# NI-MPI přednáška 2

## Analýza II: funkce více proměnných

30. 9. 2022

FIT ČVUT

4. Lokální extrémy a postačující podmínka existence
   - Parciální derivace druhého řádu
   - Definitnost matic
   - Postačující podmínka existence lokálního extrému

5. Shrnutí: postup analytického hledání extrémů

6. Konvexní funkce

# Parciální derivace druhého řádu

První parciální derivace (nějaké funkce $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^n$) je zobrazením z množiny všech bodů, kde parciální derivace existuje.

Pro jednoduchost předpokládejme, že tomu tak je pro všechny body z $D_f$ (obecně je to pro nějakou podmnožinu $D_f$) a všechny proměnné $x_i$.

# Parciální derivace druhého řádu

První parciální derivace (nějaké funkce $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^n$) je zobrazením z množiny všech bodů, kde parciální derivace existuje.

Pro jednoduchost předpokládejme, že tomu tak je pro všechny body z $D_f$ (obecně je to pro nějakou podmnožinu $D_f$) a všechny proměnné $x_i$.

Taková zobrazení budou opět zobrazení typu $D_f \to \mathbb{R}$, tedy $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D_f \to \mathbb{R}$

Můžeme je tedy opět zkusit (parciální derivace nemusí existovat) parciálně derivovat. Dostaneme parciální derivaci druhého řádu (parciálně derivujeme podle $x_j$ parciální derivaci podle $x_i$) v bodě $\mathbf{b}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{b}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\mathbf{b}).$$

# Parciální derivace druhého řádu

První parciální derivace (nějaké funkce $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^n$) je zobrazením z množiny všech bodů, kde parciální derivace existuje.

Pro jednoduchost předpokládejme, že tomu tak je pro všechny body z $D_f$ (obecně je to pro nějakou podmnožinu $D_f$) a všechny proměnné $x_i$.

Taková zobrazení budou opět zobrazení typu $D_f \to \mathbb{R}$, tedy $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D_f \to \mathbb{R}$

Můžeme je tedy opět zkusit (parciální derivace nemusí existovat) parciálně derivovat. Dostaneme parciální derivaci druhého řádu (parciálně derivujeme podle $x_j$ parciální derivaci podle $x_i$) v bodě $\mathbf{b}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{b}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\mathbf{b}).$$

- Pokud $i \neq j$, hovoříme také o **smíšené** (druhé) parciální derivaci.
- Pokud $i = j$, zapisuje se též zkráceně: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{b})$.
- Opět lze chápat jako zobrazení z nějaké podmnožiny $D_f$.

# Parciální derivace druhého řádu

První parciální derivace (nějaké funkce $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^n$) je zobrazením z množiny všech bodů, kde parciální derivace existuje.

Pro jednoduchost předpokládejme, že tomu tak je pro všechny body z $D_f$ (obecně je to pro nějakou podmnožinu $D_f$) a všechny proměnné $x_i$.

Taková zobrazení budou opět zobrazení typu $D_f \to \mathbb{R}$, tedy $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D_f \to \mathbb{R}$

Můžeme je tedy opět zkusit (parciální derivace nemusí existovat) parciálně derivovat. Dostaneme parciální derivaci druhého řádu (parciálně derivujeme podle $x_j$ parciální derivaci podle $x_i$) v bodě $\mathbf{b}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{b}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\mathbf{b}).$$

- Pokud $i \neq j$, hovoříme také o **smíšené** (druhé) parciální derivaci.
- Pokud $i = j$, zapisuje se též zkráceně: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\mathbf{b})$.
- Opět lze chápat jako zobrazení z nějaké podmnožiny $D_f$.

Jiná značení (jako zobrazení): $\partial_{xy} f$, $f_{xy}$.

# Hessova matice

## Definice 4.1

Mějme funkci $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^n$.

Existují-li všechny druhé parciální derivace funkce $f$ v bodě $\mathbf{b}$, pak se zaznamenávají do matice takto:

$$\nabla^2 f(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{b}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{b}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{b}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{b}) \end{pmatrix}.$$

Matici $\nabla^2 f(\mathbf{b})$ nazýváme **Hessovou maticí funkce $f$ v bodě $\mathbf{b}$** (též Hessián).

# Hessova matice

**Definice 4.1**

Mějme funkci $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^n$.

Existují-li všechny druhé parciální derivace funkce $f$ v bodě $\mathbf{b}$, pak se zaznamenávají do matice takto:

$$\nabla^2 f(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{b}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{b}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{b}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{b}) \end{pmatrix}.$$

Matici $\nabla^2 f(\mathbf{b})$ nazýváme **Hessovou maticí funkce $f$ v bodě $\mathbf{b}$** (též Hessián).

Lze chápat jako zobrazení z podmnožiny $D_f$ do $\mathbb{R}^{n,n}$.

# Zaměnitelnost druhých parciálních derivací

**Věta 4.2**

*Nechť* $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^2$ *a* $\mathbf{b} \in D_f$.

*Pokud existuje* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{b})$ *a funkce* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *je v* $\mathbf{b}$ *spojitá, potom* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{b})$ *existuje a platí*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{b}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{b}) .$$

# Zaměnitelnost druhých parciálních derivací

**Věta 4.2**

*Nechť* $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^2$ *a* $\mathbf{b} \in D_f$.

*Pokud existuje* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{b})$ *a funkce* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *je v* $\mathbf{b}$ *spojitá, potom* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{b})$ *existuje a platí*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{b}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{b}).$$

Tedy pokud nějaká smíšená druhé parciální derivace existuje a je spojitá, pak nezávisí na pořadí parciálního derivování (vše v bodě $\mathbf{b}$).

**Důsledky:**

# Zaměnitelnost druhých parciálních derivací

**Věta 4.2**

*Nechť* $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^2$ *a* $\mathbf{b} \in D_f$.

*Pokud existuje* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{b})$ *a funkce* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *je v* $\mathbf{b}$ *spojitá, potom* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{b})$ *existuje a platí*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{b}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{b}) .$$

Tedy pokud nějaká smíšená druhé parciální derivace existuje a je spojitá, pak nezávisí na pořadí parciálního derivování (vše v bodě $\mathbf{b}$).

**Důsledky:**

- Hessova matice je „často“ symetrická.

# Zaměnitelnost druhých parciálních derivací

**Věta 4.2**

*Nechť* $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^2$ *a* $\mathbf{b} \in D_f$.

*Pokud existuje* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{b})$ *a funkce* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *je v* $\mathbf{b}$ *spojitá, potom* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{b})$ *existuje a platí*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{b}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{b}).$$

Tedy pokud nějaká smíšená druhé parciální derivace existuje a je spojitá, pak nezávisí na pořadí parciálního derivování (vše v bodě $\mathbf{b}$).

**Důsledky:**

- Hessova matice je „často“ symetrická.
- Je-li nějaká $n$-tá parciální derivace dané funkce v daném bodě spojitá, pak záleží pouze na tom, kolikrát podle které proměnné derivujeme, nikoli na pořadí derivování.

# Druhá derivace ve směru

**Definice 4.3**

Nechť $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n,1} = \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{v}\| = 1$. **Druhá parciální derivace funkce $f$ ve směru $\mathbf{v}$ v bodě** $\mathrm{b} \in D_f$ takovém, že $\exists H(\mathbf{b}) \subset D_f$, je

$$\nabla_{\mathbf{v}} \left( \nabla_{\mathbf{v}} f \right) (\mathbf{b}).$$

# Druhá derivace ve směru

**Definice 4.3**

Nechť $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n,1} = \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{v}\| = 1$. **Druhá parciální derivace funkce $f$ ve směru $\mathbf{v}$ v bodě** $\mathrm{b} \in D_f$ takovém, že $\exists H(\mathbf{b}) \subset D_f$, je

$$\nabla_{\mathbf{v}} \left(\nabla_{\mathbf{v}} f\right)(\mathbf{b}).$$

**Věta 4.4**

*Nechť $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n,1}$, $\|\mathbf{v}\| = 1$. Mějme funkci $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^n$ a bod $\mathbf{b} \in D_f$. Nechť existuje okolí $H(\mathbf{b}) \subset D_f$ takové, že $f$ má na $H(\mathbf{b})$ spojité všechny druhé parciální derivace, potom*

$$\nabla_{\mathbf{v}} \left(\nabla_{\mathbf{v}} f\right)(\mathbf{b}) = \mathbf{v}^T \cdot \nabla^2 f(\mathbf{b}) \cdot \mathbf{v}.$$

# Definitnost matic

**Definice 4.5 (Definitnost matic)**

Mějme $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$. Řekneme, že matice $\mathbf{A}$ je

1. **pozitivně semidefinitní**, pokud $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$;
2. **pozitivně definitní**, pokud $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}, \mathbf{x} \neq 0$;

# Definitnost matic

**Definice 4.5 (Definitnost matic)**

Mějme $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$. Řekneme, že matice $\mathbf{A}$ je

1. **pozitivně semidefinitní**, pokud $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$;
2. **pozitivně definitní**, pokud $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}, \mathbf{x} \neq 0$;
3. **negativně semidefinitní**, pokud $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$;
4. **negativně definitní**, pokud $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} < 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}, \mathbf{x} \neq 0$;

# Definitnost matic

**Definice 4.5 (Definitnost matic)**

Mějme $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$. Řekneme, že matice $\mathbf{A}$ je

1. **pozitivně semidefinitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$;
2. **pozitivně definitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}, \mathbf{x} \neq 0$;
3. **negativně semidefinitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \leq 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$;
4. **negativně definitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} < 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}, \mathbf{x} \neq 0$;
5. **indefinitní**, pokud není pozitivně ani negativně semidefinitní.

# Definitnost matic

**Definice 4.5 (Definitnost matic)**

Mějme $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$. Řekneme, že matice $\mathbf{A}$ je

1. **pozitivně semidefinitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$;
2. **pozitivně definitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}, \mathbf{x} \neq 0$;
3. **negativně semidefinitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \leq 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$;
4. **negativně definitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} < 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}, \mathbf{x} \neq 0$;
5. **indefinitní**, pokud není pozitivně ani negativně semidefinitní.

Matice $\mathbf{A}$ je indefinitní právě tehdy, když $\exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ a $\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{y} < 0$.

# Charakterizace (semi)definitnosti

**Věta 4.6**

*Buď* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ***symetrická*** *matice. Potom platí následující:*

- *Matice* $\mathbf{A}$ *je pozitivně semidefinitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou nezáporná.*

# Charakterizace (semi)definitnosti

## Věta 4.6

*Buď* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ***symetrická*** *matice. Potom platí následující:*

- *Matice* $\mathbf{A}$ *je pozitivně semidefinitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou nezáporná.*
- *Matice* $\mathbf{A}$ *je pozitivně definitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou kladná.*

# Charakterizace (semi)definitnosti

## Věta 4.6

*Buď* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ***symetrická*** *matice. Potom platí následující:*

- *Matice* $\mathbf{A}$ *je pozitivně semidefinitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou nezáporná.*
- *Matice* $\mathbf{A}$ *je pozitivně definitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou kladná.*
- *Matice* $\mathbf{A}$ *je negativně semidefinitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou nekladná.*

# Charakterizace (semi)definitnosti

## Věta 4.6

*Buď* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ***symetrická*** *matice. Potom platí následující:*

- *Matice* $\mathbf{A}$ *je pozitivně semidefinitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou nezáporná.*
- *Matice* $\mathbf{A}$ *je pozitivně definitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou kladná.*
- *Matice* $\mathbf{A}$ *je negativně semidefinitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou nekladná.*
- *Matice* $\mathbf{A}$ *je negativně definitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou záporná.*

# Charakterizace (semi)definitnosti

**Věta 4.6**

*Buď $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ **symetrická** matice. Potom platí následující:*

- *Matice $\mathbf{A}$ je pozitivně semidefinitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou nezáporná.*
- *Matice $\mathbf{A}$ je pozitivně definitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou kladná.*
- *Matice $\mathbf{A}$ je negativně semidefinitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou nekladná.*
- *Matice $\mathbf{A}$ je negativně definitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou záporná.*
- *Matice $\mathbf{A}$ je indefinitní právě tehdy, když má alespoň jedno kladné a alespoň jedno záporné vlastní číslo.*

## Charakterizace (semi)definitnosti

### Věta 4.6

*Buď* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ***symetrická*** *matice. Potom platí následující:*

- *Matice* $\mathbf{A}$ *je pozitivně semidefinitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou nezáporná.*
- *Matice* $\mathbf{A}$ *je pozitivně definitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou kladná.*
- *Matice* $\mathbf{A}$ *je negativně semidefinitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou nekladná.*
- *Matice* $\mathbf{A}$ *je negativně definitní právě tehdy, když všechna její vlastní čísla jsou záporná.*
- *Matice* $\mathbf{A}$ *je indefinitní právě tehdy, když má alespoň jedno kladné a alespoň jedno záporné vlastní číslo.*

Náznak důkazu: Jelikož je matice $\mathbf{A}$ symetrická, platí $\mathbf{A} = P^{-1}DP$, kde $D$ je reálná diagonální a sloupce reálné regulární matice $P$ sestávají z jednotkových vlastních vektorů. Jelikož platí $P^{-1} = P^T$, tak zbytek plyne přímo z definice (semi)definitnosti a indefinitnosti.

# Sylvestrovo kritérium

**Věta 4.7 (Sylvestrovo kritérium)**

*Buď* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ***symetrická*** *matice. Pro matici* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *definujeme matice* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *takto:* $A_k \in \mathbb{R}^{k,k}$ *je čtvercová matice v levém horním rohu matice* $\mathbf{A}$*. Platí:*

- *Matice* $\mathbf{A}$ *je pozitivně definitní právě tehdy, když je determinant všech matic* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *kladný.*
- *Matice* $\mathbf{A}$ *je negativně definitní právě tehdy, když je determinant matic* $A_k$ *záporný pro* $k$ *liché a kladný pro* $k$ *sudé.*

# Jak poznat indefinitnost

**Věta 4.8**

*Pokud má matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ na diagonále dva prvky s různým znaménkem (jeden kladný a druhý záporný), pak je indefinitní.*

# Jak poznat indefinitnost

**Věta 4.8**

*Pokud má matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ na diagonále dva prvky s různým znaménkem (jeden kladný a druhý záporný), pak je indefinitní.*

**Důkaz.**

Mějme $(\mathbf{A})_{i,i} > 0$ a $(\mathbf{A})_{j,j} < 0$. Pak jistě platí

$$\mathbf{e}_i^T \mathbf{A} \mathbf{e}_i > 0 \quad \text{a} \quad \mathbf{e}_j^T \mathbf{A} \mathbf{e}_j < 0$$

($\mathbf{e}_i$ je $i$-tý vektor standardní báze $\mathbb{R}^n$) a tedy matice $\mathbf{A}$ je indefinitní (přímo z definice). □

# Postačující podmínka existence extrému a sedlového bodu

Stacionární bod, který není minimem ani maximem a na jehož nějakém okolí má funkce $f$ spojité všechny parciální derivace, se nazývá **sedlovým** bodem.

# Postačující podmínka existence extrému a sedlového bodu

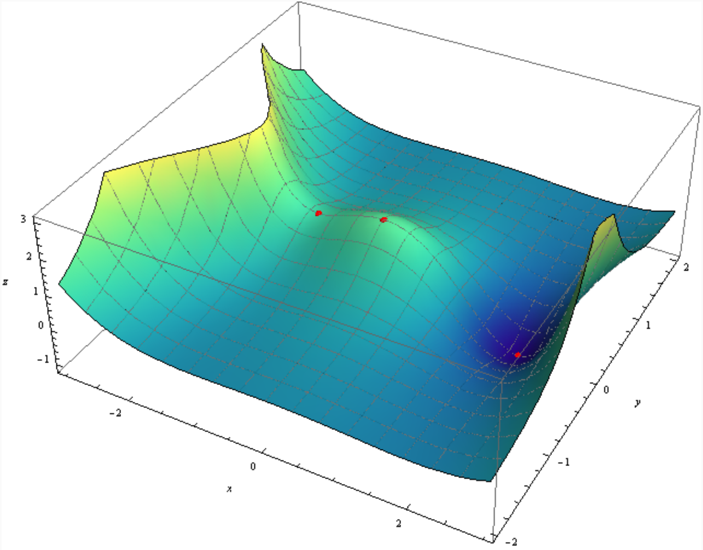
Stacionární bod, který není minimem ani maximem a na jehož nějakém okolí má funkce $f$ spojité všechny parciální derivace, se nazývá **sedlovým** bodem.

**Věta 4.9 (Postačující podmínka existence extrému a sedlového bodu)**

*Nechť* $\mathbf{b} \in D_f$ *je stacionární bod funkce* $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^n$*. Nechť existuje okolí* $H(\mathbf{b}) \subset D_f$ *takové, že* $f$ *má na* $H(\mathbf{b})$ *spojité všechny druhé parciální derivace, potom*

- *je-li* $\nabla^2 f(\mathbf{b})$ *pozitivně definitní, pak* $\mathbf{b}$ *je ostré lokální minimum;*
- *je-li* $\nabla^2 f(\mathbf{b})$ *negativně definitní, pak* $\mathbf{b}$ *je ostré lokální maximum;*
- *je-li* $\nabla^2 f(\mathbf{b})$ *indefinitní, pak* $\mathbf{b}$ *je sedlový bod.*

# Minimum, maximum, sedlový bod



# Co semidefinitnost?

**Věta 4.10 (Nutná podmínka existence lokálního extrému)**

*Nechť* $\mathbf{b} \in D_f$ *je stacionární bod funkce* $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^n$. *Nechť existuje okolí* $H(\mathbf{b}) \subset D_f$ *takové, že* $f$ *má na* $H(\mathbf{b})$ *spojité všechny druhé parciální derivace, potom*

- *je-li* $\mathbf{b}$ *lokální minimum, pak* $\nabla^2 f(\mathbf{b})$ *je pozitivně semidefinitní;*
- *je-li* $\mathbf{b}$ *lokální maximum, pak* $\nabla^2 f(\mathbf{b})$ *je negativně semidefinitní.*

# Co semidefinitnost?

**Věta 4.10 (Nutná podmínka existence lokálního extrému)**

*Nechť* $\mathbf{b} \in D_f$ *je stacionární bod funkce* $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^n$. *Nechť existuje okolí* $H(\mathbf{b}) \subset D_f$ *takové, že* $f$ *má na* $H(\mathbf{b})$ *spojité všechny druhé parciální derivace, potom*

- *je-li* $\mathbf{b}$ *lokální minimum, pak* $\nabla^2 f(\mathbf{b})$ *je pozitivně semidefinitní;*
- *je-li* $\mathbf{b}$ *lokální maximum, pak* $\nabla^2 f(\mathbf{b})$ *je negativně semidefinitní.*

**Důležitá poznámka**

Toto tvrzení **nelze** obrátit.

4. Lokální extrémy a postačující podmínka existence
   - Parciální derivace druhého řádu
   - Definitnost matic
   - Postačující podmínka existence lokálního extrému

5. Shrnutí: postup analytického hledání extrémů

6. Konvexní funkce

# Postup analytického hledání extrémů

1. Najít kritické body, tj. stacionární body a body, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje.

# Postup analytického hledání extrémů

1. Najít kritické body, tj. stacionární body a body, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje.

# Postup analytického hledání extrémů

1. Najít kritické body, tj. stacionární body a body, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje.
2. Pokud jsou všechny 2. parciální derivace v okolí stacionárního bodu $\mathbf{b}$ spojité, nalézt Hessovu matici. Pokud je tato matice

# Postup analytického hledání extrémů

1. Najít kritické body, tj. stacionární body a body, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje.
2. Pokud jsou všechny 2. parciální derivace v okolí stacionárního bodu $\mathbf{b}$ spojité, nalézt Hessovu matici. Pokud je tato matice
   a) pozitivně definitní, pak je bod $\mathbf{b}$ bodem ostrého lokálního minima;

# Postup analytického hledání extrémů

1. Najít kritické body, tj. stacionární body a body, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje.
2. Pokud jsou všechny 2. parciální derivace v okolí stacionárního bodu $\mathbf{b}$ spojité, nalézt Hessovu matici. Pokud je tato matice
   a) pozitivně definitní, pak je bod $\mathbf{b}$ bodem ostrého lokálního minima;
   b) negativně definitní, pak je bod $\mathbf{b}$ bodem ostrého lokálního maxima;

# Postup analytického hledání extrémů

1. Najít kritické body, tj. stacionární body a body, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje.
2. Pokud jsou všechny 2. parciální derivace v okolí stacionárního bodu $\mathbf{b}$ spojité, nalézt Hessovu matici. Pokud je tato matice
   a) pozitivně definitní, pak je bod $\mathbf{b}$ bodem ostrého lokálního minima;
   b) negativně definitní, pak je bod $\mathbf{b}$ bodem ostrého lokálního maxima;
   c) indefinitní, pak je bod $\mathbf{b}$ sedlovým bodem (tj. není extrémem).

# Postup analytického hledání extrémů

1. Najít kritické body, tj. stacionární body a body, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje.
2. Pokud jsou všechny 2. parciální derivace v okolí stacionárního bodu $\mathbf{b}$ spojité, nalézt Hessovu matici. Pokud je tato matice
   a) pozitivně definitní, pak je bod $\mathbf{b}$ bodem ostrého lokálního minima;
   b) negativně definitní, pak je bod $\mathbf{b}$ bodem ostrého lokálního maxima;
   c) indefinitní, pak je bod $\mathbf{b}$ sedlovým bodem (tj. není extrémem).

# Postup analytického hledání extrémů

1. Najít kritické body, tj. stacionární body a body, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje.
2. Pokud jsou všechny 2. parciální derivace v okolí stacionárního bodu $\mathbf{b}$ spojité, nalézt Hessovu matici. Pokud je tato matice
   a) pozitivně definitní, pak je bod $\mathbf{b}$ bodem ostrého lokálního minima;
   b) negativně definitní, pak je bod $\mathbf{b}$ bodem ostrého lokálního maxima;
   c) indefinitní, pak je bod $\mathbf{b}$ sedlovým bodem (tj. není extrémem).

V ostatních případech je třeba rozhodnout jiným způsobem (nelze pomocí Hessovy matice rozhodnout, např. protože neexistuje nebo je semidefinitní).

4. Lokální extrémy a postačující podmínka existence
   - Parciální derivace druhého řádu
   - Definitnost matic
   - Postačující podmínka existence lokálního extrému

5. Shrnutí: postup analytického hledání extrémů

6. Konvexní funkce

# Definice konvexní funkce

**Definice 6.1**

Funkce $f : D_f \to \mathbb{R}, D_f \subset \mathbb{R}^n$ je **konvexní** pokud je $D_f$ konvexní množina a

$$\forall \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in D_f \ \forall t \in [0,1] : \ f(t\mathbf{b}_1 + (1-t)\mathbf{b}_2) \leq t f(\mathbf{b}_1) + (1-t) f(\mathbf{b}_2).$$

Funkce $f$ je **konkávní**, pokud $-f$ je konvexní.

# Extrémy konvexní funkce

Funkce $f$, která má spojité všechny druhé parciální derivace, je konvexní právě tehdy, když je její Hessova matice pozitivně semidefinitní ve všech bodech vnitřku $D_f$ (vnitřek množiny jsou všechny její body, které v ní leží s nějakým okolím, jinak řečeno je to množina bez své hranice).

# Extrémy konvexní funkce

Funkce $f$, která má spojité všechny druhé parciální derivace, je konvexní právě tehdy, když je její Hessova matice pozitivně semidefinitní ve všech bodech vnitřku $D_f$ (vnitřek množiny jsou všechny její body, které v ní leží s nějakým okolím, jinak řečeno je to množina bez své hranice).

Lokální minimum konvexní funkce je globálním minimem.