NI-MPI přednáška 3

Analýza: extrémy a definitnost – příklady

13. února 2025

FIT ČVUT

Připomenutí: postup analytického hledání extrémů

1. Najít kritické body, tj. stacionární body a body, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje.

Připomenutí: postup analytického hledání extrémů

1. Najít kritické body, tj. stacionární body a body, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje.

Připomenutí: postup analytického hledání extrémů

1. Najít kritické body, tj. stacionární body a body, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje.
2. Pokud jsou všechny 2. parciální derivace v okolí stacionárního bodu $\mathbf{b}$ spojité, nalézt Hessovu matici. Pokud je tato matice

Připomenutí: postup analytického hledání extrémů

1. Najít kritické body, tj. stacionární body a body, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje.
2. Pokud jsou všechny 2. parciální derivace v okolí stacionárního bodu $\mathbf{b}$ spojité, nalézt Hessovu matici. Pokud je tato matice
   a) pozitivně definitní, pak je bod $\mathbf{b}$ bodem ostrého lokálního minima;

Připomenutí: postup analytického hledání extrémů

1. Najít kritické body, tj. stacionární body a body, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje.
2. Pokud jsou všechny 2. parciální derivace v okolí stacionárního bodu $\mathbf{b}$ spojité, nalézt Hessovu matici. Pokud je tato matice
   a) pozitivně definitní, pak je bod $\mathbf{b}$ bodem ostrého lokálního minima;
   b) negativně definitní, pak je bod $\mathbf{b}$ bodem ostrého lokálního maxima;

Připomenutí: postup analytického hledání extrémů

1. Najít kritické body, tj. stacionární body a body, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje.
2. Pokud jsou všechny 2. parciální derivace v okolí stacionárního bodu $\mathbf{b}$ spojité, nalézt Hessovu matici. Pokud je tato matice
   a) pozitivně definitní, pak je bod $\mathbf{b}$ bodem ostrého lokálního minima;
   b) negativně definitní, pak je bod $\mathbf{b}$ bodem ostrého lokálního maxima;
   c) indefinitní, pak je bod $\mathbf{b}$ sedlovým bodem (tj. není extrémem).

Připomenutí: postup analytického hledání extrémů

1. Najít kritické body, tj. stacionární body a body, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje.
2. Pokud jsou všechny 2. parciální derivace v okolí stacionárního bodu $\mathbf{b}$ spojité, nalézt Hessovu matici. Pokud je tato matice
   a) pozitivně definitní, pak je bod $\mathbf{b}$ bodem ostrého lokálního minima;
   b) negativně definitní, pak je bod $\mathbf{b}$ bodem ostrého lokálního maxima;
   c) indefinitní, pak je bod $\mathbf{b}$ sedlovým bodem (tj. není extrémem).

Připomenutí: postup analytického hledání extrémů

1. Najít kritické body, tj. stacionární body a body, kde alespoň jedna parciální derivace neexistuje.
2. Pokud jsou všechny 2. parciální derivace v okolí stacionárního bodu $\mathbf{b}$ spojité, nalézt Hessovu matici. Pokud je tato matice
   a) pozitivně definitní, pak je bod $\mathbf{b}$ bodem ostrého lokálního minima;
   b) negativně definitní, pak je bod $\mathbf{b}$ bodem ostrého lokálního maxima;
   c) indefinitní, pak je bod $\mathbf{b}$ sedlovým bodem (tj. není extrémem).

V ostatních případech je třeba rozhodnout jiným způsobem (nelze pomocí Hessovy matice rozhodnout, např. protože neexistuje nebo je semidefinitní).

Připomenutí: definitnost matic

Definice 6.2 (Definitnost matic)

Mějme $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$. Řekneme, že matice $\mathbf{A}$ je

1. **pozitivně semidefinitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$;

Připomenutí: definitnost matic

Definice 6.2 (Definitnost matic)

Mějme $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$. Řekneme, že matice $\mathbf{A}$ je

1. **pozitivně semidefinitní**, pokud $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$;
2. **pozitivně definitní**, pokud $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}, \mathbf{x} \neq 0$;

Připomenutí: definitnost matic

Definice 6.2 (Definitnost matic)

Mějme $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$. Řekneme, že matice $\mathbf{A}$ je

1. **pozitivně semidefinitní**, pokud $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$;
2. **pozitivně definitní**, pokud $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}, \mathbf{x} \neq 0$;
3. **negativně semidefinitní**, pokud $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$;

Připomenutí: definitnost matic

Definice 6.2 (Definitnost matic)

Mějme $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$. Řekneme, že matice $\mathbf{A}$ je

1. **pozitivně semidefinitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$;
2. **pozitivně definitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}, \mathbf{x} \neq 0$;
3. **negativně semidefinitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \leq 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$;
4. **negativně definitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} < 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}, \mathbf{x} \neq 0$;

Připomenutí: definitnost matic

Definice 6.2 (Definitnost matic)

Mějme $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$. Řekneme, že matice $\mathbf{A}$ je

1. **pozitivně semidefinitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$;
2. **pozitivně definitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}, \mathbf{x} \neq 0$;
3. **negativně semidefinitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \leq 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}$;
4. **negativně definitní**, pokud $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} < 0$ pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n,1}, \mathbf{x} \neq 0$;
5. **indefinitní**, pokud není pozitivně ani negativně semidefinitní.

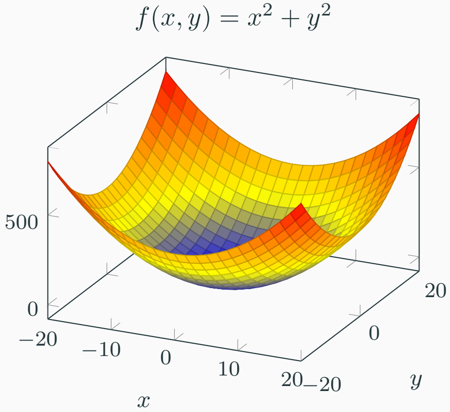
Základní cvičení 17.1

Uvažme funkce

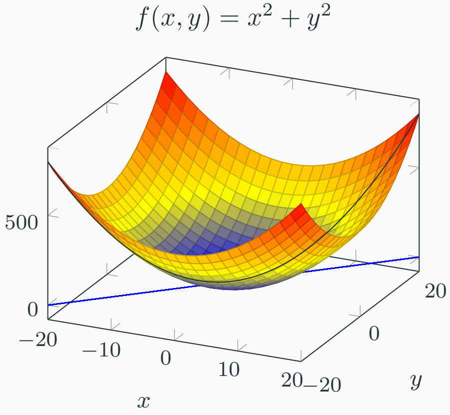
$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + y^2 \\ g(x,y) &= x^2 - y^2 \\ h(x,y) &= x^2 + y^3 \\ u(x,y) &= xy \\ w(x,y) &= (x+y)^2 \\ z(x,y) &= x^4 + y^4 \end{aligned}$$

Pro všechny funkce nalezněte všechny kritické body a zjistěte, zda se jedná o lokální minimum, lokální maximum nebo sedlový bod. Prof funkce f a g spočtěte první a druhou derivaci ve směru přímky $y = x$ v bodě $(1,1)$.

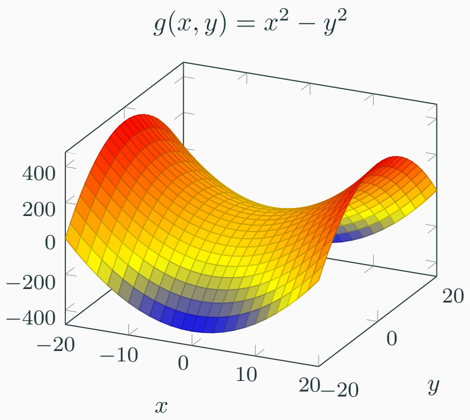
$f(x,y) = x^2 + y^2$



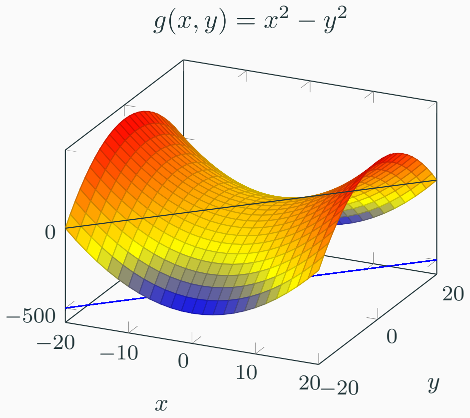
$f(x, y) = x^2 + y^2$



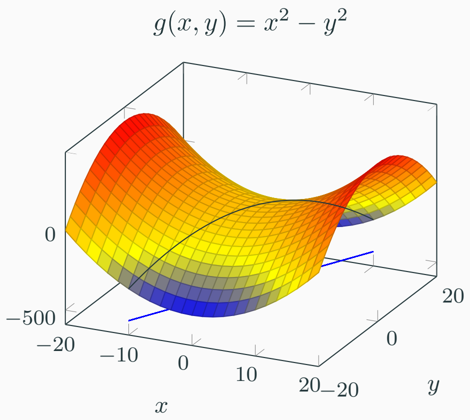
$g(x, y) = x^2 - y^2$



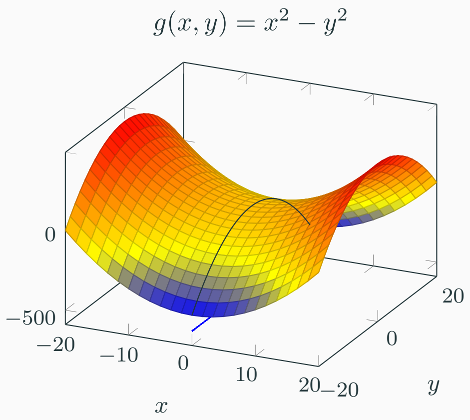
$g(x, y) = x^2 - y^2$



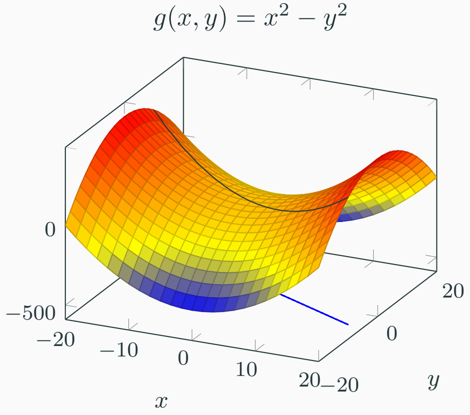
$g(x, y) = x^2 - y^2$



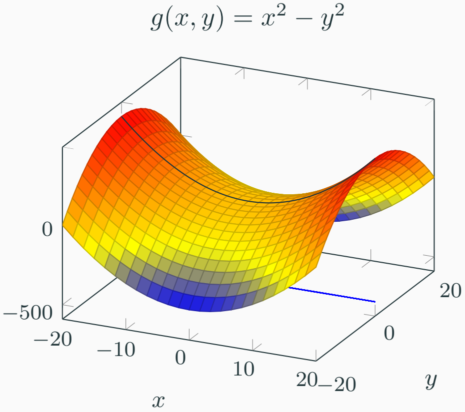
$g(x, y) = x^2 - y^2$



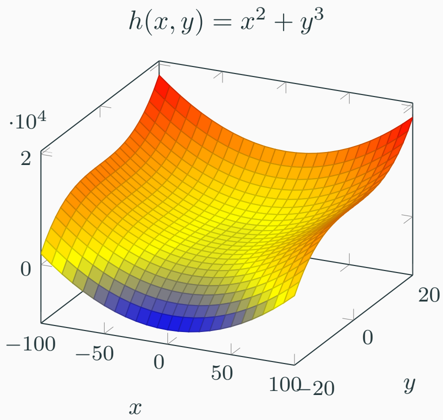
$g(x, y) = x^2 - y^2$



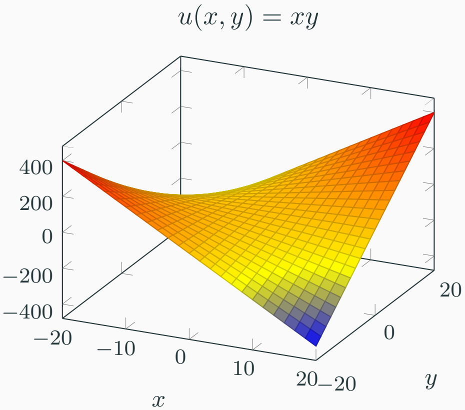
$g(x,y) = x^2 - y^2$



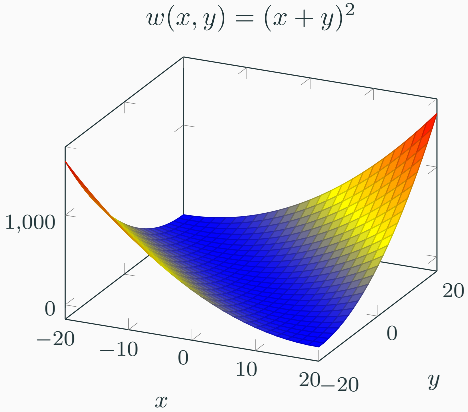
$h(x, y) = x^2 + y^3$ I



$u(x, y) = xy$ i



$w(x, y) = (x + y)^2$ i



Základní cvičení 17.2

Mějme

$$f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$$

Nalezněte všechny kritické body a zjistěte, zda se jedná o lokální minimum, lokální maximum nebo sedlový bod.

$D_f =$

$\nabla f(x,y,z) =$

$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$ ii

$$\nabla f(x, y, z) = \left(3x^2 + 12y, 2y + 12x, 2z + 2\right)$$

$$\nabla f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow$$

$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$ iii

$\nabla f(x, y, z) = \left(3x^2 + 12y, 2y + 12x, 2z + 2\right)$

k. body $= \{(0, 0, -1), (24, -144, -1)\}$

$\nabla^2 f(x, y, z) =$

$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$ **iv**

k. body $= \{(0, 0, -1), (24, -144, -1)\}$

$$\nabla^2 f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(0, 0, -1) =$$

$f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$ **v**

k. body $= \{(0,0,-1), (24,-144,-1)\}$

$$\nabla^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(24,-144,-1) =$$