NI-MPI přednáška 4handout
Problémy, návrhy apod. hlaste v GitLabu.
Verze souboru: 2023-11-15 16:25.

Řešené příklady: Vázané extrémy

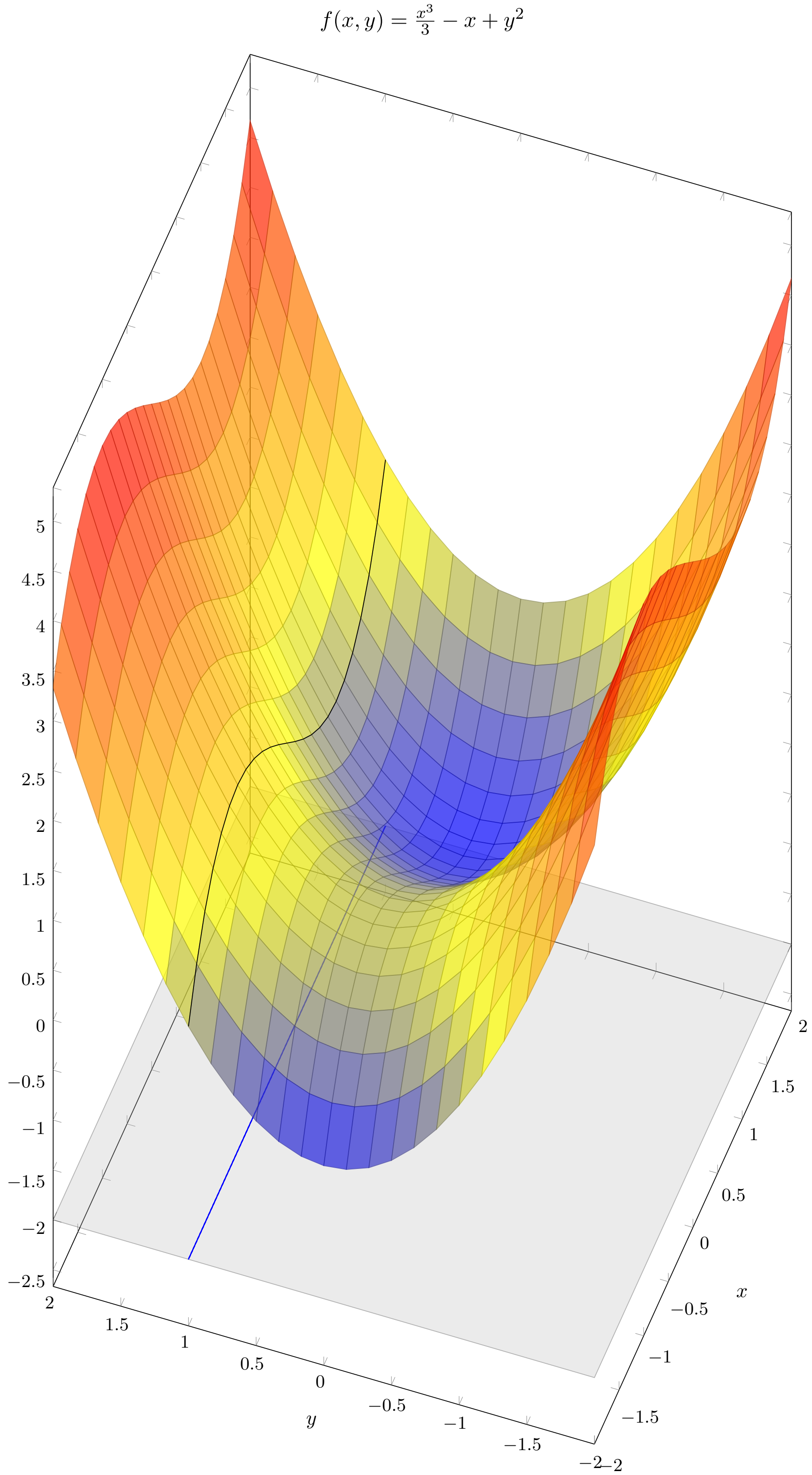
Základní cvičení 10.3
Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ za podmínky

a) $g(x, y) = y - 1 = 0$;

b) $g(x, y) = y = 0$;

c) $g(x, y) = x^2 + 2x + y^2 = 0$.

$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ **a** $g(x, y) = y - 1 = 0$



$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ **a** $g(x,y) = y - 1 = 0$

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ za podmínky $g(x,y) = y - 1 = 0$
(Lze dosadit!)

Obecný postup pro rovnostní vazby:

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ za podmínky $g(x,y) = y - 1 = 0$

$L(x,y,\lambda) =$

$\nabla L(x^*, y^*, \lambda^*) = 0 \Leftrightarrow$

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ za podmínky $g(x,y) = y - 1 = 0$

$\nabla_{\mathbf{x}} L(x,y,\lambda) = \left(x^2 - 1, 2y + \lambda\right)$

$\nabla^2_{\mathbf{x}} L(x,y,\lambda) =$

$x^* = 1, y^* = 1, \lambda^* = -2$

$\nabla^2_{\mathbf{x}} L\left(1, 1, -2\right) =$

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ za podmínky $g(x,y) = y - 1 = 0$

$\nabla_{\mathbf{x}} L(x,y,\lambda) = \left(x^2 - 1, 2y + \lambda\right)$

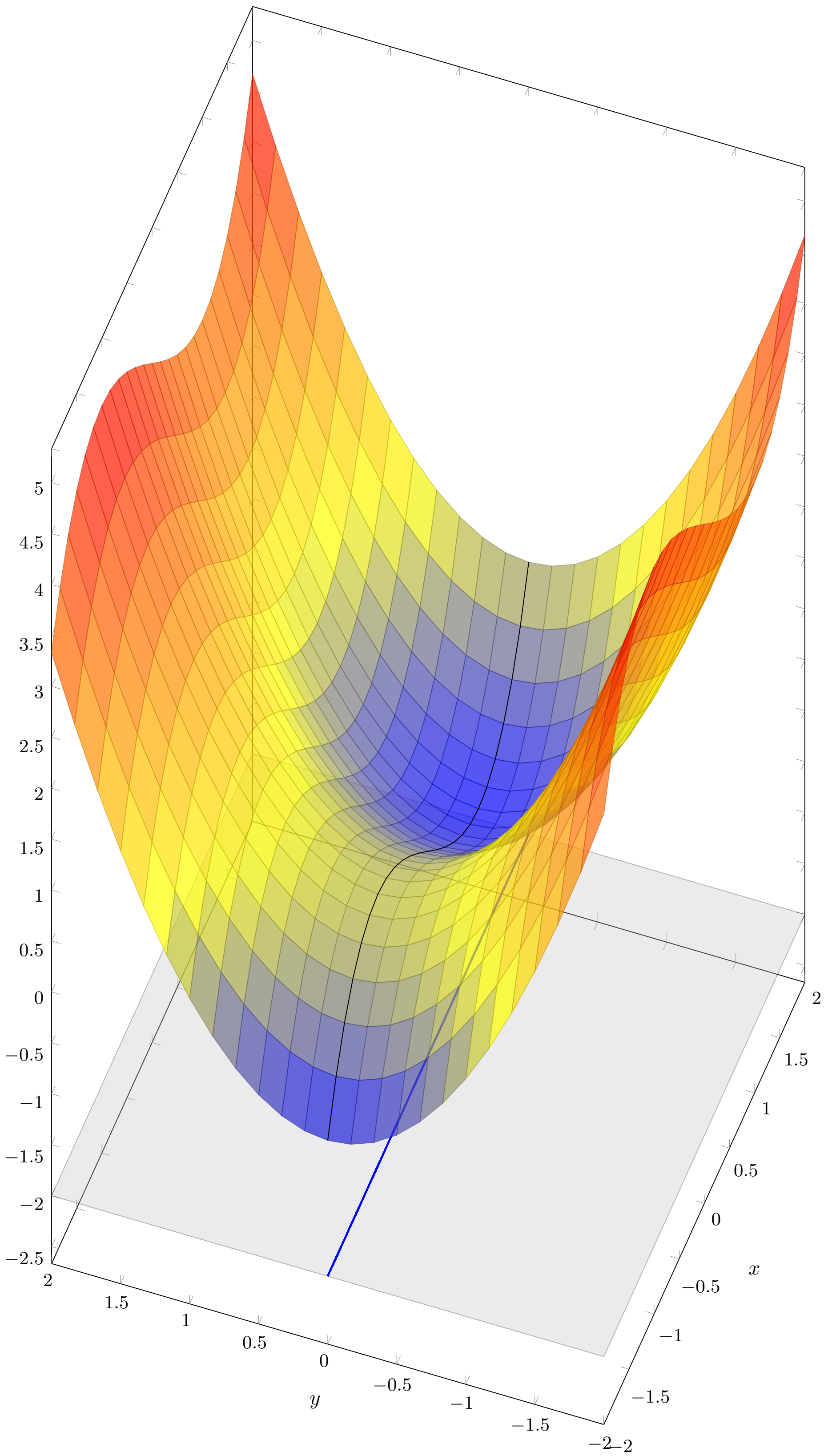
$\nabla^2_{\mathbf{x}} L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$x^* = -1, y^* = 1, \lambda^* = -2$

$\nabla^2_{\mathbf{x}} L\left(-1, 1, -2\right) =$

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ **a** $g(x,y) = y = 0$

$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$



$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ **a** $g(x, y) = y = 0$

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 \text{ za podmínky } g(x, y) = y = 0$$

$$L(x, y, \lambda) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 + \lambda\,(y)$$

$\nabla L(x^*, y^*, \lambda^*) = 0 \Leftrightarrow$

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ za podmínky $g(x,y) = y = 0$

$\nabla_{\mathbf{x}} L(x,y,\lambda) = (x^2 - 1, 2y + \lambda)$

$\nabla^2_{\mathbf{x}} L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$x^* = 1, y^* = 0, \lambda^* = 0$

$\nabla^2_{\mathbf{x}} L\,(1,0,0) =$

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ za podmínky $g(x,y) = y = 0$

$\nabla_{\mathbf{x}} L(x,y,\lambda) = (x^2 - 1, 2y + \lambda)$

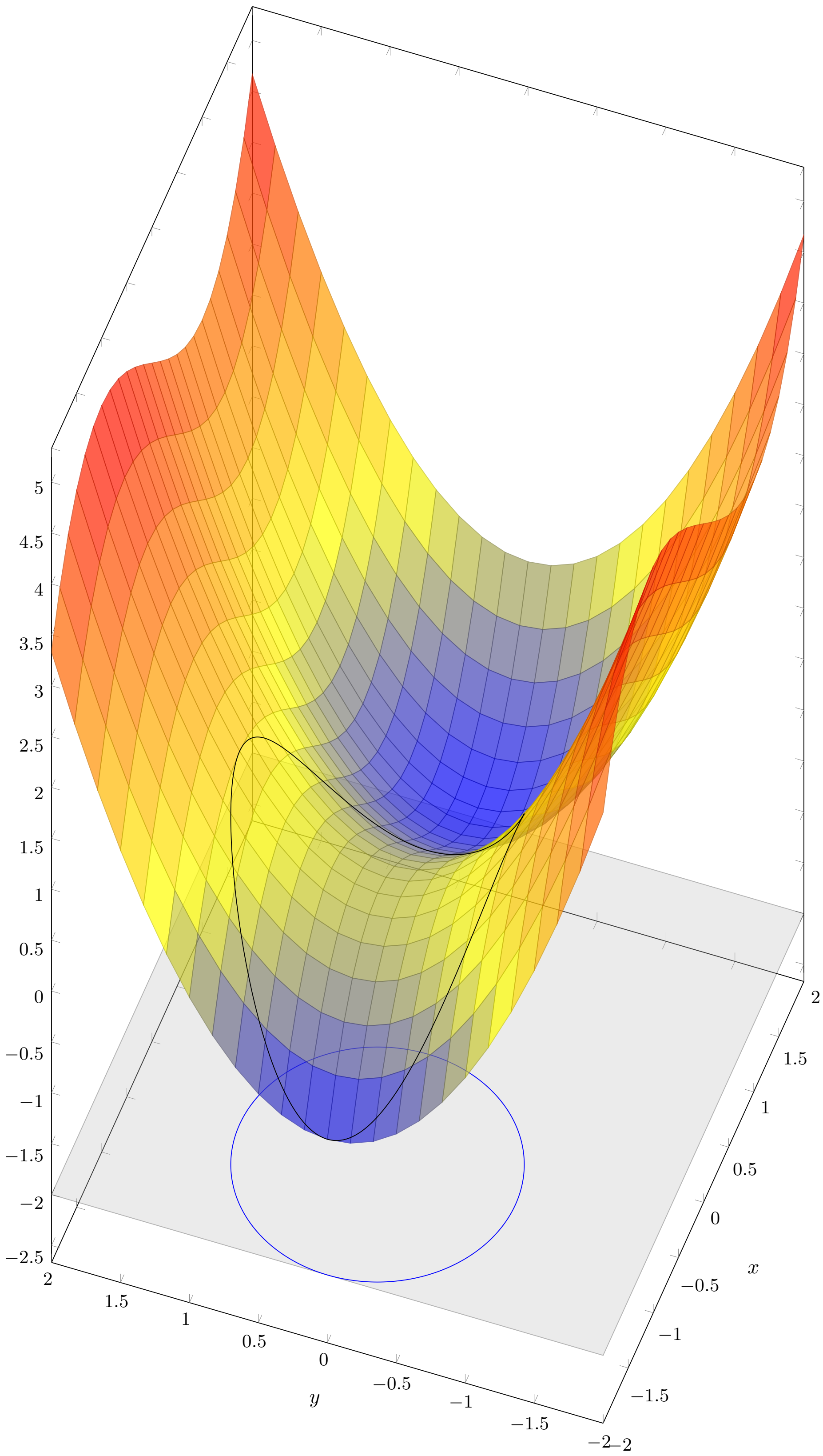
$\nabla^2_{\mathbf{x}} L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$x^* = -1, y^* = 0, \lambda^* = 0$

$\nabla^2_{\mathbf{x}} L\,(-1,0,0) =$

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ **a** $g(x,y) = x^2 + 2x + y^2 = 0$

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$



$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ **a** $g(x,y) = x^2 + 2x + y^2 = 0$

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ za podmínky $g(x,y) = x^2 + 2x + y^2 = 0$

$L(x,y,\lambda) =$

$\nabla L(x^*, y^*, \lambda^*) = 0 \Leftrightarrow$

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ za podmínky $g(x,y) = x^2 + 2x + y^2 = 0$

$\nabla_{\mathbf{x}} L(x,y,\lambda) = (x^2 - 1 + 2\lambda x + 2\lambda, 2y + 2\lambda y)$

Kritické body: $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right), \left(-2, 0, \frac{3}{2}\right), (-1, 1, -1), (-1, -1, -1)$

$\nabla^2_{\mathbf{x}} L(x,y,\lambda) =$

$\nabla^2_{\mathbf{x}} L\left(0, 0, \frac{1}{2}\right) =$

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ za podmínky $g(x,y) = x^2 + 2x + y^2 = 0$

Kritické body: $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right), \left(-2, 0, \frac{3}{2}\right), (-1, 1, -1), (-1, -1, -1)$

$\nabla^2_{\mathbf{x}} L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2x + 2\lambda & 0 \\ 0 & 2 + 2\lambda \end{pmatrix}$

$\nabla^2_{\mathbf{x}} L\left(-2, 0, \frac{3}{2}\right) =$

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ za podmínky $g(x,y) = x^2 + 2x + y^2 = 0$

Kritické body: $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right), \left(-2, 0, \frac{3}{2}\right), (-1, 1, -1), (-1, -1, -1)$

$\nabla^2_{\mathbf{x}} L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2x + 2\lambda & 0 \\ 0 & 2 + 2\lambda \end{pmatrix}$

$\nabla^2_{\mathbf{x}} L(-1, 1, -1) =$

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ za podmínky $g(x,y) = x^2 + 2x + y^2 = 0$

Kritické body: $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right), \left(-2, 0, \frac{3}{2}\right), (-1, 1, -1), (-1, -1, -1)$

$\nabla^2_{\mathbf{x}} L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2x + 2\lambda & 0 \\ 0 & 2 + 2\lambda \end{pmatrix}$

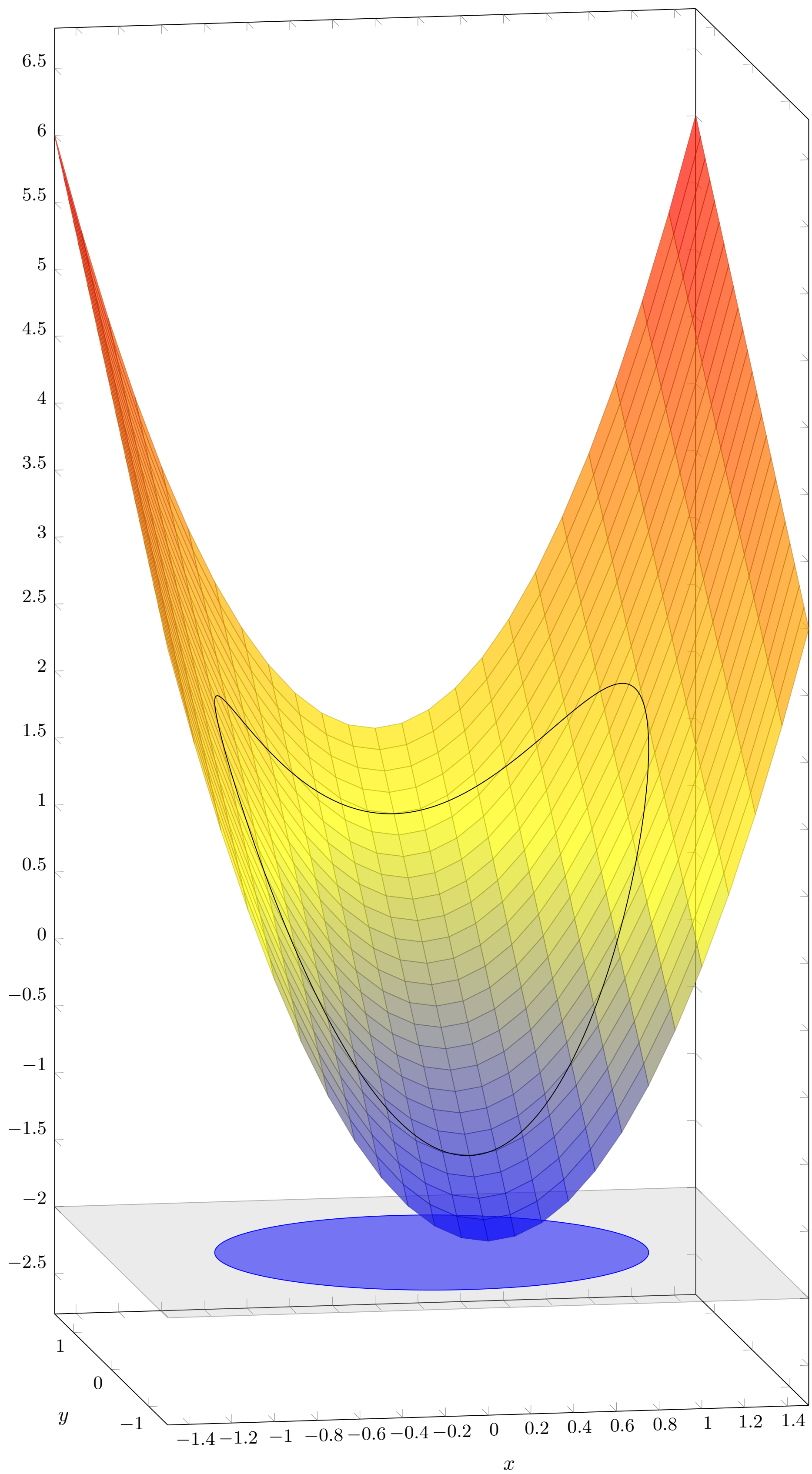
$\nabla^2_{\mathbf{x}} L(-1, -1, -1) =$

Základní cvičení 11.1

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = 2x^2 + y$ za podmínky

$$h(x,y) = x^2 + y^2 \leq 1.$$

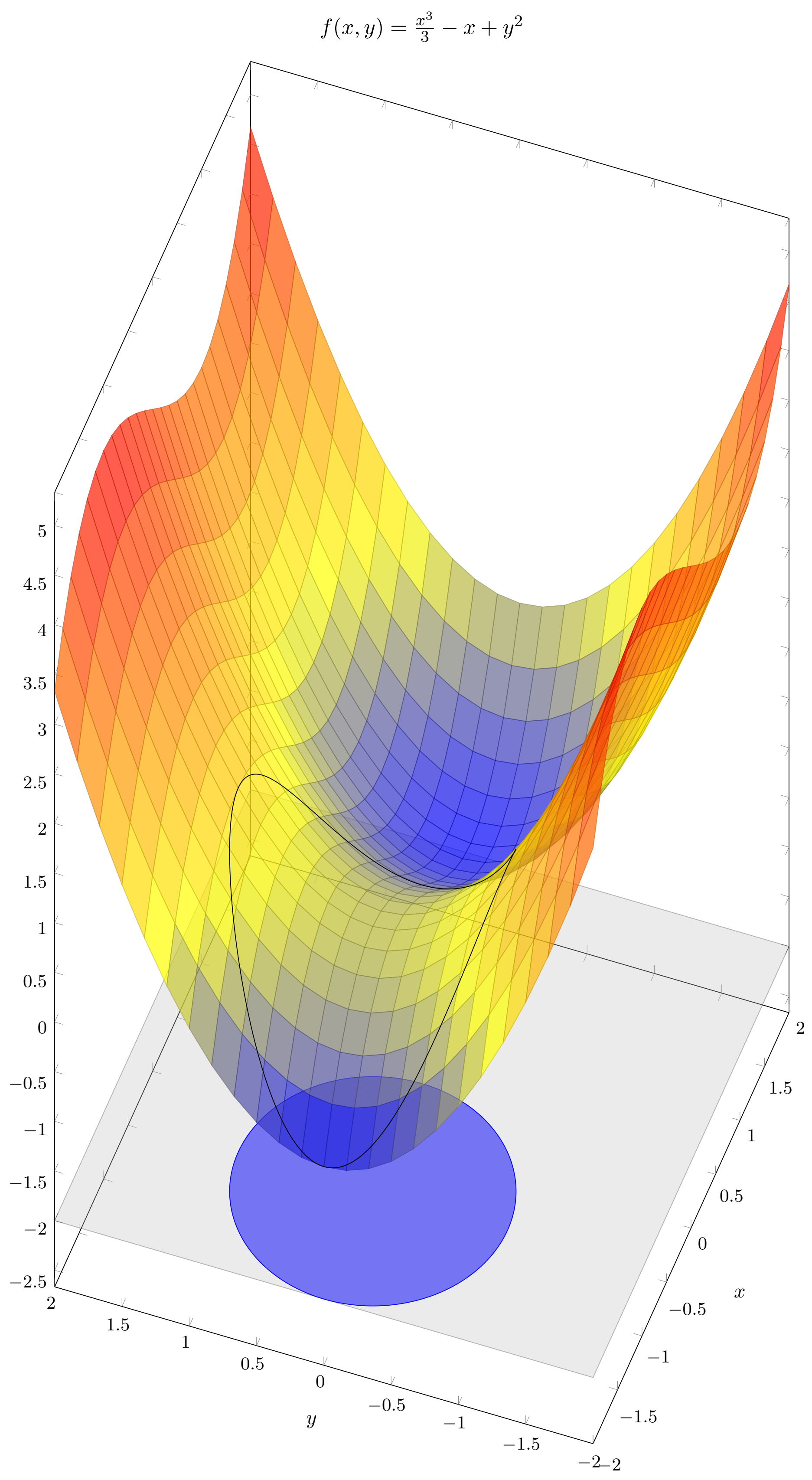
$f(x,y) = 2x^2 + y$ **a** $h(x,y) = x^2 + y^2 \leq 1$



Základní cvičení 11.2
Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ za podmínky

$$h(x,y) = x^2 + 2x + y^2 \leq 0.$$

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ **a** $h(x,y) = x^2 + 2x + y^2 \leq 0$



$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ **a** $h(x,y) = x^2 + 2x + y^2 \leq 0$

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ za podmínky $h(x,y) = x^2 + 2x + y^2 \leq 0$

Je třeba rozlišit, zda je vazba aktivní či ne.

1) nechť $h(x,y) = 0$ — vazba je aktivní — již máme kritické body pro úlohu s rovnostní vazbou $(x^*, y^*, \mu^*) \in \left\{ \left(0, 0, \frac{1}{2}\right), \left(-2, 0, \frac{3}{2}\right), (-1, 1, -1), (-1, -1, -1) \right\}$

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ za podmínky $h(x,y) = x^2 + 2x + y^2 \leq 0$

2) vazba není aktivní — řešíme bez ní a kontrolujeme náležitost do zbytku množiny přípustných řešení $\mathcal{M}$, tj. zde $h(x,y) < 0$, a nastavíme $\mu = 0$, abychom splnili podmínku 3. Věty **??**:

$\nabla_{\mathbf{x}} L(x,y,0) = \left(\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,0), \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,0) \right)^T = \nabla f(x,y) =$

$\nabla_{\mathbf{x}} L(x,y,0) = 0 \Leftrightarrow$

ChangeLog

Verze	Datum	Autor	Log
1.1	1.12.2020	ŠS	Oprava posledního slajdu, úpravy obrázků.
1.02	1.12.2020	ŠS	Link na doplňující video.
1.01	30.11.2020	ŠS	Úpravy pro širokou verzi.
1.0	18.11.2019	ŠS	Výchozí verze.