

# NI-MPI přednáška 4

Analýza: vázané extrémny – příklady

---

13. února 2025

FIT ČVUT

# Připomenutí: postup analytického hledání vázaných extrémů při rovnostních vazbách

Označme  $\hat{m} = \{1, \dots, m\}$  a  $\hat{p} = \{1, \dots, p\}$  ( $m, p \in \mathbb{N}$ ).

Úloha vázaného extrému (minima) je obecně následující úloha:

$$\begin{cases} \text{minimalizuj} & f(x), \\ \text{za podmínek} & g_j(x) = 0, \quad j \in \hat{m}, \\ & h_k(x) \leq 0, \quad k \in \hat{p}, \end{cases} \quad (2)$$

kde  $f, g_j, h_k$  jsou funkce  $D \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $D \subset \mathbb{R}^n$ .

Označme **množinu přípustných řešení**:

$$\mathcal{M} = \{x \in D : (\forall j \in \hat{m})(g_j(x) = 0) \wedge (\forall k \in \hat{p})(h_k(x) \leq 0)\}$$

Funkci  $L : \mathcal{M} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  definovanou

$$L(x; \lambda; \mu) = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x) + \sum_{k=1}^p \mu_k h_k(x)$$

nazýváme **Lagrangeovou funkcí** pro danou úlohu (2). Koeficienty

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \quad \text{a} \quad \mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)$$

nazýváme **Lagrangeovy multiplikátory**.

## Věta 7.9 (Postačující podmínka existence ostrého lokálního minima)

Nechť  $f, g_j, h_k$  pro  $j \in \hat{m}, k \in \hat{p}$  mají spojité všechny druhé parciální derivace na nějaké otevřené nadmnožině  $\tilde{\mathcal{M}} \supset \mathcal{M}$ . Pokud trojice  $(x^*; \lambda^*; \mu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$  splňuje podmínky:

- 1 (0. derivace)  $x^* \in \mathcal{M}$ ;
- 2 (1. derivace)  $\forall i, \frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*; \lambda^*; \mu^*) = 0$ ;
- 3 (aktivní a neaktivní vazby) Pro každé  $k \in \hat{p}$ ,  $\mu_k = 0$  nebo  $h_k(x^*) = 0$ ;
- 4 (2. derivace) pro každý vektor  $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$  splňující

$$v^T \cdot \nabla g_j(x^*) = 0, \quad \text{pro všechna } j \in \hat{m},$$

$$v^T \cdot \nabla h_k(x^*) = 0, \quad \text{pro všechna } k \in \hat{p}, \mu_k^* \neq 0, \text{ platí}$$

$$v^T \cdot \nabla_x^2 L(x^*; \lambda^*; \mu^*) \cdot v > 0,$$

kde  $\nabla_x^2 L$  je Hessova matice funkce  $L$  vzhledem k proměnným  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ;

- 5 (správný „směr“ od hranice  $\mathcal{M}$ )  $\mu_k \geq 0$ , pro každé  $k \in \hat{p}$ .

Potom je  $x^*$  bodem ostrého lokálního minima úlohy (2).

### Základní cvičení 10.3

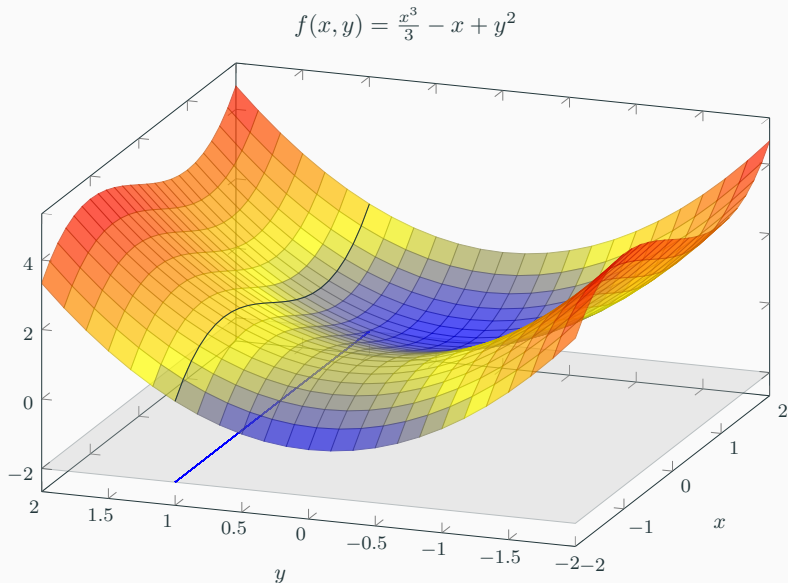
Najděte lokální extrémy funkce  $f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$  za podmínky

a)  $g(x, y) = y - 1 = 0$ ;

b)  $g(x, y) = y = 0$ ;

c)  $g(x, y) = x^2 + 2x + y^2 = 0$ .

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 \quad \mathbf{a} \quad g(x, y) = y - 1 = 0$$



$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 \quad \mathbf{a} \quad g(x, y) = y - 1 = 0 \quad \mathbf{i}$$

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 \text{ za podmínky } g(x, y) = y - 1 = 0$$

(Lze dosadit!)

Obecný postup pro rovnostní vazby:

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 \quad \mathbf{a} \quad g(x, y) = y - 1 = 0 \quad \mathbf{ii}$$

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 \text{ za podmínky } g(x, y) = y - 1 = 0$$

$$L(x, y, \lambda) =$$

$$\nabla L(x^*, y^*, \lambda^*) = 0 \Leftrightarrow$$



$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 \quad \mathbf{a} \quad g(x, y) = y - 1 = 0 \quad \mathbf{iii}$$

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 \quad \text{za podmínky } g(x, y) = y - 1 = 0$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(x, y, \lambda) = (x^2 - 1, 2y + \lambda)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 L(x, y, \lambda) =$$

$$x^* = 1, y^* = 1, \lambda^* = -2$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 L(1, 1, -2) =$$

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 \quad \mathbf{a} \quad g(x, y) = y - 1 = 0 \quad \mathbf{iv}$$

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 \text{ za podmínky } g(x, y) = y - 1 = 0$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(x, y, \lambda) = (x^2 - 1, 2y + \lambda)$$

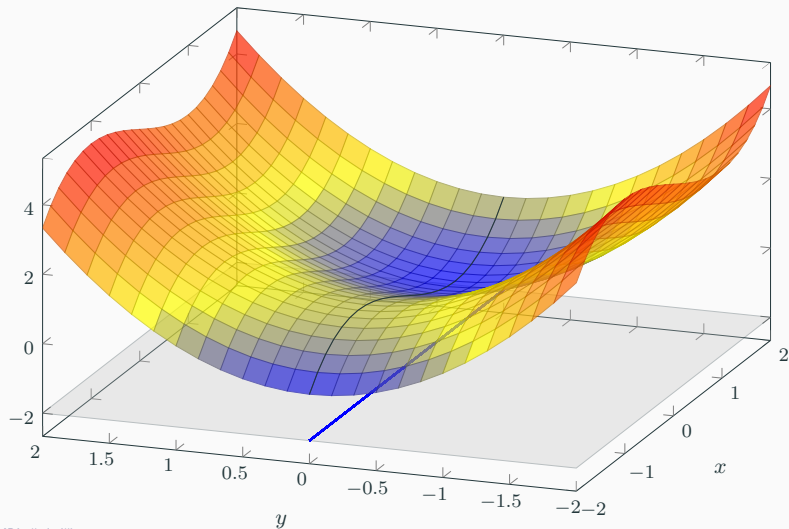
$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x^* = -1, y^* = 1, \lambda^* = -2$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 L(-1, 1, -2) =$$

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 \quad \mathbf{a} \quad g(x, y) = y = 0$$

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$$



$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 \quad \mathbf{a} \quad g(x, y) = y = 0 \quad \mathbf{i}$$

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 \text{ za podmínky } g(x, y) = y = 0$$

$$L(x, y, \lambda) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 + \lambda(y)$$

$$\nabla L(x^*, y^*, \lambda^*) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 \quad \mathbf{a} \quad g(x, y) = y = 0 \quad \mathbf{ii}$$

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 \text{ za podmínky } g(x, y) = y = 0$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(x, y, \lambda) = (x^2 - 1, 2y + \lambda)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x^* = 1, y^* = 0, \lambda^* = 0$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 L(1, 0, 0) =$$

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 \quad \mathbf{a} \quad g(x, y) = y = 0 \quad \mathbf{iii}$$

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 \text{ za podmínky } g(x, y) = y = 0$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(x, y, \lambda) = (x^2 - 1, 2y + \lambda)$$

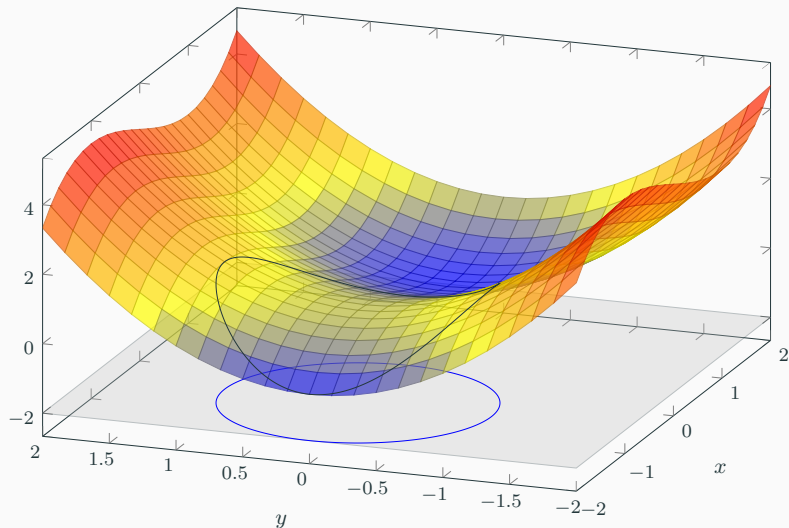
$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x^* = -1, y^* = 0, \lambda^* = 0$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 L(-1, 0, 0) =$$

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 \quad \mathbf{a} \quad g(x, y) = x^2 + 2x + y^2 = 0$$

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$$



$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 \quad \mathbf{a} \quad g(x, y) = x^2 + 2x + y^2 = 0 \quad \mathbf{i}$$

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 \text{ za podmínky } g(x, y) = x^2 + 2x + y^2 = 0$$

$$L(x, y, \lambda) =$$

$$\nabla L(x^*, y^*, \lambda^*) = 0 \Leftrightarrow$$



$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 \quad \mathbf{a} \quad g(x, y) = x^2 + 2x + y^2 = 0 \quad \mathbf{ii}$$

---

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 \quad \mathbf{a} \quad g(x, y) = x^2 + 2x + y^2 = 0 \quad \mathbf{iii}$$

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 \quad \text{za podmínky} \quad g(x, y) = x^2 + 2x + y^2 = 0$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(x, y, \lambda) = (x^2 - 1 + 2\lambda x + 2\lambda, 2y + 2\lambda y)$$

$$\text{Kritické body: } (0, 0, \frac{1}{2}), (-2, 0, \frac{3}{2}), (-1, 1, -1), (-1, -1, -1)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 L(x, y, \lambda) =$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 L(0, 0, \frac{1}{2}) =$$

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 \quad \mathbf{a} \quad g(x, y) = x^2 + 2x + y^2 = 0 \quad \mathbf{iv}$$

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 \quad \text{za podmínky} \quad g(x, y) = x^2 + 2x + y^2 = 0$$

Kritické body:  $(0, 0, \frac{1}{2})$ ,  $(-2, 0, \frac{3}{2})$ ,  $(-1, 1, -1)$ ,  $(-1, -1, -1)$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 2x + 2\lambda & 0 \\ 0 & 2 + 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 L(-2, 0, \frac{3}{2}) =$$

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 \quad \mathbf{a} \quad g(x, y) = x^2 + 2x + y^2 = 0 \quad \mathbf{v}$$

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 \quad \text{za podmínky} \quad g(x, y) = x^2 + 2x + y^2 = 0$$

Kritické body:  $(0, 0, \frac{1}{2})$ ,  $(-2, 0, \frac{3}{2})$ ,  $(-1, 1, -1)$ ,  $(-1, -1, -1)$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 2x + 2\lambda & 0 \\ 0 & 2 + 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 L(-1, 1, -1) =$$

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 \quad \mathbf{a} \quad g(x, y) = x^2 + 2x + y^2 = 0 \quad \mathbf{vi}$$

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 \quad \text{za podmínky} \quad g(x, y) = x^2 + 2x + y^2 = 0$$

Kritické body:  $(0, 0, \frac{1}{2})$ ,  $(-2, 0, \frac{3}{2})$ ,  $(-1, 1, -1)$ ,  $(-1, -1, -1)$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 2x + 2\lambda & 0 \\ 0 & 2 + 2\lambda \end{pmatrix}$$

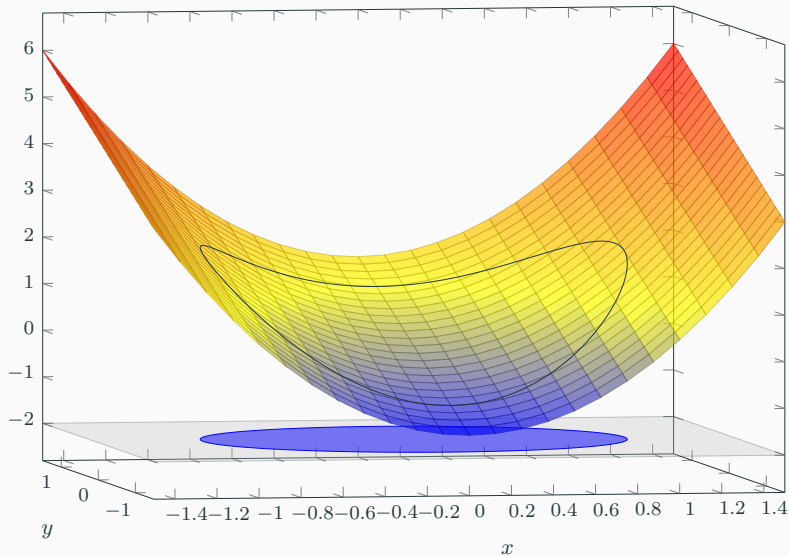
$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 L(-1, -1, -1) =$$

## Základní cvičení 11.1

Najděte lokální extrémů funkce  $f(x, y) = 2x^2 + y$  za podmínky

$$h(x, y) = x^2 + y^2 \leq 1.$$

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 \quad \mathbf{a} \quad h(x, y) = x^2 + y^2 \leq 1$$



## Základní cvičení 11.2

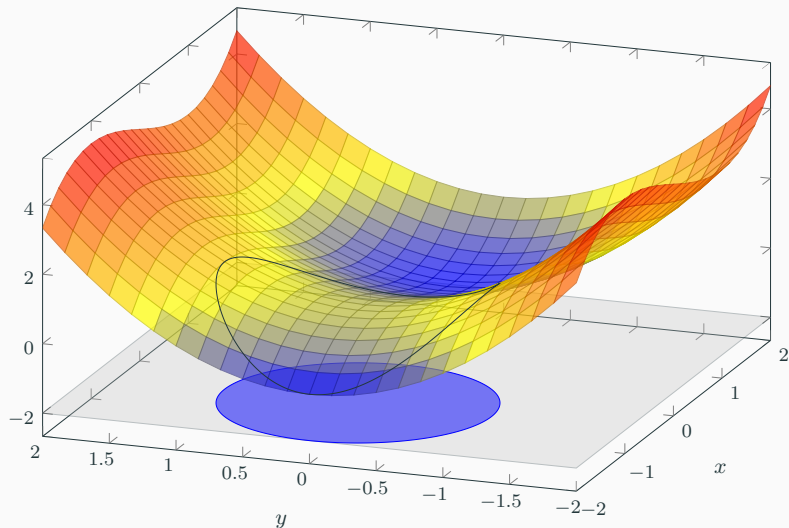
Najděte lokální extrémů funkce  $f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$  za podmínky

$$h(x, y) = x^2 + 2x + y^2 \leq 0.$$



$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 \quad \mathbf{a} \quad h(x, y) = x^2 + 2x + y^2 \leq 0$$

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$$



$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 \quad \mathbf{a} \quad h(x, y) = x^2 + 2x + y^2 \leq 0 \quad \mathbf{i}$$

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 \text{ za podmínky } h(x, y) = x^2 + 2x + y^2 \leq 0$$

Je třeba rozlišit, zda je vazba aktivní či ne.

1) necht'  $h(x, y) = 0$  — vazba je aktivní — již máme kritické body pro úlohu s rovnostní vazbou

$$(x^*, y^*, \mu^*) \in \left\{ \left(0, 0, \frac{1}{2}\right), \left(-2, 0, \frac{3}{2}\right), (-1, 1, -1), (-1, -1, -1) \right\}$$

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 \quad \mathbf{a} \quad h(x, y) = x^2 + 2x + y^2 \leq 0 \quad \mathbf{ii}$$

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 \quad \text{za podmínky} \quad h(x, y) = x^2 + 2x + y^2 \leq 0$$

2) vazba není aktivní — řešíme bez ní a kontrolujeme náležitost do zbytku množiny přípustných řešení  $\mathcal{M}$ , tj. zde  $h(x, y) < 0$ , a nastavíme  $\mu = 0$ , abychom splnili podmínku 3. Věty 7.9:

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(x, y, 0) = \left( \frac{\partial L}{\partial x}(x, y, 0), \frac{\partial L}{\partial y}(x, y, 0) \right)^T = \nabla f(x, y) =$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(x, y, 0) = 0 \Leftrightarrow$$