

# NI-MPI přednáška 3

Analýza: extrémy a definitnost – příklady

---

13. února 2025

FIT ČVUT

- 1 Najít kritické body, tj. stacionární body a body, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje.

- 1 Najít kritické body, tj. stacionární body a body, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje.

## Připomenutí: postup analytického hledání extrémů

- 1 Najít kritické body, tj. stacionární body a body, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje.
- 2 Pokud jsou všechny 2. parciální derivace v okolí stacionárního bodu  $\mathbf{b}$  spojité, nalézt Hessovu matici. Pokud je tato matice

## Připomenutí: postup analytického hledání extrémů

- 1 Najít kritické body, tj. stacionární body a body, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje.
- 2 Pokud jsou všechny 2. parciální derivace v okolí stacionárního bodu  $\mathbf{b}$  spojité, nalézt Hessovu matici. Pokud je tato matice
  - a) pozitivně definitní, pak je bod  $\mathbf{b}$  bodem ostrého lokálního minima;

## Připomenutí: postup analytického hledání extrémů

- 1 Najít kritické body, tj. stacionární body a body, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje.
- 2 Pokud jsou všechny 2. parciální derivace v okolí stacionárního bodu  $\mathbf{b}$  spojité, nalézt Hessovu matici. Pokud je tato matice
  - a) pozitivně definitní, pak je bod  $\mathbf{b}$  bodem ostrého lokálního minima;
  - b) negativně definitní, pak je bod  $\mathbf{b}$  bodem ostrého lokálního maxima;

# Připomenutí: postup analytického hledání extrémů

- 1 Najít kritické body, tj. stacionární body a body, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje.
- 2 Pokud jsou všechny 2. parciální derivace v okolí stacionárního bodu  $\mathbf{b}$  spojité, nalézt Hessovu matici. Pokud je tato matice
  - a) pozitivně definitní, pak je bod  $\mathbf{b}$  bodem ostrého lokálního minima;
  - b) negativně definitní, pak je bod  $\mathbf{b}$  bodem ostrého lokálního maxima;
  - c) indefinitní, pak je bod  $\mathbf{b}$  sedlovým bodem (tj. není extrémem).

# Připomenutí: postup analytického hledání extrémů

- 1 Najít kritické body, tj. stacionární body a body, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje.
- 2 Pokud jsou všechny 2. parciální derivace v okolí stacionárního bodu  $\mathbf{b}$  spojité, nalézt Hessovu matici. Pokud je tato matice
  - a) pozitivně definitní, pak je bod  $\mathbf{b}$  bodem ostrého lokálního minima;
  - b) negativně definitní, pak je bod  $\mathbf{b}$  bodem ostrého lokálního maxima;
  - c) indefinitní, pak je bod  $\mathbf{b}$  sedlovým bodem (tj. není extrémem).



## Připomenutí: postup analytického hledání extrémů

- 1 Najít kritické body, tj. stacionární body a body, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje.
- 2 Pokud jsou všechny 2. parciální derivace v okolí stacionárního bodu  $\mathbf{b}$  spojité, nalézt Hessovu matici. Pokud je tato matice
  - a) pozitivně definitní, pak je bod  $\mathbf{b}$  bodem ostrého lokálního minima;
  - b) negativně definitní, pak je bod  $\mathbf{b}$  bodem ostrého lokálního maxima;
  - c) indefinitní, pak je bod  $\mathbf{b}$  sedlovým bodem (tj. není extrémem).

V ostatních případech je třeba rozhodnout jiným způsobem (nelze pomocí Hessovy matice rozhodnout, např. protože neexistuje nebo je semidefinitní).

## Definice 6.2 (Definitnost matic)

Mějme  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ . Řekneme, že matice  $\mathbf{A}$  je

- 1 **pozitivně semidefinitní**, pokud  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$  pro  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$ ;

## Definice 6.2 (Definitnost matic)

Mějme  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ . Řekneme, že matice  $\mathbf{A}$  je

- 1 **pozitivně semidefinitní**, pokud  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$  pro  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$ ;
- 2 **pozitivně definitní**, pokud  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$  pro  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ;

## Definice 6.2 (Definitnost matic)

Mějme  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ . Řekneme, že matice  $\mathbf{A}$  je

- 1 **pozitivně semidefinitní**, pokud  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$  pro  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$ ;
- 2 **pozitivně definitní**, pokud  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$  pro  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ;
- 3 **negativně semidefinitní**, pokud  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 0$  pro  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$ ;

## Definice 6.2 (Definitnost matic)

Mějme  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ . Řekneme, že matice  $\mathbf{A}$  je

- 1** **pozitivně semidefinitní**, pokud  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$  pro  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$ ;
- 2** **pozitivně definitní**, pokud  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$  pro  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ;
- 3** **negativně semidefinitní**, pokud  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 0$  pro  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$ ;
- 4** **negativně definitní**, pokud  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} < 0$  pro  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ;

## Definice 6.2 (Definitnost matic)

Mějme  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ . Řekneme, že matice  $\mathbf{A}$  je

- 1 **pozitivně semidefinitní**, pokud  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$  pro  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$ ;
- 2 **pozitivně definitní**, pokud  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$  pro  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}, \mathbf{x} \neq 0$ ;
- 3 **negativně semidefinitní**, pokud  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 0$  pro  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$ ;
- 4 **negativně definitní**, pokud  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} < 0$  pro  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}, \mathbf{x} \neq 0$ ;
- 5 **indefinitní**, pokud není pozitivně ani negativně semidefinitní.

## Základní cvičení 17.1

Uvažme funkce

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$g(x, y) = x^2 - y^2$$

$$h(x, y) = x^2 + y^3$$

$$u(x, y) = xy$$

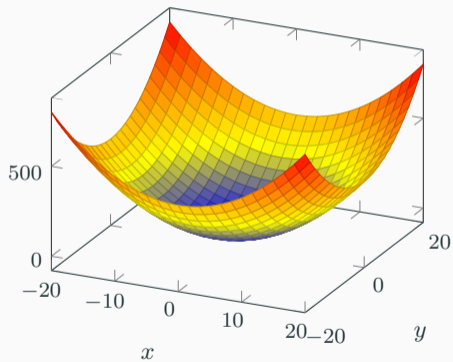
$$w(x, y) = (x + y)^2$$

$$z(x, y) = x^4 + y^4$$

Pro všechny funkce nalezněte všechny kritické body a zjistěte, zda se jedná o lokální minimum, lokální maximum nebo sedlový bod. Pro funkce  $f$  a  $g$  spočtěte první a druhou derivaci ve směru přímky  $y = x$  v bodě  $(1, 1)$ .

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

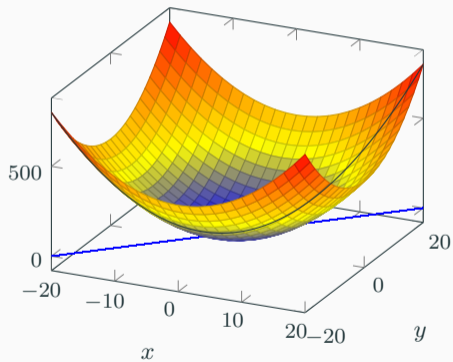
$$f(x, y) = x^2 + y^2$$



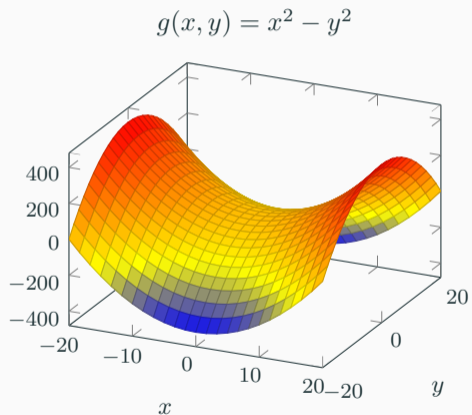


$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

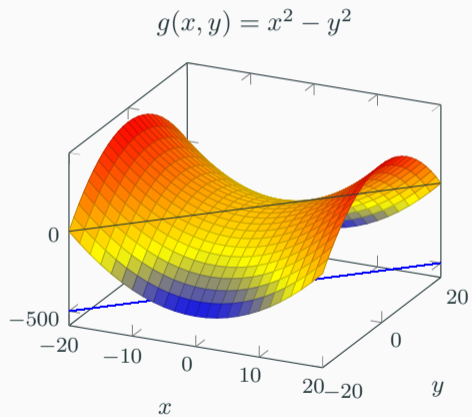
$$f(x, y) = x^2 + y^2$$



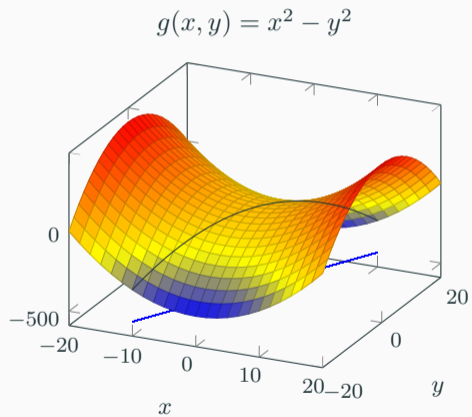
$$g(x, y) = x^2 - y^2$$



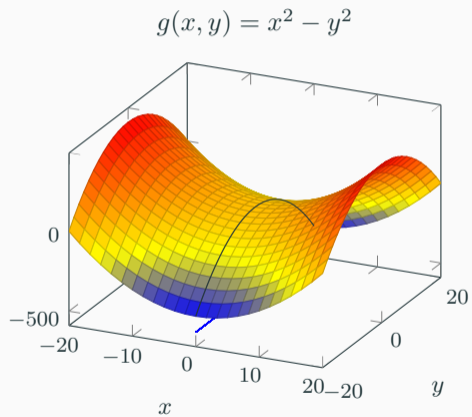
$$g(x, y) = x^2 - y^2$$



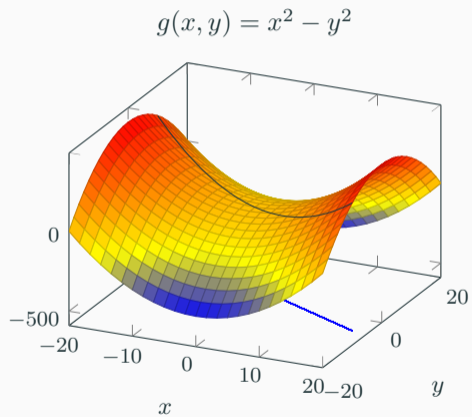
$$g(x, y) = x^2 - y^2$$



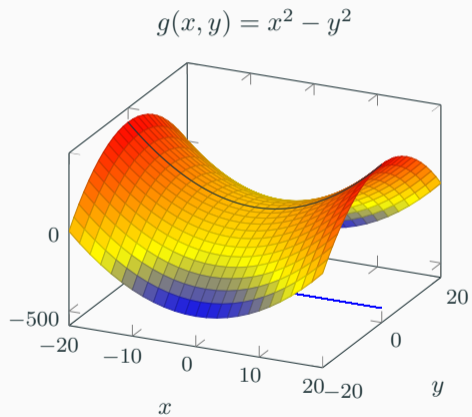
$$g(x, y) = x^2 - y^2$$



$$g(x, y) = x^2 - y^2$$

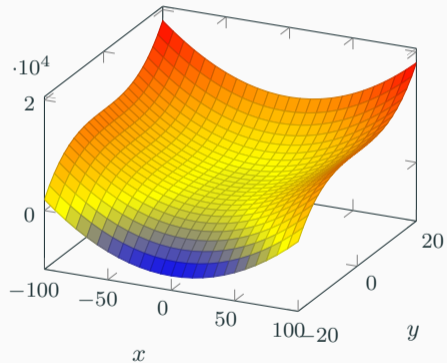


$$g(x, y) = x^2 - y^2$$



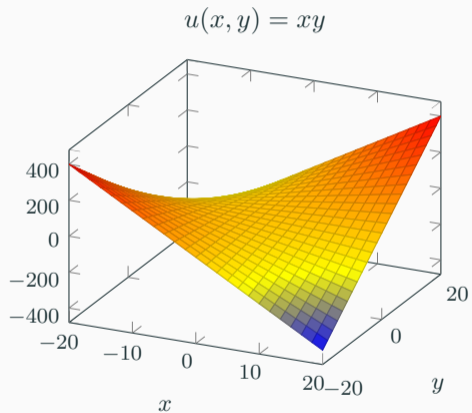
$$h(x, y) = x^2 + y^3 \quad \mathbf{i}$$

$$h(x, y) = x^2 + y^3$$



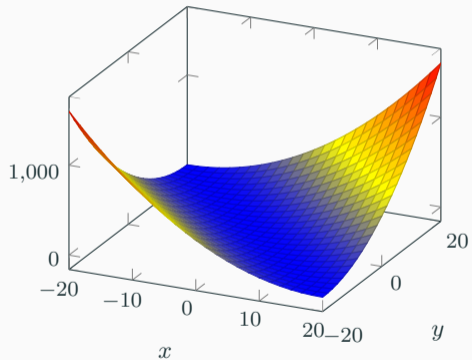


$$u(x, y) = xy \quad \mathbf{i}$$



$$w(x, y) = (x + y)^2 \quad \mathbf{i}$$

$$w(x, y) = (x + y)^2$$



$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z \quad \mathbf{i}$$

## Základní cvičení 17.2

Mějme

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$$

Nalezněte všechny kritické body a zjistěte, zda se jedná o lokální minimum, lokální maximum nebo sedlový bod.

$$D_f =$$

$$\nabla f(x, y, z) =$$

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z \quad \text{ii}$$

---

$$\nabla f(x, y, z) = (3x^2 + 12y, 2y + 12x, 2z + 2)$$

$$\nabla f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z \quad \text{iii}$$

$$\nabla f(x, y, z) = (3x^2 + 12y, 2y + 12x, 2z + 2)$$

$$\text{k. body} = \{(0, 0, -1), (24, -144, -1)\}$$

$$\nabla^2 f(x, y, z) =$$

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z \quad \mathbf{iv}$$

$$\text{k. body} = \{(0, 0, -1), (24, -144, -1)\}$$

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(0, 0, -1) =$$

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z \quad \mathbf{v}$$

$$\text{k. body} = \{(0, 0, -1), (24, -144, -1)\}$$

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(24, -144, -1) =$$