\mathbf{b}$ ).

### Důsledky:

- Hessova matice je „často“ symetrická.
- Je-li nějaká  $n$ -tá parciální derivace dané funkce v daném bodě spojitá, pak záleží pouze na tom, kolikrát podle které proměnné derivujeme, nikoli na pořadí derivování.

### Definice 4.3

Nechť  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n,1} = \mathbb{R}^n$ ,  $\|\mathbf{v}\| = 1$ . **Druhá parciální derivace funkce  $f$  ve směru  $\mathbf{v}$  v bodě  $\mathbf{b} \in D_f$**  takovém, že  $\exists H(\mathbf{b}) \subset D_f$ , je

$$\nabla_{\mathbf{v}}(\nabla_{\mathbf{v}}f)(\mathbf{b}).$$

### Věta 4.4

*Nechť  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n,1}$ ,  $\|\mathbf{v}\| = 1$ . Mějme funkci  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subset \mathbb{R}^n$  a bod  $\mathbf{b} \in D_f$ . Nechť existuje okolí  $H(\mathbf{b}) \subset D_f$  takové, že  $f$  má na  $H(\mathbf{b})$  spojitě všechny druhé parciální derivace, potom*

$$\nabla_{\mathbf{v}}(\nabla_{\mathbf{v}}f)(\mathbf{b}) = \mathbf{v}^T \cdot \nabla^2 f(\mathbf{b}) \cdot \mathbf{v}.$$

## Definice 4.5 (Definitnost matic)

Mějme  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ . Řekneme, že matice  $\mathbf{A}$  je

1. **pozitivně semidefinitní**, pokud  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$  pro  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$ ;
2. **pozitivně definitní**, pokud  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$  pro  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}, \mathbf{x} \neq 0$ ;
3. **negativně semidefinitní**, pokud  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 0$  pro  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$ ;
4. **negativně definitní**, pokud  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} < 0$  pro  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}, \mathbf{x} \neq 0$ ;
5. **indefinitní**, pokud není pozitivně ani negativně semidefinitní.

Matice  $\mathbf{A}$  je indefinitní právě tehdy, když  $\exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$  a  $\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} < 0$ .

## Věta 4.6

Bud'  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$  **symetrická** matice. Potom platí následující:

- Matice  $\mathbf{A}$  je **pozitivně semidefinitní** právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou **nezáporná**.
- Matice  $\mathbf{A}$  je **pozitivně definitní** právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou **kladná**.
- Matice  $\mathbf{A}$  je **negativně semidefinitní** právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou **nekladná**.
- Matice  $\mathbf{A}$  je **negativně definitní** právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou **záporná**.
- Matice  $\mathbf{A}$  je **indefinitní** právě tehdy, když má alespoň jedno **kladné** a alespoň jedno **záporné** vlastní číslo.

Náznak důkazu: Jelikož je matice  $\mathbf{A}$  symetrická, platí  $\mathbf{A} = P^{-1}DP$ , kde  $D$  je reálná diagonální a sloupce reálné regulární matice  $P$  sestávají z jednotkových vlastních vektorů. Jelikož platí  $P^{-1} = P^T$ , tak zbytek plyne přímo z definice (semi)definitnosti a indefinitnosti.

## Věta 4.7 (Sylvestrové kritérium)

Bud'  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$  **symetrická** matice. Pro matici  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$  definujeme matice  $A_1, A_2, \dots, A_n$  takto:  $A_k \in \mathbb{R}^{k,k}$  je čtvercová matice v levém horním rohu matice  $\mathbf{A}$ . Platí:

- Matice  $\mathbf{A}$  je pozitivně definitní právě tehdy, když je determinant všech matic  $A_1, A_2, \dots, A_n$  kladný.
- Matice  $\mathbf{A}$  je negativně definitní právě tehdy, když je determinant matic  $A_k$  záporný pro  $k$  liché a kladný pro  $k$  sudé.



## Věta 4.8

*Pokud má matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$  na diagonále dva prvky s různým znaménkem (jeden kladný a druhý záporný), pak je indefinitní.*

## Důkaz.

Mějme  $(\mathbf{A})_{i,i} > 0$  a  $(\mathbf{A})_{j,j} < 0$ . Pak jistě platí

$$\mathbf{e}_i^T \mathbf{A} \mathbf{e}_i > 0 \quad \text{a} \quad \mathbf{e}_j^T \mathbf{A} \mathbf{e}_j < 0$$

( $\mathbf{e}_i$  je  $i$ -tý vektor standardní báze  $\mathbb{R}^n$ ) a tedy matice  $\mathbf{A}$  je indefinitní (přímo z definice). □

# Postačující podmínka existence extrému a sedlového bodu

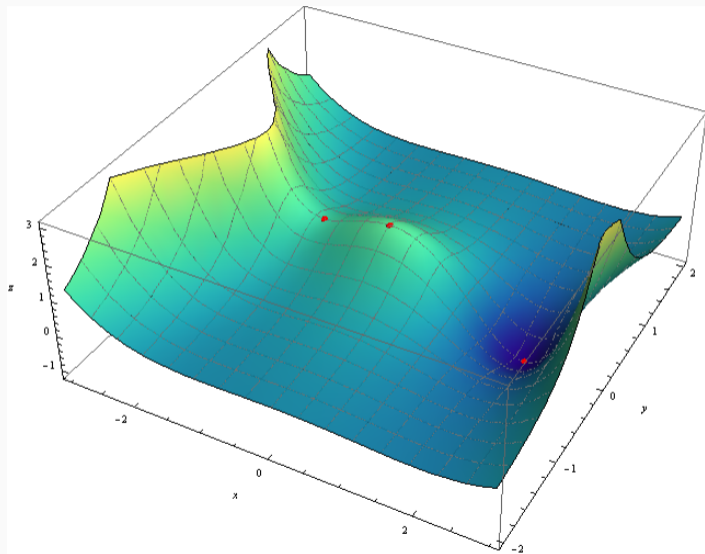
Stacionární bod, který není minimem ani maximem a na jehož nějakém okolí má funkce  $f$  spojitě všechny parciální derivace, se nazývá **sedlovým** bodem.

## Věta 4.9 (Postačující podmínka existence extrému a sedlového bodu)

*Nechť  $\mathbf{b} \in D_f$  je stacionární bod funkce  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subset \mathbb{R}^n$ . Nechť existuje okolí  $H(\mathbf{b}) \subset D_f$  takové, že  $f$  má na  $H(\mathbf{b})$  spojitě všechny druhé parciální derivace, potom*

- *je-li  $\nabla^2 f(\mathbf{b})$  pozitivně definitní, pak  $\mathbf{b}$  je ostré lokální minimum;*
- *je-li  $\nabla^2 f(\mathbf{b})$  negativně definitní, pak  $\mathbf{b}$  je ostré lokální maximum;*
- *je-li  $\nabla^2 f(\mathbf{b})$  indefinitní, pak  $\mathbf{b}$  je sedlový bod.*

# Minimum, maximum, sedlový bod



## Věta 4.10 (Nutná podmínka existence lokálního extrému)

*Nechť  $\mathbf{b} \in D_f$  je stacionární bod funkce  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subset \mathbb{R}^n$ . Nechť existuje okolí  $H(\mathbf{b}) \subset D_f$  takové, že  $f$  má na  $H(\mathbf{b})$  spojité všechny druhé parciální derivace, potom*

- *je-li  $\mathbf{b}$  lokální minimum, pak  $\nabla^2 f(\mathbf{b})$  je pozitivně semidefinitní;*
- *je-li  $\mathbf{b}$  lokální maximum, pak  $\nabla^2 f(\mathbf{b})$  je negativně semidefinitní.*

## Důležitá poznámka

Toto tvrzení **nelze** obrátit.

# Postup analytického hledání extrémů

- 1 Najít kritické body, tj. stacionární body a body, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje.
- 2 Pokud jsou všechny 2. parciální derivace v okolí stacionárního bodu  $\mathbf{b}$  spojité, nalézt Hessovu matici. Pokud je tato matice
  - a) pozitivně definitní, pak je bod  $\mathbf{b}$  bodem ostrého lokálního minima;
  - b) negativně definitní, pak je bod  $\mathbf{b}$  bodem ostrého lokálního maxima;
  - c) indefinitní, pak je bod  $\mathbf{b}$  sedlovým bodem (tj. není extrémem).

V ostatních případech je třeba rozhodnout jiným způsobem (nelze pomocí Hessovy matice rozhodnout, např. protože neexistuje nebo je semidefinitní).

## Definice 6.1

Funkce  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subset \mathbb{R}^n$  je **konvexní** pokud je  $D_f$  konvexní množina a

$$\forall \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in D_f \quad \forall t \in [0, 1] : f(t\mathbf{b}_1 + (1-t)\mathbf{b}_2) \leq tf(\mathbf{b}_1) + (1-t)f(\mathbf{b}_2).$$

Funkce  $f$  je **konkávní**, pokud  $-f$  je konvexní.

# Extrémy konvexní funkce

Funkce  $f$ , která má spojitě všechny druhé parciální derivace, je konvexní právě tehdy, když je její Hessova matice pozitivně semidefinitní ve všech bodech vnitřku  $D_f$  (vnitřek množiny jsou všechny její body, které v ní leží s nějakým okolím, jinak řečeno je to množina bez své hranice).

Lokální minimum konvexní funkce je globálním minimem.