NI-MPI přednáška 5

Analýza IV: integrace

13. února 2025

FIT ČVUT

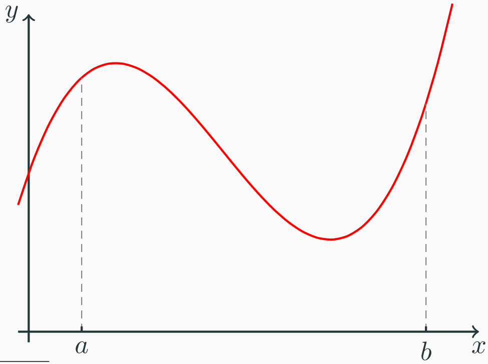
8. Připomenutí: integrace funkce 1 proměnné
   - Darbouxův/Riemannův integrál funkce jedné proměnné

9. Vícerozměrný integrál
   - Funkce 2 proměnných
     - Obdélníková oblast
     - Obecná oblast
     - Aplikace
   - Funkce více proměnných

(Určitý) integrál

Integrál je nástroj pro výpočet obsahu „pod grafem“[1] nějaké funkce. Tuto úlohu lze najít v mnoha dalších úlohách:

- objem těles, hledání těžiště, hledání průměrné hodnoty, hledání střední hodnoty náhodné veličiny, hledání pravděpodobnosti (integrace hustoty pravděpodobnosti), …

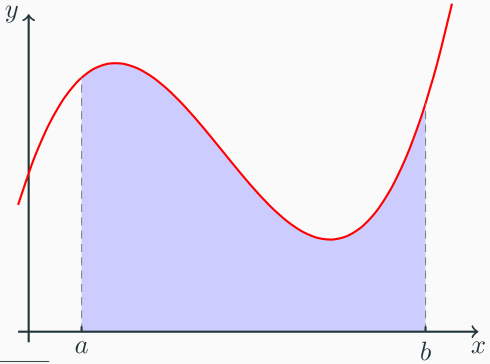


[1] Přesněji mezi grafem, osou parametru a kolmicemi na osu parametrů, které procházejí okraji intervalu, přes který integrál počítáme.

(Určitý) integrál

Integrál je nástroj pro výpočet obsahu „pod grafem“[1] nějaké funkce. Tuto úlohu lze najít v mnoha dalších úlohách:

- objem těles, hledání těžiště, hledání průměrné hodnoty, hledání střední hodnoty náhodné veličiny, hledání pravděpodobnosti (integrace hustoty pravděpodobnosti), ...



[1] Přesněji mezi grafem, osou parametru a kolmicemi na osu parametrů, které procházejí okraji intervalu, přes který integrál počítáme.

Konstrukce integrálu – postup

Úkol: spočítejte obsah funkce pod grafem funkce $f(x)$ na uzavřeném intervalu $[a, b]$

- Hlavní myšlenka konstrukce je aproximace plochy pod křivkou pomocí obdélníků:

Konstrukce integrálu – postup

Úkol: spočítejte obsah funkce pod grafem funkce $f(x)$ na uzavřeném intervalu $[a, b]$

- Hlavní myšlenka konstrukce je aproximace plochy pod křivkou pomocí obdélníků:
    - interval rozdělíme na malé kousky (tzv. rozdělení intervalu),

Konstrukce integrálu – postup

Úkol: spočítejte obsah funkce pod grafem funkce $f(x)$ na uzavřeném intervalu $[a, b]$

- Hlavní myšlenka konstrukce je aproximace plochy pod křivkou pomocí obdélníků:
  - interval rozdělíme na malé kousky (tzv. rozdělení intervalu),
  - na těchto kouscích aproximujeme funkci $f(x)$ vhodně zvolenými konstantními funkcemi (dostaneme takzvané *stupňovité* funkce),

Konstrukce integrálu – postup

Úkol: spočítejte obsah funkce pod grafem funkce $f(x)$ na uzavřeném intervalu $[a, b]$

- Hlavní myšlenka konstrukce je aproximace plochy pod křivkou pomocí obdélníků:
  - interval rozdělíme na malé kousky (tzv. rozdělení intervalu),
  - na těchto kouscích aproximujeme funkci $f(x)$ vhodně zvolenými konstantními funkcemi (dostaneme takzvané *stupňovité* funkce),
  - obsah pod grafem stupňovité funkce je součet obsahu obdélníků, a tedy snadno spočítatelná veličina.

Konstrukce integrálu – postup

Úkol: spočítejte obsah funkce pod grafem funkce $f(x)$ na uzavřeném intervalu $[a, b]$

- Hlavní myšlenka konstrukce je aproximace plochy pod křivkou pomocí obdélníků:
  - interval rozdělíme na malé kousky (tzv. rozdělení intervalu),
  - na těchto kouscích aproximujeme funkci $f(x)$ vhodně zvolenými konstantními funkcemi (dostaneme takzvané *stupňovité* funkce),
  - obsah pod grafem stupňovité funkce je součet obsahu obdélníků, a tedy snadno spočítatelná veličina.
- Zjemňujeme rozdělení a tím získáváme přesnější a přesnější aproximace hledaného obsahu.

Konstrukce integrálu – postup

Úkol: spočítejte obsah funkce pod grafem funkce $f(x)$ na uzavřeném intervalu $[a, b]$

- Hlavní myšlenka konstrukce je aproximace plochy pod křivkou pomocí obdélníků:
  - interval rozdělíme na malé kousky (tzv. rozdělení intervalu),
  - na těchto kouscích aproximujeme funkci $f(x)$ vhodně zvolenými konstantními funkcemi (dostaneme takzvané *stupňovité* funkce),
  - obsah pod grafem stupňovité funkce je součet obsahu obdélníků, a tedy snadno spočítatelná veličina.
- Zjemňujeme rozdělení a tím získáváme přesnější a přesnější aproximace hledaného obsahu.
- Přesnou hodnotu získáme tak, že v limitě „pošleme" šířku výše uvedených malých kousků k nule.

Rozdělení intervalu $[a, b]$

Definice 8.1

Buď dán interval $[a, b]$. Konečnou množinu

$$\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

takovou, že

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

nazýváme **rozdělením intervalu** $[a, b]$. Bodům x_k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, říkáme **dělící body intervalu** $[a, b]$. Číslo

$$\nu(\sigma) = \max\{\Delta_k \colon k = 1, 2, \ldots, n\}, \quad \text{kde } \Delta_k = x_k - x_{k-1},\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

nazýváme **normou rozdělení** σ.

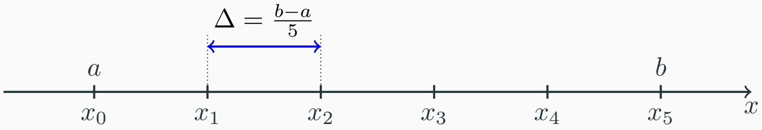
Ekvidistantní rozdělení

Příklad 8.2 (Ekvidistantní rozdělení)
Pro interval $[a, b]$ a kladné celé n položme $\Delta = \frac{b-a}{n}$ a

$$x_i = a + i \cdot \Delta, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Tedy

$$\sigma = \{a,\, a + \Delta,\, a + 2\Delta, \ldots,\, a + (n-1)\Delta,\, a + n\Delta = b\}.$$



Definice 8.3

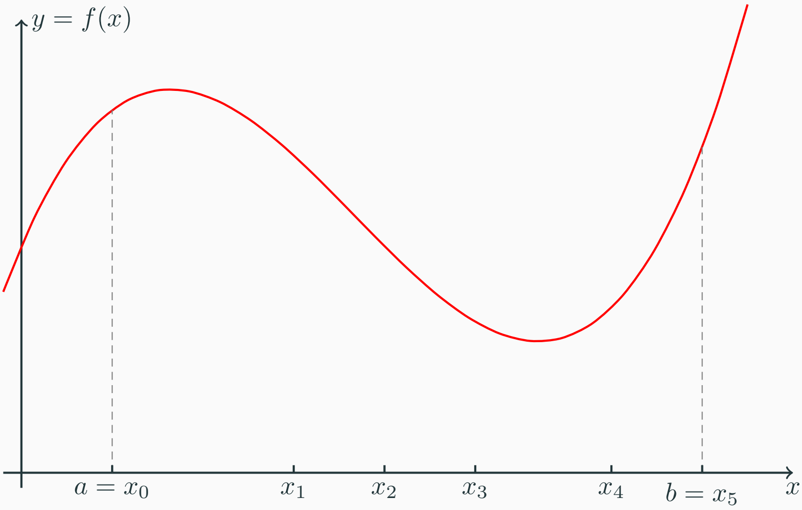
Nechť funkce f je definovaná na intervalu $[a, b]$ a $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ je rozdělení tohoto intervalu. Označme

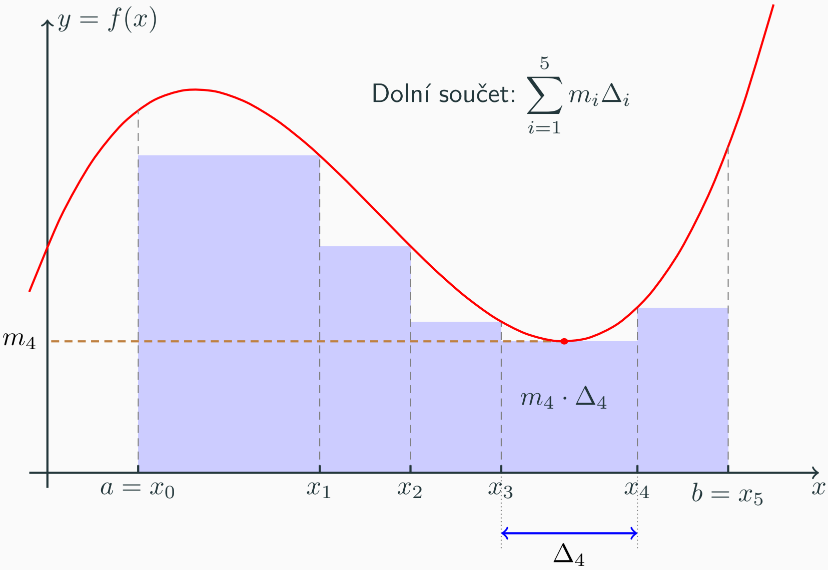
$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{a} \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

pro každé $i = 1, 2, \dots, n$. Potom

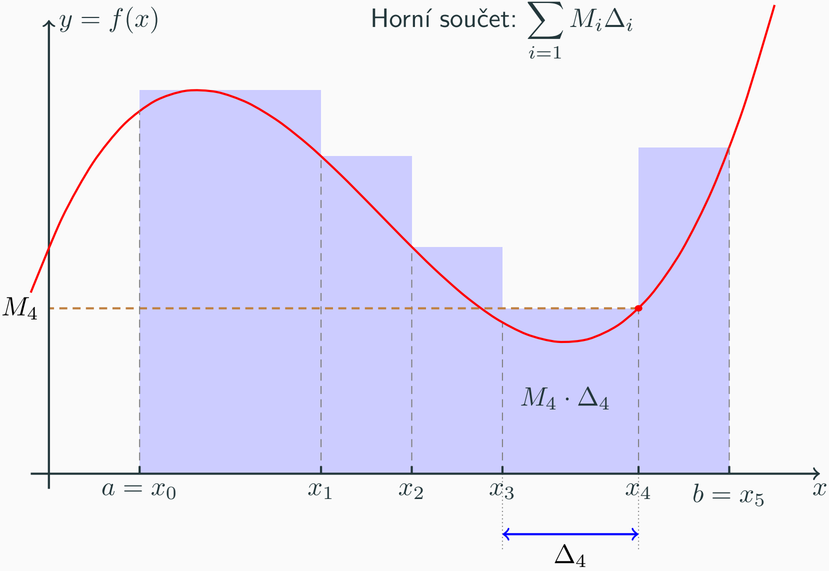
$$S_f(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i \quad \text{a} \quad s_f(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i$$

nazýváme **horním**, resp. **dolním**, **(Darbouxovým) součtem funkce** f při rozdělení σ.


$y = f(x)$
$a = x_0$
x_1
x_2
x_3
x_4
$b = x_5$
x


$y = f(x)$
Dolní součet: $\sum_{i=1}^{5} m_i \Delta_i$
m_4
$m_4 \cdot \Delta_4$
$a = x_0$
x_1
x_2
x_3
x_4
$b = x_5$
x
Δ_4

Horní součet: $\sum_{i=1}^{5} M_i \Delta_i$



Definice Darbouxova intergrálu

Horní Darbouxův integrál (funkce f na $[a,b]$) je

$$D_f = \inf\left\{S_f(\sigma)\colon \sigma \text{ je rozdělení } [a,b]\right\}$$

a **dolní Darbouxův integrál (funkce f na $[a,b]$)** je

$$d_f = \sup\left\{s_f(\sigma)\colon \sigma \text{ je rozdělení } [a,b]\right\}.$$

Definice Darbouxova intergrálu

Horní Darbouxův integrál (funkce f na $[a,b]$) je

$$D_f = \inf\left\{S_f(\sigma) \colon \sigma \text{ je rozdělení } [a,b]\right\}$$

a **dolní Darbouxův integrál (funkce f na $[a,b]$)** je

$$d_f = \sup\left\{s_f(\sigma) \colon \sigma \text{ je rozdělení } [a,b]\right\}.$$

Pokud $D_f = d_f$, nazveme tuto hodnotu **Darbouxovým integrálem** funkce f na intervalu $[a,b]$ a značíme ji

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = D_f = d_f.$$

Říkáme, že f je **(Darbouxovsky) integrabilní** na $[a,b]$.

Jiné značení: $\int_a^b f$.

Posloupnost rozdělení σ_n nazveme **normální**, pokud pro její normy platí

$$\lim_{n\to\infty} \nu(\sigma_n) = 0.$$

Věta 8.4

Buď f spojitá na $[a, b]$. Potom existuje $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Je-li σ_n normální posloupnost rozdělení, potom

$$\lim_{n\to\infty} s_f(\sigma_n) \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} S_f(\sigma_n)$$

existují a jsou rovny $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Posloupnost rozdělení σ_n nazveme **normální**, pokud pro její normy platí

$$\lim_{n \to \infty} \nu(\sigma_n) = 0.$$

Věta 8.4

Buď f spojitá na $[a, b]$. Potom existuje $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Je-li σ_n normální posloupnost rozdělení, potom

$$\lim_{n \to \infty} s_f(\sigma_n) \quad \textit{a} \quad \lim_{n \to \infty} S_f(\sigma_n)$$

existují a jsou rovny $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Poznámka

Riemannův integrál je definovaný velice podobně, jen se použije jiná stupňovitá funkce. Ve výsledku je to ale jedno, Riemannova a Darbouxova definice je ekvivalentní. Darbouxova je o něco málo názornější, proto ji používáme.

Příklad 8.5

Vypočtěte integrál funkce $f(x) = x$ na intervalu $J = [0, 1]$.

Zvolme normální posloupnost (σ_n) ekvidistantních rozdělení intervalu J.

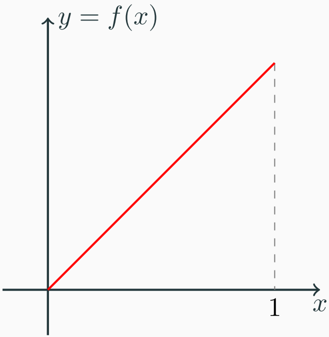
$$\sigma_n = \left\{0 = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)} = 1\right\}, \quad x_i^{(n)} = i \cdot \frac{1}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Pro dolní součet při rozdělení σ_n dostáváme

$$s_f(\sigma_n) = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^{(n)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

Protože f je spojitá, platí

$$\int_0^1 x \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} s_f(\sigma_n) = \frac{1}{2}.$$



Příklad 8.5
Vypočtěte integrál funkce $f(x) = x$ na intervalu $J = [0, 1]$.

Zvolme normální posloupnost (σ_n) ekvidistantních rozdělení intervalu J.

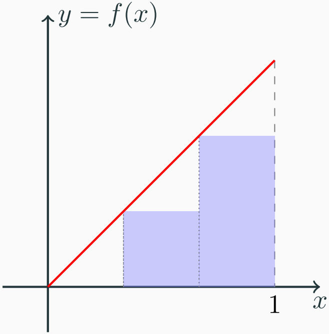
$$\sigma_n = \left\{0 = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)} = 1\right\}, \quad x_i^{(n)} = i \cdot \frac{1}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Pro dolní součet při rozdělení σ_n dostáváme

$$s_f(\sigma_n) = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^{(n)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

Protože f je spojitá, platí

$$\int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} s_f(\sigma_n) = \frac{1}{2}.$$



Příklad 8.5

Vypočtěte integrál funkce $f(x) = x$ na intervalu $J = [0, 1]$.

Zvolme normální posloupnost (σ_n) ekvidistantních rozdělení intervalu J.

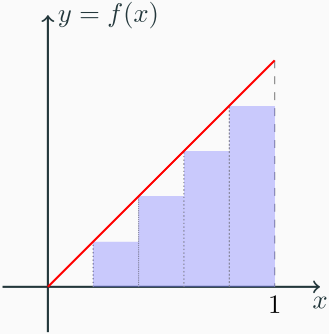
$$\sigma_n = \left\{0 = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)} = 1\right\}, \quad x_i^{(n)} = i \cdot \frac{1}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Pro dolní součet při rozdělení σ_n dostáváme

$$s_f(\sigma_n) = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^{(n)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

Protože f je spojitá, platí

$$\int_0^1 x \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} s_f(\sigma_n) = \frac{1}{2}.$$



Příklad 8.5
Vypočtěte integrál funkce $f(x) = x$ na intervalu $J = [0, 1]$.

Zvolme normální posloupnost (σ_n) ekvidistantních rozdělení intervalu J.

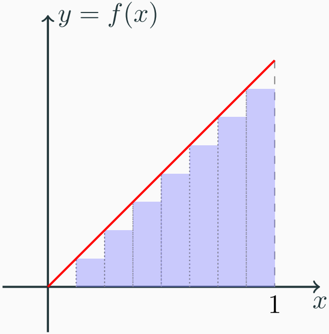
$$\sigma_n = \left\{0 = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)} = 1\right\}, \quad x_i^{(n)} = i \cdot \frac{1}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Pro dolní součet při rozdělení σ_n dostáváme

$$s_f(\sigma_n) = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^{(n)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

Protože f je spojitá, platí

$$\int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} s_f(\sigma_n) = \frac{1}{2}.$$



Příklad 8.5

Vypočtěte integrál funkce $f(x) = x$ na intervalu $J = [0,1]$.

Zvolme normální posloupnost (σ_n) ekvidistantních rozdělení intervalu J.

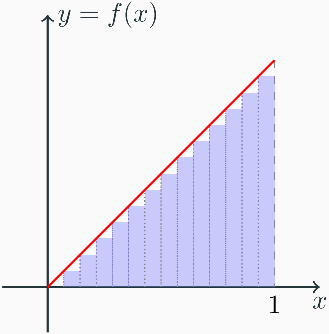
$$\sigma_n = \left\{0 = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)} = 1\right\}, \quad x_i^{(n)} = i \cdot \frac{1}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Pro dolní součet při rozdělení σ_n dostáváme

$$s_f(\sigma_n) = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^{(n)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

Protože f je spojitá, platí

$$\int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} s_f(\sigma_n) = \frac{1}{2}.$$



Vlastnosti Darbouxova/Riemannova integrálu

Věta 8.6 (Aditivita integrálu)

Nechť f a g jsou spojité funkce na intervalu $[a, b]$. Potom pro integrál funkce $f + g$ (která je také automaticky spojitá na $[a, b]$) platí

$$\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Věta 8.7 (Multiplikativita integrálu)

Nechť f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a $c \in \mathbb{R}$ je konstanta. Potom pro integrál funkce cf platí

$$\int_a^b (cf)(x)\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Primitivní funkce

Primitivní funkce (resp. neurčitý integrál) k funkci f je taková funkce F, pro kterou platí že $f = F'$. Hledání primitivní funkce je tedy něco jako inverzní proces k derivování.

Definice 8.8

Nechť funkce f je definována v intervalu (a, b), kde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Funkci F splňující podmínku

$$F'(x) = f(x) \text{ pro každé } x \in (a, b)$$

nazýváme **primitivní funkcí** k funkci f v intervalu (a, b).

Primitivní funkce elementárních funkcí

Ze znalosti derivací můžeme ihned sestavit tabulku primitivních funkcí:

vzorec	interval, parametry
$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$
$\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq -2$
$\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$x \in (0, +\infty)$, $\alpha \notin \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + C$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$x \in \mathbb{R}$, $a > 0$ a $a \neq 1$
$\int \sin(x) \mathrm{d}x = -\cos(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$

vzorec	interval, parametry
$\int \cos(x) \mathrm{d}x = \sin(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)} \mathrm{d}x = \mathrm{tg}(x) + C$	$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi \right),\ k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sin^2(x)} \mathrm{d}x = -\mathrm{cotg}(x) + C$	$x \in \left(k\pi,\ \pi + k\pi \right),\ k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin(x) + C$	$x \in (-1, 1)$
$\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \mathrm{arctg}(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$

Newtonova formule

Následující věta odhaluje vztah mezi určitým a neurčitým integrálem. Umožňuje nám počítat integrál bez explicitního použití definice s limitou.

Věta 8.9 (Newtonova formule)

Nechť f je funkce spojitá na intervalu $[a,b]$ s primitivní funkcí F na (a,b). Pak platí rovnost

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x).$$

Rozdíl na pravé straně má zaběhlé značení: $\Big[F(x)\Big]_a^b$.

Per partes pro určitý integrál

Věta 8.10

Nechť f a g jsou funkce spojité na $[a,b]$, f má spojitou derivaci na intervalu $[a,b]$ a nechť G je primitivní funkce k funkci g na intervalu $[a,b]$. Potom

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \big[f(x)G(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\mathrm{d}x.$$

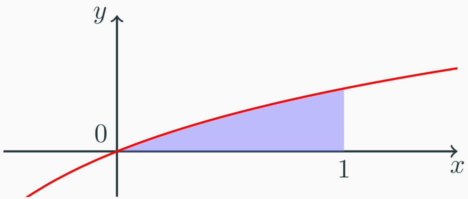
Příklad 8.11

Vypočtěte

$$\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x.$$

Derivujeme $\ln(1+x)$ a integrujeme 1,

$$\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x = \Big[x\ln(1+x)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\mathrm{d}x =$$
$$= \ln(2) - \Big[x - \ln|1+x|\Big]_0^1 = 2\ln(2) - 1.$$



Substituce v určitém integrálu

Zavádíme následující značení

- $\displaystyle\int_a^a f = 0,$
- pro $a > b$ klademe $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

Věta 8.12 (O substituci)

Nechť pro funkce f a φ platí

1. *φ a její derivace φ' jsou spojité na $[\alpha, \beta]$,*
2. *f je spojitá na $\varphi\big([\alpha, \beta]\big)$.*

Potom

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x.$$

Příklad 8.13
Vypočtěte integrál

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{2}+e^{-x}} \mathrm{d}x.$$

Použijeme substituci $y = \varphi(x) = \frac{1}{2} + e^{-x}$. Potom

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{2}+e^{-x}} \mathrm{d}x = -\int_{\frac{3}{2}}^{1} \frac{1}{y} \mathrm{d}y = \Big[\ln|y|\Big]_1^{\frac{3}{2}} = \ln\frac{3}{2}.$$

8. Připomenutí: integrace funkce 1 proměnné
   - Darbouxův/Riemannův integrál funkce jedné proměnné

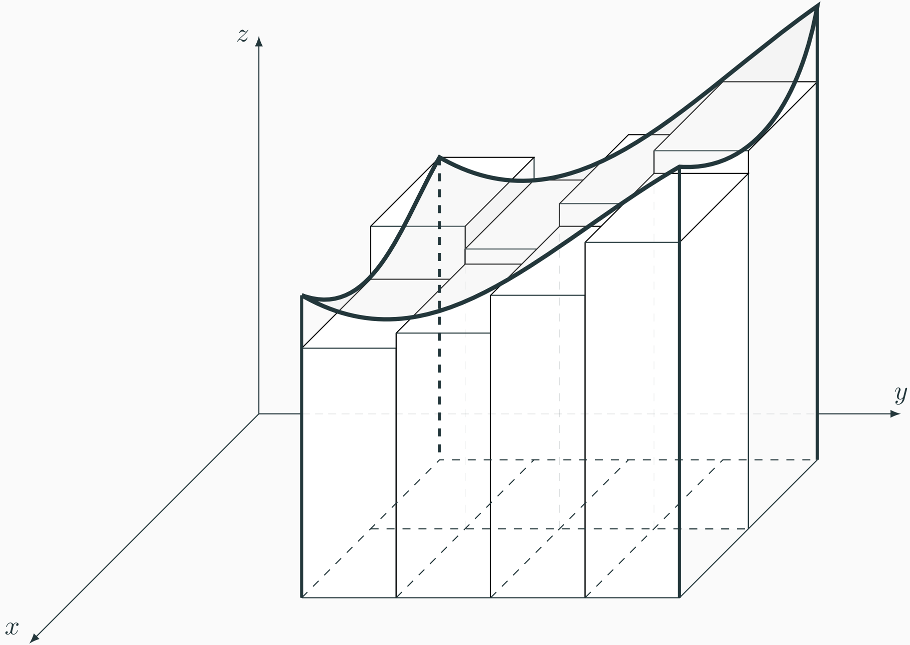
9. Vícerozměrný integrál
   - Funkce 2 proměnných
     - Obdélníková oblast
     - Obecná oblast
     - Aplikace
   - Funkce více proměnných

Funkce 2 proměnných

Mějme $f : D \to \mathbb{R}$, kde $D = [a, b] \times [c, d]$.

Graf této funkce si lze představit jako část povrchu nějakého předmětu.

Integrálem této funkce budeme počítat objem pod tímto grafem.


z
y
x

Definice

Nechť $\sigma_x = (x_i)_{i=0}^n$ je rozdělení $[a, b]$ a $\sigma_y = (y_j)_{j=0}^m$ rozdělení $[c, d]$.

$\sigma = \sigma_x \times \sigma_y$ je rozdělením $D = [a, b] \times [c, d]$.

Definice

Nechť $\sigma_x = (x_i)_{i=0}^n$ je rozdělení $[a, b]$ a $\sigma_y = (y_j)_{j=0}^m$ rozdělení $[c, d]$.

$\sigma = \sigma_x \times \sigma_y$ je rozdělením $D = [a, b] \times [c, d]$.

Označme $M_{i,j} = \sup \left\{ f(x, y) \colon (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \right\}$ a $m_{i,j} = \inf \left\{ f(x, y) \colon (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \right\}$.

Definice

Nechť $\sigma_x = (x_i)_{i=0}^n$ je rozdělení $[a, b]$ a $\sigma_y = (y_j)_{j=0}^m$ rozdělení $[c, d]$.

$\sigma = \sigma_x \times \sigma_y$ je rozdělením $D = [a, b] \times [c, d]$.

Označme $M_{i,j} = \sup \Big\{ f(x, y) \colon (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \Big\}$ a
$m_{i,j} = \inf \Big\{ f(x, y) \colon (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \Big\}$.

Horní Darbouxova suma f **vzhledem k rozdělení** σ je

$$S_f(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{i,j}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

a **dolní Darbouxova suma** f **vzhledem k rozdělení** σ je

$$s_f(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{i,j}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

Definice ...

Horní Darbouxův integrál (funkce f na D) je

$$D_f = \inf\left\{S_f(\sigma) \colon \sigma \text{ je rozdělení } D\right\}$$

a **dolní Darbouxův integrál (funkce f na D)** je

$$d_f = \sup\left\{s_f(\sigma) \colon \sigma \text{ je rozdělení } D\right\}.$$

Definice ...

Horní Darbouxův integrál (funkce f na D) je

$$D_f = \inf \left\{ S_f(\sigma) \colon \sigma \text{ je rozdělení } D \right\}$$

a **dolní Darbouxův integrál (funkce f na D)** je

$$d_f = \sup \left\{ s_f(\sigma) \colon \sigma \text{ je rozdělení } D \right\}.$$

Pokud $D_f = d_f$, tak tuto hodnotu nazýváme **(*dvojitým*) Darbouxovým integrálem** funkce f na D a značíme ji

$$\iint_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = D_f = d_f.$$

Zkrácené značení: $\iint_D f$, $\int_D f$, $\int_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$.

Řekneme, že f je **(Darbouxovsky) integrabilní** na D.

Poznámka

Definice je ekvivalentní s Riemannovou definicí.

Spojité funkce

Řekneme, že posloupnost rozdělení $\sigma_n = \sigma_{x,n} \times \sigma_{y,n}$ množiny D je **normální**, jsou-li $\sigma_{x,n}$ i $\sigma_{y,n}$ normální.

Analogicky k jednorozměrnému případu:

je-li f spojitá na D, pak integrál $\iint_D f$ existuje a je roven $\lim_{n\to\infty} s_f(\sigma_n)$ a $\lim_{n\to\infty} S_f(\sigma_n)$ pro libovolnou normální posloupnost rozdělení σ_n množiny D.

Výpočet dvojného integrálu nad obdélníkovou oblastí

Následující věta nám říká, jak převést problém výpočtu dvojného integrálu na dva jednodimenzionální podproblémy.

Věta 9.1

Buď $f(x,y)$ *integrabilní funkce na* $D = [a,b] \times [c,d]$. *Pokud existuje jeden z integrálů*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \qquad \textit{nebo} \qquad \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

potom je roven dvojnému integrálu

$$\iint_D f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Výpočet dvojného integrálu nad obdélníkovou oblastí

Následující věta nám říká, jak převést problém výpočtu dvojného integrálu na dva jednodimenzionální podproblémy.

Věta 9.1

Buď $f(x, y)$ integrabilní funkce na $D = [a, b] \times [c, d]$. Pokud existuje jeden z integrálů

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \qquad \textit{nebo} \qquad \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

potom je roven dvojnému integrálu

$$\iint_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Výpočet dvojného integrálu tedy můžeme provést tak, že funkci nejdříve zintegrujeme vzhledem k jedné proměnné a druhou považujeme za konstantu. Výsledek této integrace (získaný pomocí Newtonovy formule) potom již závisí pouze na jedné proměnné, vzhledem ke které provedeme druhou integraci.

Obecná oblast

Je-li D omezená podmnožina $\mathbb{R}^2$, pak definujeme Darbouxův integrál na D následovně:

Obecná oblast

Je-li D omezená podmnožina $\mathbb{R}^2$, pak definujeme Darbouxův integrál na D následovně:

Definice 9.2

Mějme $f : D \to \mathbb{R}$, kde $D \subset \widetilde{D} = [a, b] \times [c, d]$.

Obecná oblast

Je-li D omezená podmnožina $\mathbb{R}^2$, pak definujeme Darbouxův integrál na D následovně:

Definice 9.2

Mějme $f : D \to \mathbb{R}$, kde $D \subset \widetilde{D} = [a, b] \times [c, d]$.

Definujeme *dvojitý Darbouxův integrál* funkce f na D jako hodnotu

$$\iint_D f := \iint_{\widetilde{D}} \tilde{f},$$

Obecná oblast

Je-li D omezená podmnožina $\mathbb{R}^2$, pak definujeme Darbouxův integrál na D následovně:

Definice 9.2

Mějme $f : D \to \mathbb{R}$, kde $D \subset \widetilde{D} = [a, b] \times [c, d]$.

Definujeme *dvojitý Darbouxův integrál* funkce f na D jako hodnotu

$$\iint_D f := \iint_{\widetilde{D}} \tilde{f},$$

kde

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in D \\ 0 & \text{pro } x \in \widetilde{D} \setminus D, \end{cases}$$

pokud existuje.

Obecná oblast

Je-li D omezená podmnožina $\mathbb{R}^2$, pak definujeme Darbouxův integrál na D následovně:

Definice 9.2

Mějme $f : D \to \mathbb{R}$, kde $D \subset \widetilde{D} = [a, b] \times [c, d]$.

Definujeme *dvojitý Darbouxův integrál* funkce f na D jako hodnotu

$$\iint_D f := \iint_{\widetilde{D}} \tilde{f},$$

kde

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in D \\ 0 & \text{pro } x \in \widetilde{D} \setminus D, \end{cases}$$

pokud existuje.

Uvedená definice nezávisí na volbě obdélníka $\widetilde{D}$.

Množina míry nula

Definice 9.3

Řekneme, že množina $Z \subset \mathbb{R}^2$ má *míru nula* pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existují obdélníky $R_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$ pro $i = 1, \dots, n$ tak, že

$$Z \subset \bigcup_{i=1}^{n} R_i$$

Množina míry nula

Definice 9.3

Řekneme, že množina $Z \subset \mathbb{R}^2$ má *míru nula* pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existují obdélníky $R_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$ pro $i = 1, \ldots, n$ tak, že

$$Z \subset \bigcup_{i=1}^{n} R_i \qquad \text{a} \qquad \sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i||d_i - c_i| < \varepsilon.$$

Poznámka

- Množiny míry nula mají tu vlastnost, že jsou pro hodnotu integrálu „zanedbatelné“.

Poznámka

- Množiny míry nula mají tu vlastnost, že jsou pro hodnotu integrálu „zanedbatelné“.
- Graf spojité funkce $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ má míru nula.

Poznámka

- Množiny míry nula mají tu vlastnost, že jsou pro hodnotu integrálu „zanedbatelné“.
- Graf spojité funkce $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ má míru nula.
- Mluvíme-li o nějaké vlastnosti bodů množiny $M \subset \mathbb{R}^2$, řekneme, že platí *skoro všude* (*almost everywhere*), pokud množina, kde neplatí, má míru nula.

Poznámka

- Množiny míry nula mají tu vlastnost, že jsou pro hodnotu integrálu „zanedbatelné“.
- Graf spojité funkce $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ má míru nula.
- Mluvíme-li o nějaké vlastnosti bodů množiny $M \subset \mathbb{R}^2$, řekneme, že platí *skoro všude* (*almost everywhere*), pokud množina, kde neplatí, má míru nula.

Poznámka

- Množiny míry nula mají tu vlastnost, že jsou pro hodnotu integrálu „zanedbatelné“.
- Graf spojité funkce $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ má míru nula.
- Mluvíme-li o nějaké vlastnosti bodů množiny $M \subset \mathbb{R}^2$, řekneme, že platí *skoro všude* (*almost everywhere*), pokud množina, kde neplatí, má míru nula. Říkáme tak např., že funkce f a g jsou rovny skoro všude, pokud množina $\{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) \neq g(x)\}$ má míru nula.

Poznámka

- Množiny míry nula mají tu vlastnost, že jsou pro hodnotu integrálu „zanedbatelné“.
- Graf spojité funkce $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ má míru nula.
- Mluvíme-li o nějaké vlastnosti bodů množiny $M \subset \mathbb{R}^2$, řekneme, že platí *skoro všude* (*almost everywhere*), pokud množina, kde neplatí, má míru nula. Říkáme tak např., že funkce f a g jsou rovny skoro všude, pokud množina $\{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) \neq g(x)\}$ má míru nula.
- V pravděpodobnosti (např. v předmětu NI-VSM) se v obdobném kontextu používá termín *skoro jistě*.

Poznámka

- Množiny míry nula mají tu vlastnost, že jsou pro hodnotu integrálu „zanedbatelné“.
- Graf spojité funkce $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ má míru nula.
- Mluvíme-li o nějaké vlastnosti bodů množiny $M \subset \mathbb{R}^2$, řekneme, že platí *skoro všude* (*almost everywhere*), pokud množina, kde neplatí, má míru nula. Říkáme tak např., že funkce f a g jsou rovny skoro všude, pokud množina $\{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) \neq g(x)\}$ má míru nula.
- V pravděpodobnosti (např. v předmětu NI-VSM) se v obdobném kontextu používá termín *skoro jistě*.
- Množinu míry nula lze zavést analogicky i v obecném $\mathbb{R}^n$. Jak?

Věta 9.4

Omezená funkce $f : D \to \mathbb{R}$*, kde* $D = [a, b] \times [c, d]$*, je integrabilní, pokud množina* $\{x \in D : f$ *není spojitá v* $x\}$ *má míru nula.*

Věta 9.4

Omezená funkce $f : D \to \mathbb{R}$*, kde* $D = [a, b] \times [c, d]$*, je integrabilní, pokud množina* $\{x \in D : f$ *není spojitá v* $x\}$ *má míru nula. (Jinými slovy, pokud* f *je spojitá skoro všude na* D*.)*

Věta 9.4

Omezená funkce $f : D \to \mathbb{R}$, kde $D = [a, b] \times [c, d]$, je integrabilní, pokud množina $\{x \in D : f$ není spojitá v $x\}$ má míru nula. (Jinými slovy, pokud f je spojitá skoro všude na D.)

Připomeňme, že *hranice* množiny $D \subset \mathbb{R}^n$ je množina všech bodů $x \in \mathbb{R}^n$ takových, že každé okolí $H(x)$ má neprázdný průnik jak s D tak s $\mathbb{R}^n \setminus D$.

Věta 9.4

Omezená funkce $f : D \to \mathbb{R}$, kde $D = [a,b] \times [c,d]$, je integrabilní, pokud množina $\{x \in D : f \text{ není spojitá v } x\}$ má míru nula. (Jinými slovy, pokud f je spojitá skoro všude na D.)

Připomeňme, že *hranice* množiny $D \subset \mathbb{R}^n$ je množina všech bodů $x \in \mathbb{R}^n$ takových, že každé okolí $H(x)$ má neprázdný průnik jak s D tak s $\mathbb{R}^n \setminus D$.

Důsledek 9.5

Omezená spojitá funkce $f : D \to \mathbb{R}$ na omezené množině D mající hranici míry nula, je integrabilní.

Vlastnosti dvojného integrálu

- Pokud $D = D_1 \cup D_2$, kde D_1 i D_2 jsou uzavřené omezené množiny, $D_1 \cap D_2$ má míru nula a f je integrabilní na D, pak platí
$$\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f.$$

Vlastnosti dvojného integrálu

- Pokud $D = D_1 \cup D_2$, kde D_1 i D_2 jsou uzavřené omezené množiny, $D_1 \cap D_2$ má míru nula a f je integrabilní na D, pak platí
$$\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f.$$
- Platí-li pro (skoro) všechna $(x, y) \in D$ a pro integrabilní funkce f_1 a f_2, že $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$, potom
$$\iint_D f_1 \leq \iint_D f_2.$$

Vlastnosti dvojného integrálu

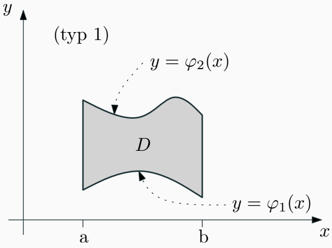
- Pokud $D = D_1 \cup D_2$, kde D_1 i D_2 jsou uzavřené omezené množiny, $D_1 \cap D_2$ má míru nula a f je integrabilní na D, pak platí
$$\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f.$$
- Platí-li pro (skoro) všechna $(x, y) \in D$ a pro integrabilní funkce f_1 a f_2, že $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$, potom
$$\iint_D f_1 \leq \iint_D f_2.$$
- Pro $c \in \mathbb{R}$ a integrabilní funkci f platí
$$\iint_D c \cdot f(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = c \cdot \iint_D f(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

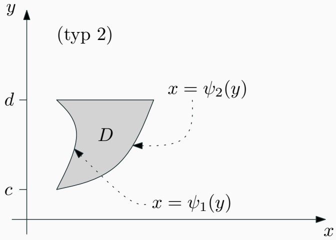
Oblasti s hranicí danou spojitými funkcemi

Jak integrál nad obecnou oblastí spočítat? (Jinak než z definice...)

Zatím jsme si ukázali, jak spočítat integrál funkce přes obdélníkovou oblast. Teď si ukážeme, jak integrovat i přes oblasti, které jsou vymezené spojitými funkcemi. Budeme uvažovat dva typy oblastí D:

- (typ 1) x je z intervalu $[a, b]$ a y je omezené spoj. funkcemi $\varphi_1(x)$ a $\varphi_2(x)$ splňujícími $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$,
- (typ 2) y je z intervalu $[c, d]$ a x je omezené spoj. funkcemi $\psi_1(y)$ a $\psi_2(y)$ splňujícími $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$.





Výpočet dvojného integrálu nad obecnou oblastí – myšlenka

Myšlenka:

- Pro oblast typu 1 zafixujme hodnotu x na x_0, nad vzniklým řezem oblasti D nám vznikne funkce $f(x_0, y)$ jedné proměnné y.
- Plocha nad tímto řezem závisí na x_0 a je rovna $p(x_0) = \int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y)\mathrm{d}y$.
- Nyní „posčítáme“ takto získané jednorozměrné plochy přes všechna x od a do b a dostaneme

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\underbrace{\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y}_{=p(x)} \right) \mathrm{d}x.$$

Výpočet dvojného integrálu nad obecnou oblastí

Věta 9.6

Pokud integrály (ve vzorcích níže) existují, platí pro oblast D, že

- *je-li D typu 1, máme*

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

- *je-li D typu 2, máme*

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Výpočet dvojného integrálu nad obecnou oblastí příklad

Příklad 9.7

Vypočítejte integrál $f(x,y) = xy$ nad oblastí D typu 1, kde $x \in [0,1]$ a y je sevřené funkcemi x^2 a x^3:

Výpočet dvojného integrálu nad obecnou oblastí příklad

Příklad 9.7

Vypočítejte integrál $f(x,y) = xy$ nad oblastí D typu 1, kde $x \in [0,1]$ a y je sevřené funkcemi x^2 a x^3:

$$\iint_D xy \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_{x^3}^{x^2} xy \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y=x^3}^{y=x^2} \right) \mathrm{d}x =$$

$$\int_0^1 \frac{xx^4 - xx^6}{2} \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{x^6}{6} - \frac{x^8}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{12} - \frac{1}{16} = \frac{1}{48} \, .$$

Aplikace (dvojného) integrálu

Pomocí dvojného integrálu můžeme spočítat několik užitečných čísel charakterizujících daný objem pod grafem funkce f nad oblastí D:

- průměr (jako objem lomeno povrch oblasti D):

$$\left(\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right) / \left(\iint_D 1 \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right).$$

Aplikace (dvojného) integrálu

Pomocí dvojného integrálu můžeme spočítat několik užitečných čísel charakterizujících daný objem pod grafem funkce f nad oblastí D:

- průměr (jako objem lomeno povrch oblasti D):

$$\left(\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right) / \left(\iint_D 1 \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right).$$

- těžiště desky D s proměnnou hustotou $\rho(x,y)$ má souřadnice $(\bar{x},\bar{y})$:

$$\bar{x} = \left(\iint_D x\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right) / \left(\iint_D \rho(x,y) \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right),$$
$$\bar{y} = \left(\iint_D y\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right) / \left(\iint_D \rho(x,y) \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right).$$

Aplikace (dvojného) integrálu

Pomocí dvojného integrálu můžeme spočítat několik užitečných čísel charakterizujících daný objem pod grafem funkce f nad oblastí D:

- průměr (jako objem lomeno povrch oblasti D):

$$\left(\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right) \Big/ \left(\iint_D 1 \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right).$$

- těžiště desky D s proměnnou hustotou $\rho(x,y)$ má souřadnice $(\bar{x},\bar{y})$:

$$\bar{x} = \left(\iint_D x\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right) \Big/ \left(\iint_D \rho(x,y) \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right),$$
$$\bar{y} = \left(\iint_D y\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right) \Big/ \left(\iint_D \rho(x,y) \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right).$$

- Povrch grafu $f(x,y)$ nad D je

$$\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Trojný integrál

Konstrukce trojného integrálu je naprosto analogická konstrukci integrálu dvojného, pouze obdélníčky Δ_{ij} jsou nahrazeny „kvádříčky" Δ_{ijk} a integrujeme funkci tří proměnných $f(x,y,z)$:

$$\iiint_D f(x,y,z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

Výpočet lze opět převést na tři výpočty jednorozměrného integrálu, např.

$$\int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x,y,z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z = \int_e^f \left(\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y,z) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z \, .$$

Existuje ovšem $3!$ možných pořadí integrování.

Konstrukce pro obecné funkce nad $\mathbb{R}^n$ probíhá zcela analogicky a platí analogická tvrzení. (Nicméně se pro definici v naprosté většině případů nepoužívá Darbouxova/Riemannova definice, ale jiná, např. Lebesgueova.)

Definice 9.8

Mějme $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\Psi(\mathbf{v}) = (\Psi_1(\mathbf{v}), \ldots, \Psi_n(\mathbf{v}))$. **Jacobiho matice** zobrazení Ψ je následující zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n,n}$ (pro $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$)

$$J_\Psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial v_1} & \ldots & \frac{\partial \Psi_1}{\partial v_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Psi_n}{\partial v_1} & \ldots & \frac{\partial \Psi_n}{\partial v_n} \end{pmatrix},$$

pokud všechny parciální derivace existují.

Definice 9.8

Mějme $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\Psi(\mathbf{v}) = (\Psi_1(\mathbf{v}), \dots, \Psi_n(\mathbf{v}))$. **Jacobiho matice** zobrazení Ψ je následující zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n,n}$ (pro $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$)

$$J_\Psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial \Psi_1}{\partial v_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Psi_n}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial \Psi_n}{\partial v_n} \end{pmatrix},$$

pokud všechny parciální derivace existují.

Jacobiho matice zobrzení Ψ má na řádcích složky gradientů jednotlivých složek Ψ. Toto se (s drobným zneužitím značením) zapíše takto:

$$J_\Psi = \begin{pmatrix} \nabla \Psi_1 \\ \vdots \\ \nabla \Psi_n \end{pmatrix}.$$

Věta 9.9 (Věta o substituci)

Nechť D *je omezená uzavřená množina na* $\mathbb{R}^n$. *Nechť* $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *má spojité všechny parciální derivace (všech složek) na nějaké otevřené nadmnožině množiny* D *a* skoro všude *na* D *platí, že*

1. Ψ *je bijekce a*
2. $\det J_\Psi$ *je nenulový.*

Potom pro každou spojitou funkci $f : D \to \mathbb{R}$ *platí*

$$\int_{\psi(D)} f(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_D f(\Psi(\mathbf{v})) \left|\det J_\Psi(\mathbf{v})\right| \mathrm{d}\mathbf{v}$$

kde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.