NI-MPI přednáška 2

Analýza II: funkce více proměnných

30. 9. 2022

FIT ČVUT

4. Lokální extrémy a postačující podmínka existence
   - Parciální derivace druhého řádu
   - Definitnost matic
   - Postačující podmínka existence lokálního extrému

5. Shrnutí: postup analytického hledání extrémů

6. Konvexní funkce

Parciální derivace druhého řádu

První parciální derivace (nějaké funkce $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^n$) je zobrazením z množiny všech bodů, kde parciální derivace existuje.

Pro jednoduchost předpokládejme, že tomu tak je pro všechny body z D_f (obecně je to pro nějakou podmnožinu D_f) a všechny proměnné x_i.

Parciální derivace druhého řádu

První parciální derivace (nějaké funkce $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^n$) je zobrazením z množiny všech bodů, kde parciální derivace existuje.

Pro jednoduchost předpokládejme, že tomu tak je pro všechny body z D_f (obecně je to pro nějakou podmnožinu D_f) a všechny proměnné x_i.

Taková zobrazení budou opět zobrazení typu $D_f \to \mathbb{R}$, tedy $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D_f \to \mathbb{R}$

Můžeme je tedy opět zkusit (parciální derivace nemusí existovat) parciálně derivovat. Dostaneme parciální derivaci druhého řádu (parciálně derivujeme podle x_j parciální derivaci podle x_i) v bodě $\mathbf{b}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{b}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\mathbf{b}).$$

Parciální derivace druhého řádu

První parciální derivace (nějaké funkce $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^n$) je zobrazením z množiny všech bodů, kde parciální derivace existuje.

Pro jednoduchost předpokládejme, že tomu tak je pro všechny body z D_f (obecně je to pro nějakou podmnožinu D_f) a všechny proměnné x_i.

Taková zobrazení budou opět zobrazení typu $D_f \to \mathbb{R}$, tedy $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D_f \to \mathbb{R}$

Můžeme je tedy opět zkusit (parciální derivace nemusí existovat) parciálně derivovat. Dostaneme parciální derivaci druhého řádu (parciálně derivujeme podle x_j parciální derivaci podle x_i) v bodě $\mathbf{b}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{b}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\mathbf{b}).$$

- Pokud $i \neq j$, hovoříme také o **smíšené** (druhé) parciální derivaci.
- Pokud $i = j$, zapisuje se též zkráceně: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{b})$.
- Opět lze chápat jako zobrazení z nějaké podmnožiny D_f.

Parciální derivace druhého řádu

První parciální derivace (nějaké funkce $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^n$) je zobrazením z množiny všech bodů, kde parciální derivace existuje.

Pro jednoduchost předpokládejme, že tomu tak je pro všechny body z D_f (obecně je to pro nějakou podmnožinu D_f) a všechny proměnné x_i.

Taková zobrazení budou opět zobrazení typu $D_f \to \mathbb{R}$, tedy $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D_f \to \mathbb{R}$

Můžeme je tedy opět zkusit (parciální derivace nemusí existovat) parciálně derivovat. Dostaneme parciální derivaci druhého řádu (parciálně derivujeme podle x_j parciální derivaci podle x_i) v bodě $\mathbf{b}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{b}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\mathbf{b}).$$

- Pokud $i \neq j$, hovoříme také o **smíšené** (druhé) parciální derivaci.
- Pokud $i = j$, zapisuje se též zkráceně: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{b})$.
- Opět lze chápat jako zobrazení z nějaké podmnožiny D_f.

Jiná značení (jako zobrazení): $\partial_{xy} f$, f_{xy}.

Hessova matice

Definice 4.1

Mějme funkci $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^n$.

Existují-li všechny druhé parciální derivace funkce f v bodě $\mathbf{b}$, pak se zaznamenávají do matice takto:

$$\nabla^2 f(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{b}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{b}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{b}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{b}) \end{pmatrix}.$$

Matici $\nabla^2 f(\mathbf{b})$ nazýváme **Hessovou maticí funkce f v bodě $\mathbf{b}$** (též Hessián).

Hessova matice

Definice 4.1

Mějme funkci $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^n$.

Existují-li všechny druhé parciální derivace funkce f v bodě $\mathbf{b}$, pak se zaznamenávají do matice takto:

$$\nabla^2 f(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{b}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{b}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{b}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{b}) \end{pmatrix}.$$

Matici $\nabla^2 f(\mathbf{b})$ nazýváme **Hessovou maticí funkce f v bodě $\mathbf{b}$** (též Hessián).

Lze chápat jako zobrazení z podmnožiny D_f do $\mathbb{R}^{n,n}$.

Zaměnitelnost druhých parciálních derivací

Věta 4.2

Nechť $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^2$ *a* $\mathbf{b} \in D_f$.

Pokud existuje $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{b})$ *a funkce* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *je v* $\mathbf{b}$ *spojitá, potom* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{b})$ *existuje a platí*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{b}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{b}).$$

Zaměnitelnost druhých parciálních derivací

Věta 4.2

Nechť $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^2$ *a* $\mathbf{b} \in D_f$.

Pokud existuje $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{b})$ *a funkce* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *je v* $\mathbf{b}$ *spojitá, potom* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{b})$ *existuje a platí*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{b}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{b}) .$$

Tedy pokud nějaká smíšená druhé parciální derivace existuje a je spojitá, pak nezávisí na pořadí parciálního derivování (vše v bodě $\mathbf{b}$).

Důsledky:

Zaměnitelnost druhých parciálních derivací

Věta 4.2

Nechť $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^2$ *a* $\mathbf{b} \in D_f$.

Pokud existuje $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{b})$ *a funkce* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *je v* $\mathbf{b}$ *spojitá, potom* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{b})$ *existuje a platí*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{b}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{b}) \,.$$

Tedy pokud nějaká smíšená druhé parciální derivace existuje a je spojitá, pak nezávisí na pořadí parciálního derivování (vše v bodě $\mathbf{b}$).

Důsledky:

- Hessova matice je „často“ symetrická.

Zaměnitelnost druhých parciálních derivací

Věta 4.2

Nechť $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^2$ *a* $\mathbf{b} \in D_f$.

Pokud existuje $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{b})$ *a funkce* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *je v* $\mathbf{b}$ *spojitá, potom* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{b})$ *existuje a platí*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{b}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{b}).$$

Tedy pokud nějaká smíšená druhé parciální derivace existuje a je spojitá, pak nezávisí na pořadí parciálního derivování (vše v bodě $\mathbf{b}$).

Důsledky:

- Hessova matice je „často“ symetrická.
- Je-li nějaká n-tá parciální derivace dané funkce v daném bodě spojitá, pak záleží pouze na tom, kolikrát podle které proměnné derivujeme, nikoli na pořadí derivování.

Druhá derivace ve směru

Definice 4.3

Nechť $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n,1} = \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{v}\| = 1$. **Druhá parciální derivace funkce f ve směru $\mathbf{v}$ v bodě** $\mathrm{b} \in D_f$ takovém, že $\exists H(\mathbf{b}) \subset D_f$, je

$$\nabla_{\mathbf{v}} \left(\nabla_{\mathbf{v}} f\right)(\mathbf{b}).$$

Druhá derivace ve směru

Definice 4.3

Nechť $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n,1} = \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{v}\| = 1$. **Druhá parciální derivace funkce** f **ve směru** $\mathbf{v}$ **v bodě** $\mathrm{b} \in D_f$ takovém, že $\exists H(\mathbf{b}) \subset D_f$, je

$$\nabla_{\mathbf{v}} \left(\nabla_{\mathbf{v}} f\right) (\mathbf{b}).$$

Věta 4.4

Nechť $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n,1}$, $\|\mathbf{v}\| = 1$. *Mějme funkci* $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^n$ *a bod* $\mathbf{b} \in D_f$. *Nechť existuje okolí* $H(\mathbf{b}) \subset D_f$ *takové, že* f *má na* $H(\mathbf{b})$ *spojité všechny druhé parciální derivace, potom*

$$\nabla_{\mathbf{v}} \left(\nabla_{\mathbf{v}} f\right) (\mathbf{b}) = \mathbf{v}^T \cdot \nabla^2 f(\mathbf{b}) \cdot \mathbf{v}.$$

Definitnost matic

Definice 4.5 (Definitnost matic)

Mějme $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$. Řekneme, že matice $\mathbf{A}$ je

1. **pozitivně semidefinitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$;
2. **pozitivně definitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}, \mathbf{x} \neq 0$;

Definitnost matic

Definice 4.5 (Definitnost matic)

Mějme $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$. Řekneme, že matice $\mathbf{A}$ je

1. **pozitivně semidefinitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$;
2. **pozitivně definitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}, \mathbf{x} \neq 0$;
3. **negativně semidefinitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \leq 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$;
4. **negativně definitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} < 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}, \mathbf{x} \neq 0$;

Definitnost matic

Definice 4.5 (Definitnost matic)

Mějme $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$. Řekneme, že matice $\mathbf{A}$ je

1. **pozitivně semidefinitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$;
2. **pozitivně definitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}, \mathbf{x} \neq 0$;
3. **negativně semidefinitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \leq 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$;
4. **negativně definitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} < 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}, \mathbf{x} \neq 0$;
5. **indefinitní**, pokud není pozitivně ani negativně semidefinitní.

Definitnost matic

Definice 4.5 (Definitnost matic)

Mějme $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$. Řekneme, že matice $\mathbf{A}$ je

1. **pozitivně semidefinitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$;
2. **pozitivně definitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}, \mathbf{x} \neq 0$;
3. **negativně semidefinitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \leq 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$;
4. **negativně definitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} < 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}, \mathbf{x} \neq 0$;
5. **indefinitní**, pokud není pozitivně ani negativně semidefinitní.

Matice $\mathbf{A}$ je indefinitní právě tehdy, když $\exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ a $\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{y} < 0$.

Charakterizace (semi)definitnosti

Věta 4.6

Buď $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ***symetrická*** *matice. Potom platí následující:*

- *Matice* $\mathbf{A}$ *je pozitivně semidefinitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou nezáporná.*

Charakterizace (semi)definitnosti

Věta 4.6

Buď $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ***symetrická*** *matice. Potom platí následující:*

- *Matice* $\mathbf{A}$ *je pozitivně semidefinitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou nezáporná.*
- *Matice* $\mathbf{A}$ *je pozitivně definitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou kladná.*

Charakterizace (semi)definitnosti

Věta 4.6

Buď $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ***symetrická*** *matice. Potom platí následující:*

- *Matice* $\mathbf{A}$ *je pozitivně semidefinitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou nezáporná.*
- *Matice* $\mathbf{A}$ *je pozitivně definitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou kladná.*
- *Matice* $\mathbf{A}$ *je negativně semidefinitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou nekladná.*

Charakterizace (semi)definitnosti

Věta 4.6

Buď $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ***symetrická*** *matice. Potom platí následující:*

- *Matice* $\mathbf{A}$ *je pozitivně semidefinitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou nezáporná.*
- *Matice* $\mathbf{A}$ *je pozitivně definitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou kladná.*
- *Matice* $\mathbf{A}$ *je negativně semidefinitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou nekladná.*
- *Matice* $\mathbf{A}$ *je negativně definitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou záporná.*

Charakterizace (semi)definitnosti

Věta 4.6

Buď $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ***symetrická*** *matice. Potom platí následující:*

- *Matice $\mathbf{A}$ je pozitivně semidefinitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou nezáporná.*
- *Matice $\mathbf{A}$ je pozitivně definitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou kladná.*
- *Matice $\mathbf{A}$ je negativně semidefinitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou nekladná.*
- *Matice $\mathbf{A}$ je negativně definitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou záporná.*
- *Matice $\mathbf{A}$ je indefinitní právě tehdy, když má alespoň jedno kladné a alespoň jedno záporné vlastní číslo.*

Charakterizace (semi)definitnosti

Věta 4.6

Buď $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ***symetrická*** *matice. Potom platí následující:*

- *Matice* $\mathbf{A}$ *je pozitivně semidefinitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou nezáporná.*
- *Matice* $\mathbf{A}$ *je pozitivně definitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou kladná.*
- *Matice* $\mathbf{A}$ *je negativně semidefinitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou nekladná.*
- *Matice* $\mathbf{A}$ *je negativně definitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou záporná.*
- *Matice* $\mathbf{A}$ *je indefinitní právě tehdy, když má alespoň jedno kladné a alespoň jedno záporné vlastní číslo.*

Náznak důkazu: Jelikož je matice $\mathbf{A}$ symetrická, platí $\mathbf{A} = P^{-1}DP$, kde D je reálná diagonální a sloupce reálné regulární matice P sestávají z jednotkových vlastních vektorů. Jelikož platí $P^{-1} = P^T$, tak zbytek plyne přímo z definice (semi)definitnosti a indefinitnosti.

Sylvestrovo kritérium

Věta 4.7 (Sylvestrovo kritérium)

Buď $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ***symetrická*** *matice. Pro matici* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *definujeme matice* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *takto:* $A_k \in \mathbb{R}^{k,k}$ *je čtvercová matice v levém horním rohu matice* $\mathbf{A}$*. Platí:*

- *Matice* $\mathbf{A}$ *je pozitivně definitní právě tehdy, když je determinant všech matic* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *kladný.*
- *Matice* $\mathbf{A}$ *je negativně definitní právě tehdy, když je determinant matic* A_k *záporný pro* k *liché a kladný pro* k *sudé.*

Jak poznat indefinitnost

Věta 4.8

Pokud má matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ na diagonále dva prvky s různým znaménkem (jeden kladný a druhý záporný), pak je indefinitní.

Jak poznat indefinitnost

Věta 4.8

Pokud má matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ na diagonále dva prvky s různým znaménkem (jeden kladný a druhý záporný), pak je indefinitní.

Důkaz.

Mějme $(\mathbf{A})_{i,i} > 0$ a $(\mathbf{A})_{j,j} < 0$. Pak jistě platí

$$\mathbf{e}_i^T \mathbf{A} \mathbf{e}_i > 0 \quad \text{a} \quad \mathbf{e}_j^T \mathbf{A} \mathbf{e}_j < 0$$

($\mathbf{e}_i$ je i-tý vektor standardní báze $\mathbb{R}^n$) a tedy matice $\mathbf{A}$ je indefinitní (přímo z definice). $\square$

Postačující podmínka existence extrému a sedlového bodu

Stacionární bod, který není minimem ani maximem a na jehož nějakém okolí má funkce f spojité všechny parciální derivace, se nazývá **sedlovým** bodem.

Postačující podmínka existence extrému a sedlového bodu

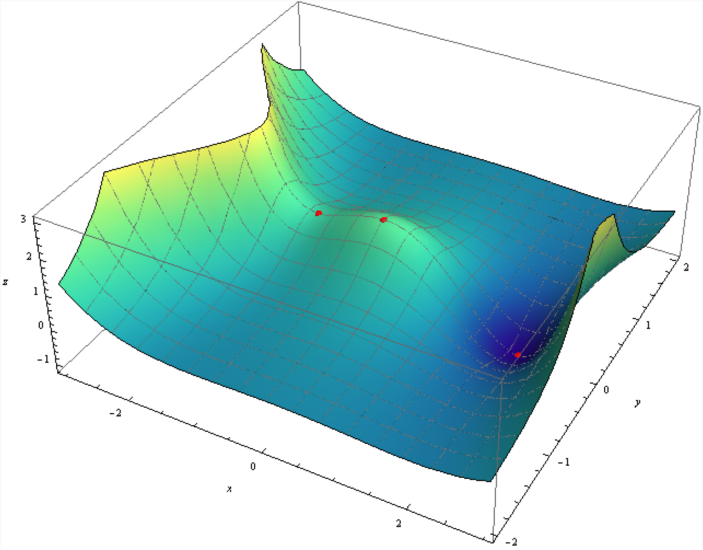
Stacionární bod, který není minimem ani maximem a na jehož nějakém okolí má funkce f spojité všechny parciální derivace, se nazývá **sedlovým** bodem.

Věta 4.9 (Postačující podmínka existence extrému a sedlového bodu)

Nechť $\mathbf{b} \in D_f$ je stacionární bod funkce $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^n$. Nechť existuje okolí $H(\mathbf{b}) \subset D_f$ takové, že f má na $H(\mathbf{b})$ spojité všechny druhé parciální derivace, potom

- *je-li $\nabla^2 f(\mathbf{b})$ pozitivně definitní, pak $\mathbf{b}$ je ostré lokální minimum;*
- *je-li $\nabla^2 f(\mathbf{b})$ negativně definitní, pak $\mathbf{b}$ je ostré lokální maximum;*
- *je-li $\nabla^2 f(\mathbf{b})$ indefinitní, pak $\mathbf{b}$ je sedlový bod.*

Minimum, maximum, sedlový bod



Co semidefinitnost?

Věta 4.10 (Nutná podmínka existence lokálního extrému)

Nechť $\mathbf{b} \in D_f$ *je stacionární bod funkce* $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^n$*. Nechť existuje okolí* $H(\mathbf{b}) \subset D_f$ *takové, že* f *má na* $H(\mathbf{b})$ *spojité všechny druhé parciální derivace, potom*

- *je-li* $\mathbf{b}$ *lokální minimum, pak* $\nabla^2 f(\mathbf{b})$ *je pozitivně semidefinitní;*
- *je-li* $\mathbf{b}$ *lokální maximum, pak* $\nabla^2 f(\mathbf{b})$ *je negativně semidefinitní.*

Co semidefinitnost?

Věta 4.10 (Nutná podmínka existence lokálního extrému)

Nechť $\mathbf{b} \in D_f$ *je stacionární bod funkce* $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^n$. *Nechť existuje okolí* $H(\mathbf{b}) \subset D_f$ *takové, že* f *má na* $H(\mathbf{b})$ *spojité všechny druhé parciální derivace, potom*

- *je-li* $\mathbf{b}$ *lokální minimum, pak* $\nabla^2 f(\mathbf{b})$ *je pozitivně semidefinitní;*
- *je-li* $\mathbf{b}$ *lokální maximum, pak* $\nabla^2 f(\mathbf{b})$ *je negativně semidefinitní.*

Důležitá poznámka

Toto tvrzení **nelze** obrátit.

Postup analytického hledání extrémů

1. Najít kritické body, tj. stacionární body a body, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje.

Postup analytického hledání extrémů

1. Najít kritické body, tj. stacionární body a body, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje.

Postup analytického hledání extrémů

1. Najít kritické body, tj. stacionární body a body, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje.
2. Pokud jsou všechny 2. parciální derivace v okolí stacionárního bodu $\mathbf{b}$ spojité, nalézt Hessovu matici. Pokud je tato matice

Postup analytického hledání extrémů

1. Najít kritické body, tj. stacionární body a body, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje.
2. Pokud jsou všechny 2. parciální derivace v okolí stacionárního bodu $\mathbf{b}$ spojité, nalézt Hessovu matici. Pokud je tato matice
   a) pozitivně definitní, pak je bod $\mathbf{b}$ bodem ostrého lokálního minima;

Postup analytického hledání extrémů

1. Najít kritické body, tj. stacionární body a body, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje.
2. Pokud jsou všechny 2. parciální derivace v okolí stacionárního bodu $\mathbf{b}$ spojité, nalézt Hessovu matici. Pokud je tato matice
   a) pozitivně definitní, pak je bod $\mathbf{b}$ bodem ostrého lokálního minima;
   b) negativně definitní, pak je bod $\mathbf{b}$ bodem ostrého lokálního maxima;

Postup analytického hledání extrémů

1. Najít kritické body, tj. stacionární body a body, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje.
2. Pokud jsou všechny 2. parciální derivace v okolí stacionárního bodu $\mathbf{b}$ spojité, nalézt Hessovu matici. Pokud je tato matice
   a) pozitivně definitní, pak je bod $\mathbf{b}$ bodem ostrého lokálního minima;
   b) negativně definitní, pak je bod $\mathbf{b}$ bodem ostrého lokálního maxima;
   c) indefinitní, pak je bod $\mathbf{b}$ sedlovým bodem (tj. není extrémem).

Postup analytického hledání extrémů

1. Najít kritické body, tj. stacionární body a body, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje.
2. Pokud jsou všechny 2. parciální derivace v okolí stacionárního bodu $\mathbf{b}$ spojité, nalézt Hessovu matici. Pokud je tato matice
   a) pozitivně definitní, pak je bod $\mathbf{b}$ bodem ostrého lokálního minima;
   b) negativně definitní, pak je bod $\mathbf{b}$ bodem ostrého lokálního maxima;
   c) indefinitní, pak je bod $\mathbf{b}$ sedlovým bodem (tj. není extrémem).

Postup analytického hledání extrémů

1. Najít kritické body, tj. stacionární body a body, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje.
2. Pokud jsou všechny 2. parciální derivace v okolí stacionárního bodu $\mathbf{b}$ spojité, nalézt Hessovu matici. Pokud je tato matice
   a) pozitivně definitní, pak je bod $\mathbf{b}$ bodem ostrého lokálního minima;
   b) negativně definitní, pak je bod $\mathbf{b}$ bodem ostrého lokálního maxima;
   c) indefinitní, pak je bod $\mathbf{b}$ sedlovým bodem (tj. není extrémem).

V ostatních případech je třeba rozhodnout jiným způsobem (nelze pomocí Hessovy matice rozhodnout, např. protože neexistuje nebo je semidefinitní).

Definice konvexní funkce

Definice 6.1

Funkce $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^n$ je **konvexní** pokud je D_f konvexní množina a

$$\forall \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in D_f \ \forall t \in [0,1] : \ f(t\mathbf{b}_1 + (1-t)\mathbf{b}_2) \leq tf(\mathbf{b}_1) + (1-t)f(\mathbf{b}_2).$$

Funkce f je **konkávní**, pokud $-f$ je konvexní.

Extrémy konvexní funkce

Funkce f, která má spojité všechny druhé parciální derivace, je konvexní právě tehdy, když je její Hessova matice pozitivně semidefinitní ve všech bodech vnitřku D_f (vnitřek množiny jsou všechny její body, které v ní leží s nějakým okolím, jinak řečeno je to množina bez své hranice).

Extrémy konvexní funkce

Funkce f, která má spojité všechny druhé parciální derivace, je konvexní právě tehdy, když je její Hessova matice pozitivně semidefinitní ve všech bodech vnitřku D_f (vnitřek množiny jsou všechny její body, které v ní leží s nějakým okolím, jinak řečeno je to množina bez své hranice).

Lokální minimum konvexní funkce je globálním minimem.