

## 7 Vázané extrémym

### 7.1 Implicitní funkce

**Věta 7.1 — Věta o implicitní funkci.** Necht  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$  jsou spojité v okolí bodu  $(a, b)$ . Předpokládejme dále, že

$$f(a, b) = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0.$$

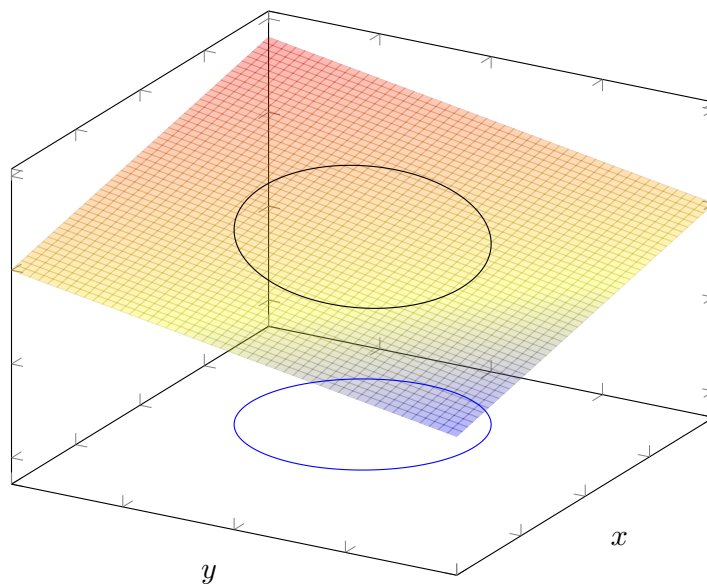
- (a) Pak existují  $\varepsilon > 0, \delta > 0$  a obdélníkové okolí  $R := \{(x, y) : |x - a| < \varepsilon, |y - b| < \delta\}$  bodu  $(a, b)$  takové, že pro každé  $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  existuje právě jedno  $y \in (b - \delta, b + \delta)$ , které splňuje rovnici  $f(x, y) = 0$ . Tedy  $y$  je funkcí proměnné  $x$  a lze psát  $y = \varphi(x)$ . Definiční obor  $\varphi$  je interval  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .
- (b) Funkce  $\varphi$  určená v bodě (a) a její derivace  $\varphi'$  jsou spojité na intervalu  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  a platí

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))} \quad \text{pro } x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

### 7.2 Definice problému

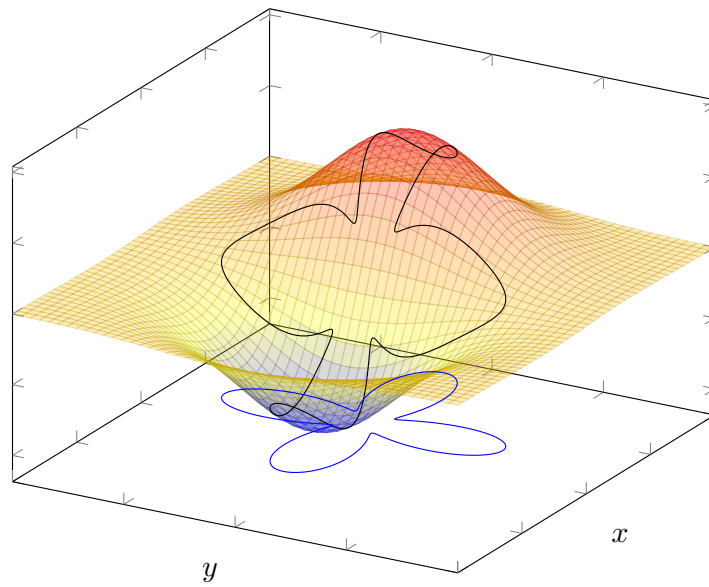
#### Ukázka - Obrázek 1

Nalezněte maximum a minimum, když se „pohybujeme“ na grafu pouze po černé křivce (= nad modrou křivkou):



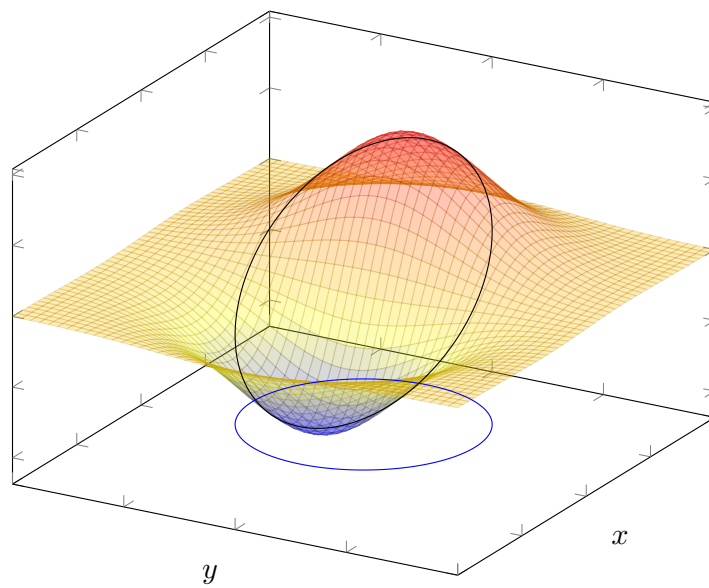
#### Ukázka - Obrázek 2

Nalezněte maximum a minimum, když se „pohybujeme“ na grafu pouze po černé křivce (= nad modrou křivkou):



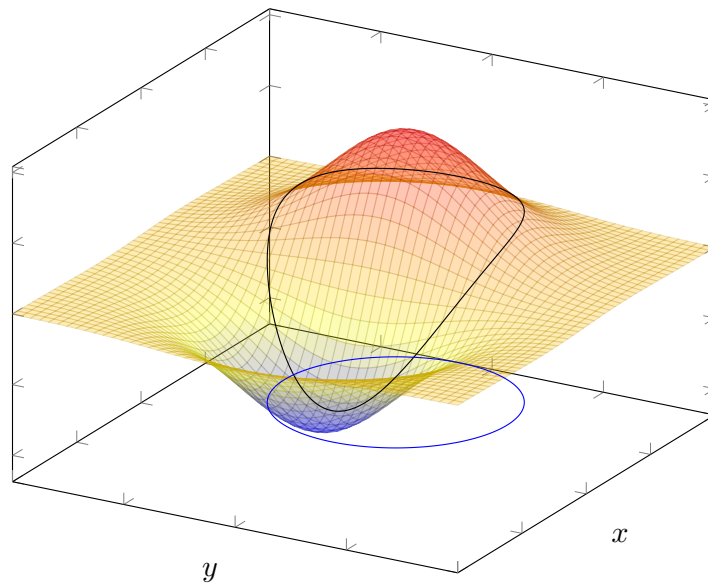
**Ukázka - Obrázek 3**

Nalezněte maximum a minimum, když se „pohybujeme“ na grafu pouze po černé křivce (= nad modrou křivkou):



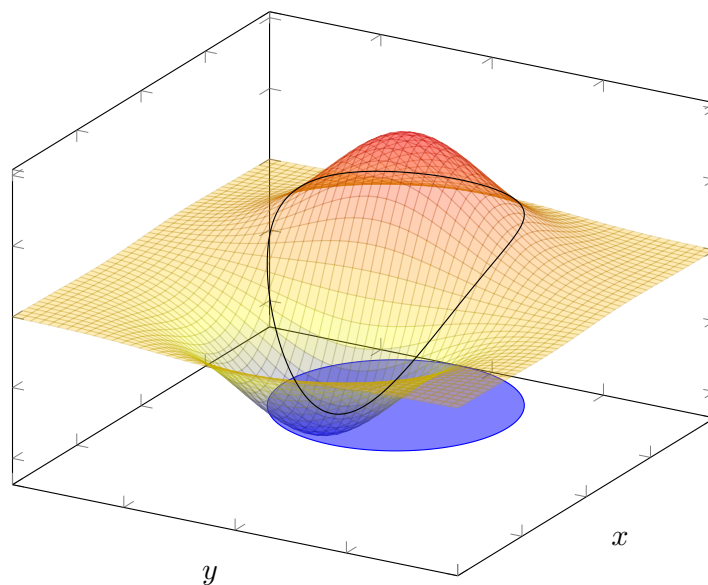
**Ukázka - Obrázek 4**

Nalezněte maximum a minimum, když se „pohybujeme“ na grafu pouze po černé křivce (= nad modrou křivkou):



Ukázka - Obrázek 5

Nalezněte maximum a minimum, když se „pohybujeme“ na grafu pouze **nad modrou množinou**:



### Formulace problému

Označme  $\hat{m} = \{1, \dots, m\}$  a  $\hat{p} = \{1, \dots, p\}$  ( $m, p \in \mathbb{N}$ ).

Úloha vázaného extrému (minima) (*constrained optimization/minimization*) je obecně následující úloha:

$$\begin{cases} \text{minimalizuj} & f(\mathbf{x}), \\ \text{za podmíněk} & g_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j \in \hat{m}, \\ & h_k(\mathbf{x}) \leq 0, \quad k \in \hat{p}, \end{cases} \quad (1)$$

kde  $f, g_j, h_k$  jsou funkce  $D \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $D \subset \mathbb{R}^n$ .

### Terminologie

$f$ : objektivní/účelová/minimalizovaná/optimalizovaná funkce

$g_j$ : rovnostní podmínka/vazba | podmínky/vazby

$h_k$ : nerovnostní podmínka/vazba | podmínky/vazby

Jsou-li všechny funkce lineární (a je-li alespoň jedna nerovnostní podmínka): **úloha lineárního programování**

Jsou-li všechny vazby lineární (a je-li alespoň jedna nerovnostní podmínka) a  $f$  kvadratická: **úloha kvadratického programování**

Jinak obecně: **úloha nelineárního programování**

**Přípustná řešení a jiná formulace**

Označme množinu přípustných řešení:

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{x} \in D : (\forall j \in \hat{m})(g_j(\mathbf{x}) = 0) \wedge (\forall k \in \hat{p})(h_k(\mathbf{x}) \leq 0)\}$$

**Definice 7.2** Mějme množiny  $D \subset \mathbb{R}^n$  a  $\mathcal{M} \subset D$ . Řekneme, že funkce  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  má v bodě  $\mathbf{x}^* \in \mathcal{M}$  lokální minimum **vzhledem k množině  $\mathcal{M}$** , pokud existuje okolí  $H(\mathbf{x}^*)$  takové, že platí

$$\forall \mathbf{x} \in (H(\mathbf{x}^*) \cap \mathcal{M}) \quad f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}).$$

Bod  $\mathbf{x}^*$  se zove bodem lokálního minima funkce  $f$  vzhledem k množině  $\mathcal{M}$ .

Analogicky se definuje maximum a ostré extrémů vzhledem k množině, a body těchto extrémů.

## 7.3 Metody řešení

### 7.3.1 Obecně Obecně

Obecná metoda závisí na funkcích  $f$ ,  $g_j$  a  $h_k$ :

- substituce,
- lineární programování,
- kvadratické programování,
- konvexní optimalizace,
- ...

Máme-li k dispozici (druhé) parciální derivace všech funkcí, lze je zkusit (pro nelineární problémy) použít. Tyto analytické metody se opět opírají o geometrický význam první a druhé parciální derivace.

### 7.3.2 Metoda řešení při rovnostních vazbách

## Metoda řešení při rovnostních vazbách

## Lagrangeova funkce

Mějme úlohu nalézt lokální extrémů funkce  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $D \subset \mathbb{R}^n$ , vzhledem k množině

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{x} \in D : g_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, 2, \dots, m\}, \text{ kde } g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

**Definice 7.3** Funkci  $L : \mathcal{M} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  definovanou jako

$$L(\mathbf{x}; \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(\mathbf{x})$$

nazýváme **Lagrangeovou funkcí** pro danou úlohu.

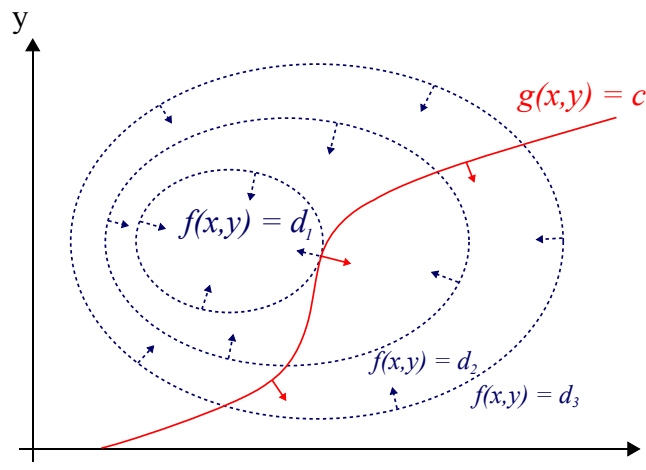
Koeficienty

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

nazýváme **Lagrangeovy multiplikátory** (*Lagrange multipliers*).

### K čemu Lagrangeova funkce?

Uvažujme jednu rovnostní vazbu (tedy  $m = 1$ ). Pokud v bodě  $x^*$  platí, že gradient vazby i naší funkce mají stejný směr, tedy  $\nabla f(x^*) = -\lambda_1^* \nabla g_1(x^*)$ , pak „vazba v daném bodě neprotíná vrstevnici“.



Zdroj: <https://en.wikipedia.org/wiki/File:LagrangeMultipliers2D.svg>

**Věta 7.4 — Postačující podmínka existence ostrého lokálního minima pro rovnostní vazby.** Necht  $f, g_j, j \in \{1, \dots, m\}$  mají spojité všechny druhé parciální derivace na nějaké otevřené nadmnožině  $\tilde{\mathcal{M}} \supset \mathcal{M}$ . Pokud dvojice  $(x^*; \lambda^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  splňuje podmínky:

- (0) (0. derivace)  $x^* \in \mathcal{M}$ ;
- (1) (1. derivace)  $\forall i, \frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*; \lambda^*) = 0$ ;
- (2) (2. derivace) pro každý (sloupcový) vektor  $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$  splňující

$$\nabla g_j(x^*) \cdot v = 0, \quad \text{pro } \forall j \in \{1, \dots, m\},$$

platí

$$v^T \cdot \nabla_x^2 L(x^*; \lambda^*) \cdot v > 0;$$

kde  $\nabla_x^2 L$  je Hessova matice funkce  $L$  vzhledem k proměnným  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,

potom je  $x^*$  bodem ostrého lokálního minima.

Všimněme si, že body (0) a (1) jsou ekvivalentní rovnosti  $\nabla L(x^*; \lambda^*) = 0$ .

### 7.3.3 Metoda řešení při rovnostních i nerovnostních vazbách

## Metoda řešení při rovnostních vazbách i nerovnostních vazbách

### Lagrangeova funkce

Mějme úlohu nalézt lokální extrémů funkce  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $D \subset \mathbb{R}^n$ , vzhledem k množině

$$\mathcal{M} = \{x \in D : g_i(x) = 0, h_j(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, \dots, p\}, \text{ kde } g_i, h_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

**Definice 7.5 — Lagrangeova funkce.** Funkci  $L : \mathcal{M} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  definovanou

$$L(x; \lambda; \mu) = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x) + \sum_{k=1}^p \mu_k h_k(x)$$

nazýváme **Lagrangeovou funkcí** pro danou úlohu (1). Koeficienty

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \quad \text{a} \quad \mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)$$

nazýváme **Lagrangeovy multiplikátory** (*Lagrange multipliers*).

### Technické předpoklady diferencovatelnosti

Nechť  $\widetilde{\mathcal{M}}$  je otevřená nadmnožina  $\mathcal{M}$ , na níž pro všechny funkce  $f, g_j$  pro  $j \in \hat{m}, h_k$  pro  $k \in \hat{p}$  existují druhé parciální derivace.

Funkci  $L$  pak chápeme jako funkci  $L : \widetilde{\mathcal{M}} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ .

Pro jednoduchost lze uvažovat  $\mathcal{M} \subset \widetilde{\mathcal{M}} = \mathbb{R}^n$ .

(Množina  $\mathcal{M}$  je uzavřená (díky spojitosti  $g_j$  a  $h_k$ ).)

### Aktivní omezení

Pokud máme nerovnostní vazby  $h_k$ , je třeba vědět, kdy je splněna rovnost:

**Definice 7.6 — Množina aktivních omezení.** Pro bod  $x \in \mathcal{M}$  definujeme množinu aktivních omezení

$$\mathcal{B}(x) = \{k \in \hat{p} : h_k(x) = 0\}.$$

Tedy  $\mathcal{B}(x)$  jsou indexy nerovnostních vazeb takových, že  $x$  je na hranici množiny  $\{x : h_k(x) \leq 0\}$ .

**Věta 7.7 — Postačující podmínka existence ostrého lokálního minima.** Necht  $f, g_j, h_k$  pro  $j \in \hat{m}, k \in \hat{p}$  mají spojitě všechny druhé parciální derivace na nějaké otevřené nadmnožině  $\mathcal{M} \supset \mathcal{M}$ . Pokud trojice  $(x^*; \lambda^*; \mu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$  splňuje podmínky:

1. (0. derivace)  $x^* \in \mathcal{M}$ ;
2. (1. derivace)  $\forall i, \frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*; \lambda^*; \mu^*) = 0$ ;

3. (aktivní a neaktivní vazby) Pro každé  $k \in \hat{p}$ ,  $\mu_k^* = 0$  nebo  $h_k(x^*) = 0$ ;

4. (2. derivace) pro každý (sloupcový) vektor  $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$  splňující

$$\begin{aligned} \nabla g_j(x^*) \cdot v &= 0, & \text{pro všechna } j \in \hat{m}, \\ \nabla h_k(x^*) \cdot v &= 0, & \text{pro všechna } k \in \hat{p}, \mu_k^* \neq 0, \text{ platí} \end{aligned}$$

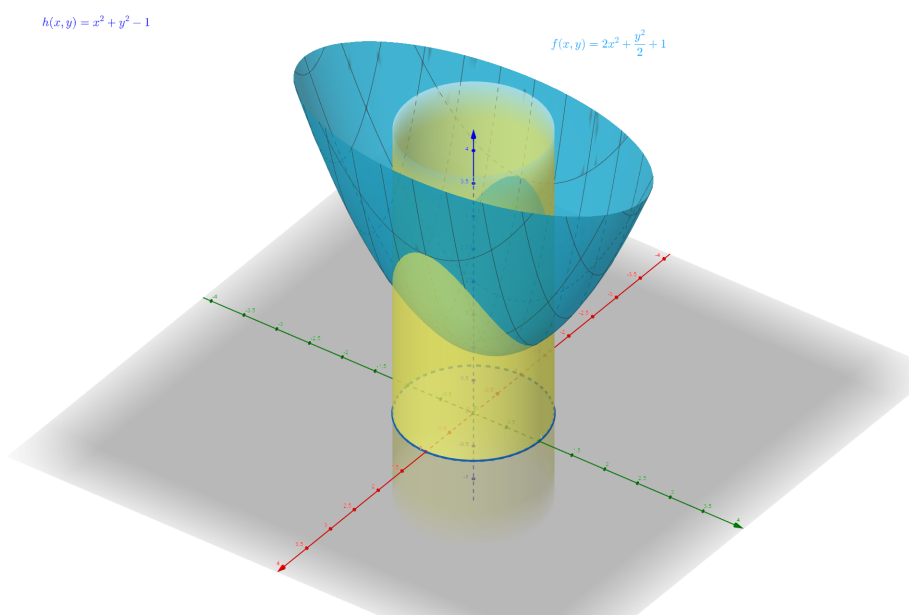
$$v^T \cdot \nabla_x^2 L(x^*; \lambda^*; \mu^*) \cdot v > 0,$$

kde  $\nabla_x^2 L$  je Hessova matice funkce  $L$  vzhledem k proměnným  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ;

5. (správný „směr“ od hranice  $\mathcal{M}$ )  $\mu_k^* \geq 0$ , pro každé  $k \in \hat{p}$ .

Potom je  $x^*$  bodem ostrého lokálního minima úlohy (1).

### Znaménko multiplikátoru



**Věta 7.8 — Postačující podmínka existence ostrého lokálního maxima.** Necht  $f, g_j, h_k$  pro  $j \in \hat{m}, k \in \hat{p}$  mají spojitě všechny druhé parciální derivace na nějaké otevřené nadmnožině  $\mathcal{M} \supset \mathcal{M}$ . Pokud trojice  $(x^*; \lambda^*; \mu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$  splňuje podmínky:

1. (0. derivace)  $x^* \in \mathcal{M}$ ;

2. (1. derivace)  $\forall i, \frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*; \lambda^*; \mu^*) = 0$ ;

3. (aktivní a neaktivní vazby) Pro každé  $k \in \hat{p}$ ,  $\mu_k^* = 0$  nebo  $h_k(x^*) = 0$ ;

4. (2. derivace) pro každý (sloupcový) vektor  $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$  splňující

$$\begin{aligned} \nabla g_j(x^*) \cdot v &= 0, & \text{pro všechna } j \in \hat{m}, \\ \nabla h_k(x^*) \cdot v &= 0, & \text{pro všechna } k \in \hat{p}, \mu_k^* \neq 0, \text{ platí} \end{aligned}$$

$$v^T \cdot \nabla_x^2 L(x^*; \lambda^*; \mu^*) \cdot v < 0,$$

kde  $\nabla_x^2 L$  je Hessova matice funkce  $L$  vzhledem k proměnným  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ;

5. (správný „směr“ od hranice  $\mathcal{M}$ )  $\mu_k^* \leq 0$ , pro každé  $k \in \hat{p}$ .

Potom je  $x^*$  bodem ostrého lokálního maxima úlohy (1).

## ChangeLog

Verze	Datum	Autor	Log
1.31	10.10.2023	ŠS	Oprava ve větách pro nevázané extrémy: doplnění hvězdiček.
1.3	10.10.2023	ŠS	Oprava a upřesnění v postačujících podmínkách týkající se vektoru $v$ .
1.2	10.10.2022	ŠS	Oddělení rovnostních podmínek v prezentaci, celková věta až na konec.
1.14	13.10.2021	ŠS	Nekonfliktní značení pro vektor v podmínce 2. řádu.
1.13	14.4.2021	ŠS	Oprava nepřesné formulace ohledně vazeb.
1.11	26.11.2020	ŠS	Přesun informace o uzavřenosti $M$ a přidání důvodu (v rámci slajdu).
1.11	24.11.2020	ŠS	Explicitně zmíněno, že pro lok. maximum je třeba změnit znaménko i u multiplikátorů.
1.1	23.11.2020	ŠS	Drobné opravy.
1.02	3.2.2020	ŠS	Opravy překlepů.
1.01	11.11.2019	ŠS	Opravy překlepů.
1.0	11.11.2019	ŠS	Výchozí verze.