NI-MPI přednáška 4

Analýza: vázané extrémy – příklady

13. února 2025

FIT ČVUT

Připomenutí: postup analytického hledání vázaných extrémů při rovnostních vazbách

Označme $\hat{m} = \{1, \ldots, m\}$ a $\hat{p} = \{1, \ldots, p\}$ $(m, p \in \mathbb{N})$.

Připomenutí: postup analytického hledání vázaných extrémů při rovnostních vazbách

Označme $\hat{m} = \{1, \ldots, m\}$ a $\hat{p} = \{1, \ldots, p\}$ $(m, p \in \mathbb{N})$.

Úloha vázaného extrému (minima) je obecně následující úloha:

$$\begin{cases} \text{minimalizuj} & f(x), \\ \text{za podmínek} & g_j(x) = 0, \ j \in \hat{m}, \\ & h_k(x) \leq 0, \ k \in \hat{p}, \end{cases} \tag{2}$$

kde f, g_j, h_k jsou funkce $D \to \mathbb{R}$, kde $D \subset \mathbb{R}^n$.

Označme **množinu přípustných řešení:**

$$\mathcal{M} = \{x \in D \colon (\forall j \in \hat{m})(g_j(x) = 0) \ \wedge \ (\forall k \in \hat{p})(h_k(x) \leq 0)\}$$

Označme **množinu přípustných řešení:**

$$\mathcal{M} = \{x \in D \colon (\forall j \in \hat{m})(g_j(x) = 0) \;\wedge\; (\forall k \in \hat{p})(h_k(x) \leq 0)\}$$

Funkci $L : \mathcal{M} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ definovanou

$$L(x; \lambda; \mu) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x) + \sum_{k=1}^{p} \mu_k h_k(x)$$

nazýváme **Lagrangeovou funkcí** pro danou úlohu (2). Koeficienty

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \quad \text{a} \quad \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_p)$$

nazýváme **Lagrangeovy multiplikátory**.

Věta 7.9 (Postačující podmínka existence ostrého lokálního minima)

Nechť f, g_j, h_k pro $j \in \hat{m}, k \in \hat{p}$ mají spojité všechny druhé parciální derivace na nějaké otevřené nadmnožině $\tilde{\mathcal{M}} \supset \mathcal{M}$. Pokud trojice $(x^*; \lambda^*; \mu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ splňuje podmínky:

Potom je x^* bodem ostrého lokálního minima úlohy (2).

Věta 7.9 (Postačující podmínka existence ostrého lokálního minima)

Nechť f, g_j, h_k pro $j \in \hat{m}, k \in \hat{p}$ mají spojité všechny druhé parciální derivace na nějaké otevřené nadmnožině $\tilde{\mathcal{M}} \supset \mathcal{M}$. Pokud trojice $(x^*; \lambda^*; \mu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ splňuje podmínky:

1. *(0. derivace) $x^* \in \mathcal{M}$;*

Potom je x^* bodem ostrého lokálního minima úlohy (2).

Věta 7.9 (Postačující podmínka existence ostrého lokálního minima)

Nechť f, g_j, h_k *pro* $j \in \hat{m}, k \in \hat{p}$ *mají spojité všechny druhé parciální derivace na nějaké otevřené nadmnožině* $\tilde{\mathcal{M}} \supset \mathcal{M}$*. Pokud trojice* $(x^*; \lambda^*; \mu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ *splňuje podmínky:*

1. *(0. derivace)* $x^* \in \mathcal{M}$;
2. *(1. derivace)* $\forall i, \frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*; \lambda^*; \mu^*) = 0$;

Potom je x^* *bodem ostrého lokálního minima úlohy* (2).

Věta 7.9 (Postačující podmínka existence ostrého lokálního minima)

Nechť f, g_j, h_k pro $j \in \hat{m}, k \in \hat{p}$ mají spojité všechny druhé parciální derivace na nějaké otevřené nadmnožině $\tilde{\mathcal{M}} \supset \mathcal{M}$. Pokud trojice $(x^*; \lambda^*; \mu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ splňuje podmínky:

1. *(0. derivace) $x^* \in \mathcal{M}$;*
2. *(1. derivace) $\forall i, \frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*; \lambda^*; \mu^*) = 0$;*
3. *(aktivní a neaktivní vazby) Pro každé $k \in \hat{p}$, $\mu_k = 0$ nebo $h_k(x^*) = 0$;*

Potom je x^* bodem ostrého lokálního minima úlohy (2).

Věta 7.9 (Postačující podmínka existence ostrého lokálního minima)

Nechť f, g_j, h_k pro $j \in \hat{m}, k \in \hat{p}$ mají spojité všechny druhé parciální derivace na nějaké otevřené nadmnožině $\tilde{\mathcal{M}} \supset \mathcal{M}$. Pokud trojice $(x^*; \lambda^*; \mu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ splňuje podmínky:

1. *(0. derivace) $x^* \in \mathcal{M}$;*
2. *(1. derivace) $\forall i, \frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*; \lambda^*; \mu^*) = 0$;*
3. *(aktivní a neaktivní vazby) Pro každé $k \in \hat{p}$, $\mu_k = 0$ nebo $h_k(x^*) = 0$;*
4. *(2. derivace) pro každý vektor $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ splňující*

$$v^T \cdot \nabla g_j(x^*) = 0, \quad \textit{pro všechna } j \in \hat{m},$$
$$v^T \cdot \nabla h_k(x^*) = 0, \quad \textit{pro všechna } k \in \hat{p}, \mu_k^* \neq 0, \ \textit{platí}$$

$$v^T \cdot \nabla_x^2 L(x^*; \lambda^*; \mu^*) \cdot v > 0,$$

kde $\nabla_x^2 L$ je Hessova matice funkce L vzhledem k proměnným $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$;

Potom je x^* bodem ostrého lokálního minima úlohy (2).

Věta 7.9 (Postačující podmínka existence ostrého lokálního minima)

Nechť f, g_j, h_k pro $j \in \hat{m}, k \in \hat{p}$ mají spojité všechny druhé parciální derivace na nějaké otevřené nadmnožině $\tilde{\mathcal{M}} \supset \mathcal{M}$. Pokud trojice $(x^*; \lambda^*; \mu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ splňuje podmínky:

1. *(0. derivace) $x^* \in \mathcal{M}$;*
2. *(1. derivace) $\forall i, \frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*; \lambda^*; \mu^*) = 0$;*
3. *(aktivní a neaktivní vazby) Pro každé $k \in \hat{p}$, $\mu_k = 0$ nebo $h_k(x^*) = 0$;*
4. *(2. derivace) pro každý vektor $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ splňující*

$$v^T \cdot \nabla g_j(x^*) = 0, \quad \text{pro všechna } j \in \hat{m},$$
$$v^T \cdot \nabla h_k(x^*) = 0, \quad \text{pro všechna } k \in \hat{p}, \mu_k^* \neq 0, \text{ platí}$$

$$v^T \cdot \nabla_x^2 L(x^*; \lambda^*; \mu^*) \cdot v > 0,$$

   kde $\nabla_x^2 L$ je Hessova matice funkce L vzhledem k proměnným $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$;
5. *(správný „směr“ od hranice $\mathcal{M}$) $\mu_k \geq 0$, pro každé $k \in \hat{p}$.*

Potom je x^* bodem ostrého lokálního minima úlohy (2).

Základní cvičení 10.3

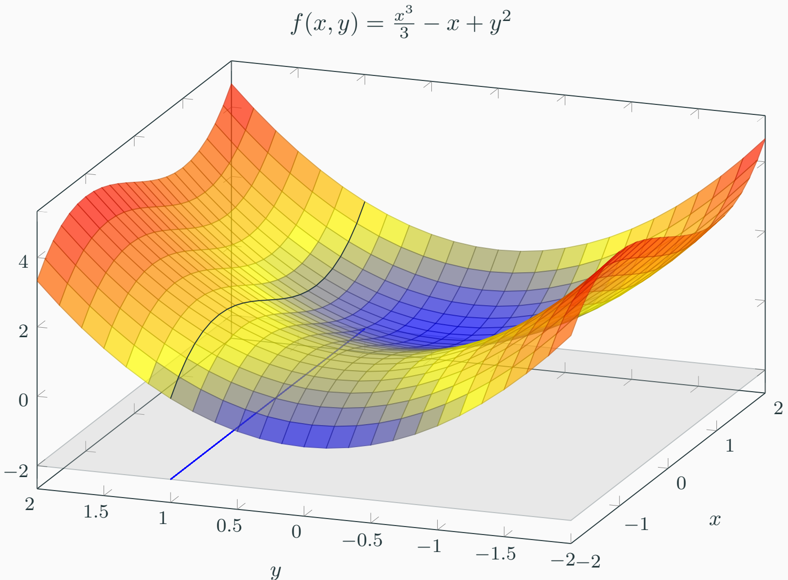
Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ za podmínky

a) $g(x, y) = y - 1 = 0$;

b) $g(x, y) = y = 0$;

c) $g(x, y) = x^2 + 2x + y^2 = 0$.

$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ a $g(x, y) = y - 1 = 0$



$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ **a** $g(x,y) = y - 1 = 0$ **i**

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ za podmínky $g(x,y) = y - 1 = 0$

(Lze dosadit!)

Obecný postup pro rovnostní vazby:

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ a $g(x,y) = y - 1 = 0$ ii

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ za podmínky $g(x,y) = y - 1 = 0$

$L(x,y,\lambda) =$

$\nabla L(x^*, y^*, \lambda^*) = 0 \Leftrightarrow$

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ a $g(x,y) = y - 1 = 0$ iii

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ za podmínky $g(x,y) = y - 1 = 0$

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(x,y,\lambda) = \left(x^2 - 1, 2y + \lambda\right)$$

$$\nabla^2_{\mathbf{x}} L(x,y,\lambda) =$$

$$x^* = 1, y^* = 1, \lambda^* = -2$$

$$\nabla^2_{\mathbf{x}} L\left(1,1,-2\right) =$$

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ a $g(x,y) = y - 1 = 0$ iv

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ za podmínky $g(x,y) = y - 1 = 0$

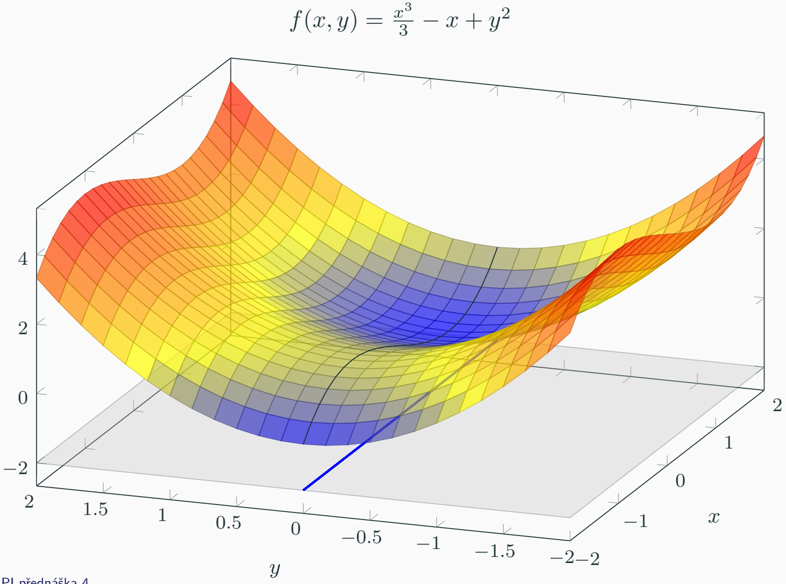
$$\nabla_{\mathbf{x}} L(x,y,\lambda) = \left(x^2 - 1, 2y + \lambda\right)$$

$$\nabla^2_{\mathbf{x}} L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x^* = -1, y^* = 1, \lambda^* = -2$$

$$\nabla^2_{\mathbf{x}} L\left(-1, 1, -2\right) =$$

$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ a $g(x, y) = y = 0$



$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ a $g(x,y) = y = 0$ i

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ za podmínky $g(x,y) = y = 0$

$L(x,y,\lambda) = \frac{x^3}{3} - x + y^2 + \lambda\,(y)$

$\nabla L(x^*, y^*, \lambda^*) = 0 \Leftrightarrow$

$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ a $g(x, y) = y = 0$ ii

$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ za podmínky $g(x, y) = y = 0$

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(x, y, \lambda) = \left(x^2 - 1, 2y + \lambda\right)$$

$$\nabla^2_{\mathbf{x}} L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x^* = 1, y^* = 0, \lambda^* = 0$$

$$\nabla^2_{\mathbf{x}} L\,(1, 0, 0) =$$

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ a $g(x,y) = y = 0$ iii

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ za podmínky $g(x,y) = y = 0$

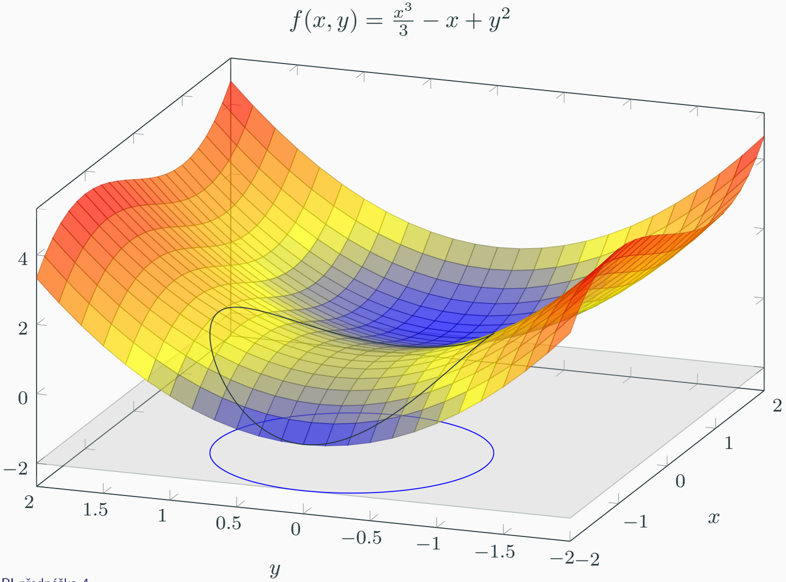
$$\nabla_{\mathbf{x}} L(x,y,\lambda) = \left(x^2 - 1, 2y + \lambda\right)$$

$$\nabla^2_{\mathbf{x}} L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x^* = -1, y^* = 0, \lambda^* = 0$$

$$\nabla^2_{\mathbf{x}} L\left(-1,0,0\right) =$$

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ a $g(x,y) = x^2 + 2x + y^2 = 0$



$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ **a** $g(x,y) = x^2 + 2x + y^2 = 0$ **i**

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ za podmínky $g(x,y) = x^2 + 2x + y^2 = 0$

$L(x,y,\lambda) =$

$\nabla L(x^*, y^*, \lambda^*) = 0 \Leftrightarrow$

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ a $g(x,y) = x^2 + 2x + y^2 = 0$ ii

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ a $g(x,y) = x^2 + 2x + y^2 = 0$ iii

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ za podmínky $g(x,y) = x^2 + 2x + y^2 = 0$

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(x,y,\lambda) = \left(x^2 - 1 + 2\lambda x + 2\lambda, 2y + 2\lambda y\right)$$

Kritické body: $\left(0,0,\frac{1}{2}\right), \left(-2,0,\frac{3}{2}\right), (-1,1,-1), (-1,-1,-1)$

$$\nabla^2_{\mathbf{x}} L(x,y,\lambda) =$$

$$\nabla^2_{\mathbf{x}} L\left(0,0,\frac{1}{2}\right) =$$

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ a $g(x,y) = x^2 + 2x + y^2 = 0$ iv

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ za podmínky $g(x,y) = x^2 + 2x + y^2 = 0$

Kritické body: $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right), \left(-2, 0, \frac{3}{2}\right), (-1, 1, -1), (-1, -1, -1)$

$$\nabla^2_{\mathbf{x}} L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2x + 2\lambda & 0 \\ 0 & 2 + 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2_{\mathbf{x}} L\left(-2, 0, \tfrac{3}{2}\right) =$$

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ **a** $g(x,y) = x^2 + 2x + y^2 = 0$ **v**

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ za podmínky $g(x,y) = x^2 + 2x + y^2 = 0$

Kritické body: $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right), \left(-2, 0, \frac{3}{2}\right), \left(-1, 1, -1\right), \left(-1, -1, -1\right)$

$$\nabla^2_{\mathbf{x}} L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 2x + 2\lambda & 0 \\ 0 & 2 + 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2_{\mathbf{x}} L\left(-1, 1, -1\right) =$$

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ za podmínky $g(x,y) = x^2 + 2x + y^2 = 0$

Kritické body: $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right), \left(-2, 0, \frac{3}{2}\right), \left(-1, 1, -1\right), \left(-1, -1, -1\right)$

$$\nabla^2_{\mathbf{x}} L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2x + 2\lambda & 0 \\ 0 & 2 + 2\lambda \end{pmatrix}$$

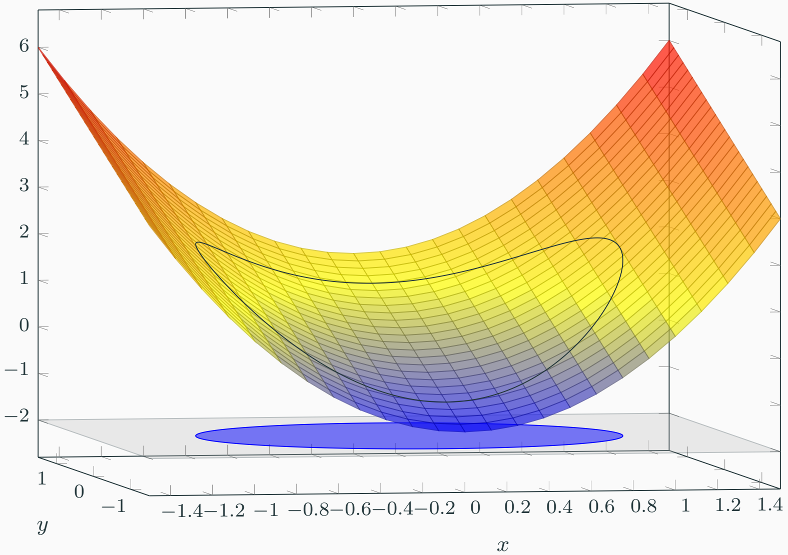
$$\nabla^2_{\mathbf{x}} L\left(-1, -1, -1\right) =$$

Základní cvičení 11.1

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = 2x^2 + y$ za podmínky

$$h(x, y) = x^2 + y^2 \leq 1.$$

$f(x, y) = 2x^2 + y$ **a** $h(x, y) = x^2 + y^2 \leq 1$

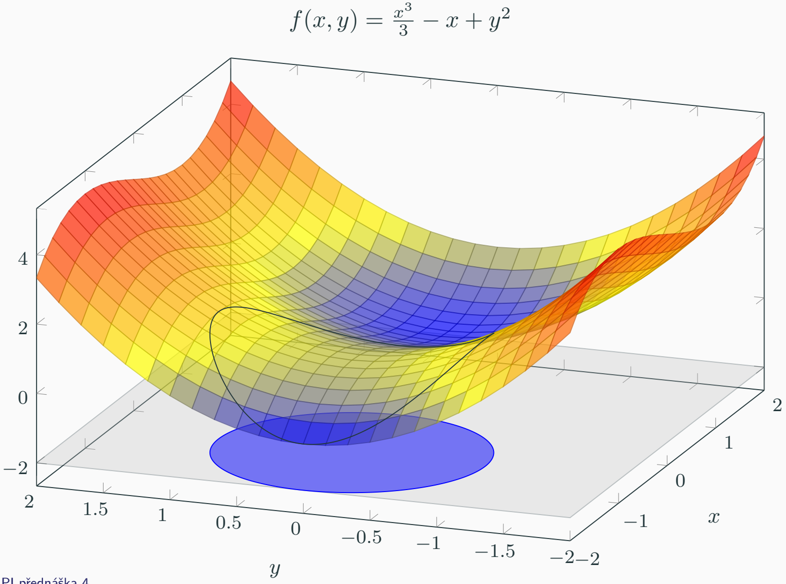


Základní cvičení 11.2

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ za podmínky

$$h(x,y) = x^2 + 2x + y^2 \leq 0.$$

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ a $h(x,y) = x^2 + 2x + y^2 \leq 0$



$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ a $h(x,y) = x^2 + 2x + y^2 \le 0$ i

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ za podmínky $h(x,y) = x^2 + 2x + y^2 \le 0$

Je třeba rozlišit, zda je vazba aktivní či ne.

1) nechť $h(x,y) = 0$ — vazba je aktivní — již máme kritické body pro úlohu s rovnostní vazbou

$(x^*, y^*, \mu^*) \in \left\{ \left(0, 0, \frac{1}{2}\right), \left(-2, 0, \frac{3}{2}\right), (-1, 1, -1), (-1, -1, -1) \right\}$

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} - x + y^2$ za podmínky $h(x,y) = x^2 + 2x + y^2 \leq 0$

2) vazba není aktivní — řešíme bez ní a kontrolujeme náležitost do zbytku množiny přípustných řešení $\mathcal{M}$, tj. zde $h(x,y) < 0$, a nastavíme $\mu = 0$, abychom splnili podmínku 3. Věty 7.9:

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(x,y,0) = \left(\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,0), \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,0)\right)^T = \nabla f(x,y) =$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} L(x,y,0) = 0 \Leftrightarrow$$