

# NI-MPI přednáška 5

## Analýza IV: integrace

---

13. února 2025

FIT ČVUT

## 8. Připomenutí: integrace funkce 1 proměnné

- Darbouxův/Riemannův integrál funkce jedné proměnné

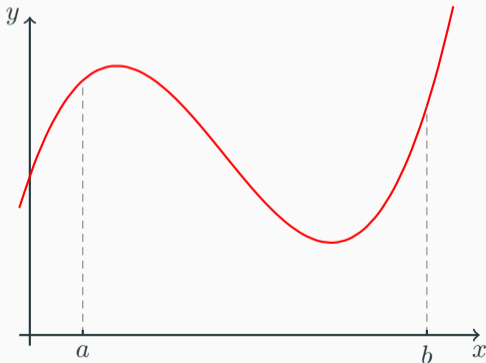
## 9. Vícerozměrný integrál

- Funkce 2 proměnných
  - Obdélníková oblast
  - Obecná oblast
  - Aplikace
- Funkce více proměnných

# (Určitý) integrál

Integrál je nástroj pro výpočet obsahu „pod grafem“<sup>1</sup> nějaké funkce. Tuto úlohu lze najít v mnoha dalších úlohách:

- objem těles, hledání těžiště, hledání průměrné hodnoty, hledání střední hodnoty náhodné veličiny, hledání pravděpodobnosti (integrace hustoty pravděpodobnosti), ...

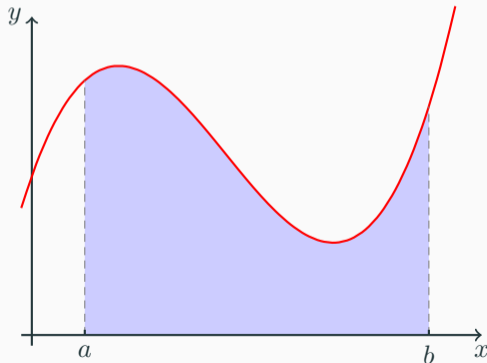


<sup>1</sup>Přesněji mezi grafem, osou parametru a kolmicemi na osu parametru, které procházejí okraji intervalu, přes který integrál

# (Určitý) integrál

Integrál je nástroj pro výpočet obsahu „pod grafem“<sup>1</sup> nějaké funkce. Tuto úlohu lze najít v mnoha dalších úlohách:

- objem těles, hledání těžiště, hledání průměrné hodnoty, hledání střední hodnoty náhodné veličiny, hledání pravděpodobnosti (integrace hustoty pravděpodobnosti), ...



<sup>1</sup>Přesněji mezi grafem, osou parametru a kolmicemi na osu parametru, které procházejí okraji intervalu, přes který integrál

**Úkol:** spočítejte obsah funkce pod grafem funkce  $f(x)$  na uzavřeném intervalu  $[a, b]$

- Hlavní myšlenka konstrukce je aproximace plochy pod křivkou pomocí obdélníků:

**Úkol:** spočítejte obsah funkce pod grafem funkce  $f(x)$  na uzavřeném intervalu  $[a, b]$

- Hlavní myšlenka konstrukce je aproximace plochy pod křivkou pomocí obdélníků:
  - interval rozdělíme na malé kousky (tzv. rozdělení intervalu),

**Úkol:** spočítejte obsah funkce pod grafem funkce  $f(x)$  na uzavřeném intervalu  $[a, b]$

- Hlavní myšlenka konstrukce je aproximace plochy pod křivkou pomocí obdélníků:
  - interval rozdělíme na malé kousky (tzv. rozdělení intervalu),
  - na těchto kouscích aproximujeme funkci  $f(x)$  vhodně zvolenými konstantními funkcemi (dostaneme takzvané *stupňovité* funkce),

**Úkol:** spočítejte obsah funkce pod grafem funkce  $f(x)$  na uzavřeném intervalu  $[a, b]$

- Hlavní myšlenka konstrukce je aproximace plochy pod křivkou pomocí obdélníků:
  - interval rozdělíme na malé kousky (tzv. rozdělení intervalu),
  - na těchto kouscích aproximujeme funkci  $f(x)$  vhodně zvolenými konstantními funkcemi (dostaneme takzvané *stupňovité* funkce),
  - obsah pod grafem stupňovité funkce je součet obsahu obdélníků, a tedy snadno spočítatelná veličina.



**Úkol:** spočítejte obsah funkce pod grafem funkce  $f(x)$  na uzavřeném intervalu  $[a, b]$

- Hlavní myšlenka konstrukce je aproximace plochy pod křivkou pomocí obdélníků:
  - interval rozdělíme na malé kousky (tzv. rozdělení intervalu),
  - na těchto kouscích aproximujeme funkci  $f(x)$  vhodně zvolenými konstantními funkcemi (dostaneme takzvané *stupňovité* funkce),
  - obsah pod grafem stupňovité funkce je součet obsahu obdélníků, a tedy snadno spočítatelná veličina.
- Zjemňujeme rozdělení a tím získáváme přesnější a přesnější aproximace hledaného obsahu.

**Úkol:** spočítejte obsah funkce pod grafem funkce  $f(x)$  na uzavřeném intervalu  $[a, b]$

- Hlavní myšlenka konstrukce je aproximace plochy pod křivkou pomocí obdélníků:
  - interval rozdělíme na malé kousky (tzv. rozdělení intervalu),
  - na těchto kouscích aproximujeme funkci  $f(x)$  vhodně zvolenými konstantními funkcemi (dostaneme takzvané *stupňovité* funkce),
  - obsah pod grafem stupňovité funkce je součet obsahu obdélníků, a tedy snadno spočítatelná veličina.
- Zjemňujeme rozdělení a tím získáváme přesnější a přesnější aproximace hledaného obsahu.
- Přesnou hodnotu získáme tak, že v limitě „pošleme“ šířku výše uvedených malých kousků k nule.

## Definice 8.1

Bud' dán interval  $[a, b]$ . Konečnou množinu

$$\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

takovou, že

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

nazýváme **rozdělením intervalu**  $[a, b]$ . Bodům  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ , říkáme **dělicí body intervalu**  $[a, b]$ . Číslo

$$\nu(\sigma) = \max\{\Delta_k : k = 1, 2, \dots, n\}, \quad \text{kde } \Delta_k = x_k - x_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

nazýváme **normou rozdělení**  $\sigma$ .

# Ekvidistantní rozdělení

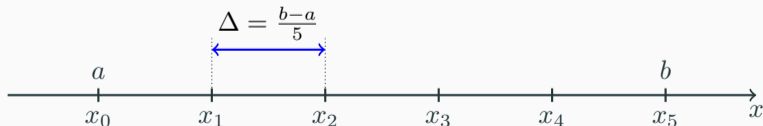
## Příklad 8.2 (Ekvidistantní rozdělení)

Pro interval  $[a, b]$  a kladné celé  $n$  položme  $\Delta = \frac{b-a}{n}$  a

$$x_i = a + i \cdot \Delta, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Tedy

$$\sigma = \{a, a + \Delta, a + 2\Delta, \dots, a + (n - 1)\Delta, a + n\Delta = b\}.$$



### Definice 8.3

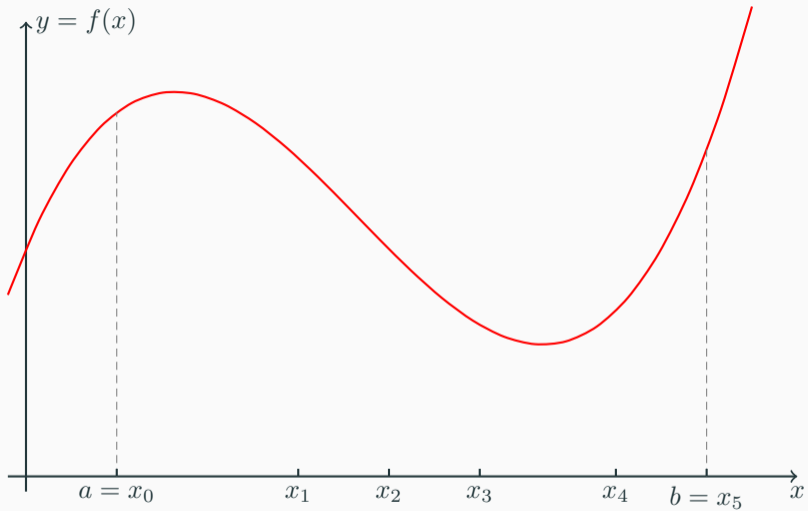
Nechť funkce  $f$  je definovaná na intervalu  $[a, b]$  a  $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  je rozdělení tohoto intervalu. Označme

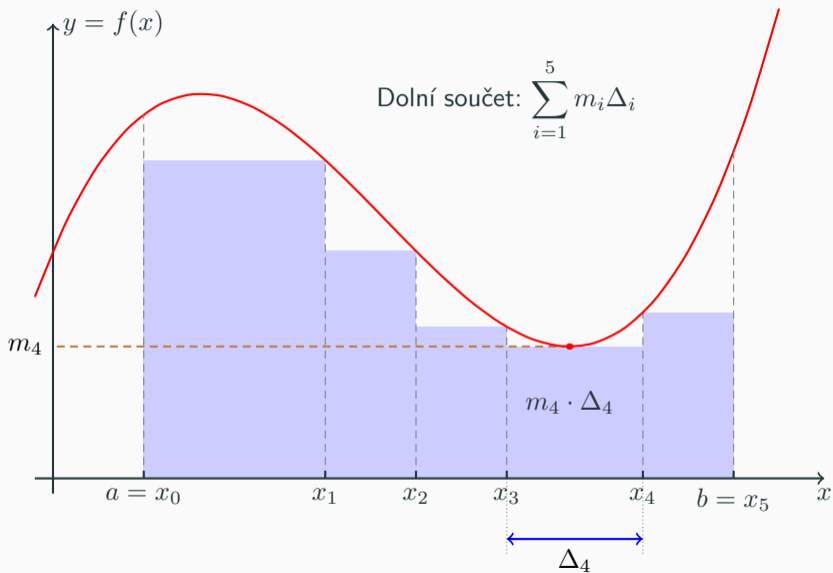
$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{a} \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

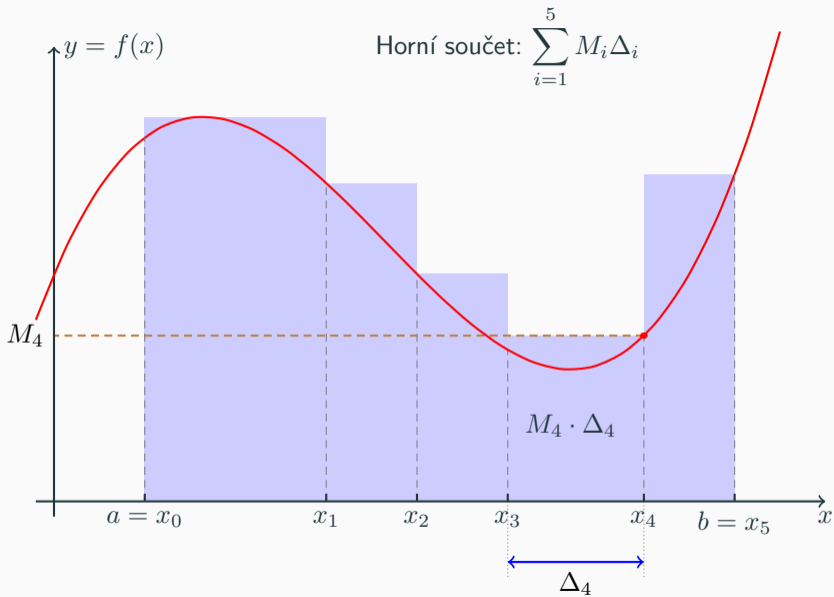
pro každé  $i = 1, 2, \dots, n$ . Potom

$$S_f(\sigma) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta_i \quad \text{a} \quad s_f(\sigma) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta_i$$

nazýváme **horním**, resp. **dolním**, (**Darbouxovým**) **součtem funkce**  $f$  při rozdělení  $\sigma$ .









# Definice Darbouxova integrálu

**Horní Darbouxův integrál (funkce  $f$  na  $[a, b]$ ) je**

$$D_f = \inf \left\{ S_f(\sigma) : \sigma \text{ je rozdělení } [a, b] \right\}$$

**a dolní Darbouxův integrál (funkce  $f$  na  $[a, b]$ ) je**

$$d_f = \sup \left\{ s_f(\sigma) : \sigma \text{ je rozdělení } [a, b] \right\}.$$

# Definice Darbouxova integrálu

**Horní Darbouxův integrál (funkce  $f$  na  $[a, b]$ )** je

$$D_f = \inf \left\{ S_f(\sigma) : \sigma \text{ je rozdělení } [a, b] \right\}$$

**a dolní Darbouxův integrál (funkce  $f$  na  $[a, b]$ )** je

$$d_f = \sup \left\{ s_f(\sigma) : \sigma \text{ je rozdělení } [a, b] \right\}.$$

Pokud  $D_f = d_f$ , nazveme tuto hodnotu **Darbouxovým integrálem** funkce  $f$  na intervalu  $[a, b]$  a značíme ji

$$\int_a^b f(x) dx = D_f = d_f.$$

Říkáme, že  $f$  je **(Darbouxovsky) integrabilní** na  $[a, b]$ .

Jiné značení:  $\int_a^b f$ .

Posloupnost rozdělení  $\sigma_n$  nazveme **normální**, pokud pro její normy platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(\sigma_n) = 0.$$

### Věta 8.4

*Bud'  $f$  spojitá na  $[a, b]$ . Potom existuje  $\int_a^b f(x)dx$ . Je-li  $\sigma_n$  normální posloupnost rozdělení, potom*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_f(\sigma_n) \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_f(\sigma_n)$$

*existují a jsou rovny  $\int_a^b f(x)dx$ .*

Posloupnost rozdělení  $\sigma_n$  nazveme **normální**, pokud pro její normy platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(\sigma_n) = 0.$$

### Věta 8.4

*Bud'  $f$  spojitá na  $[a, b]$ . Potom existuje  $\int_a^b f(x)dx$ . Je-li  $\sigma_n$  normální posloupnost rozdělení, potom*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_f(\sigma_n) \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_f(\sigma_n)$$

*existují a jsou rovny  $\int_a^b f(x)dx$ .*

### Poznámka

**Riemannův** integrál je definovaný velice podobně, jen se použije jiná stupňovitá funkce. Ve výsledku je to ale jedno, Riemannova a Darbouxova definice je ekvivalentní. Darbouxova je o něco málo názornější, proto ji používáme.

### Příklad 8.5

Vypočtete integrál funkce  $f(x) = x$  na intervalu  $J = [0, 1]$ .

Zvolme normální posloupnost  $(\sigma_n)$  ekvidistantních rozdělení intervalu  $J$ .

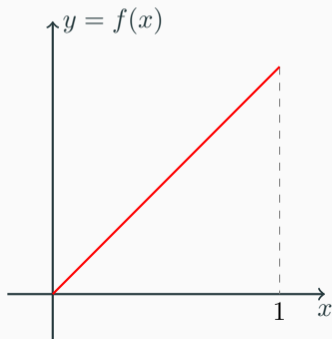
$$\sigma_n = \left\{ 0 = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)} = 1 \right\}, \quad x_i^{(n)} = i \cdot \frac{1}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Pro dolní součet při rozdělení  $\sigma_n$  dostáváme

$$s_f(\sigma_n) = \sum_{i=1}^n x_{i-1}^{(n)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

Protože  $f$  je spojitá, platí

$$\int_0^1 x \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_f(\sigma_n) = \frac{1}{2}.$$



### Příklad 8.5

Vypočtete integrál funkce  $f(x) = x$  na intervalu  $J = [0, 1]$ .

Zvolme normální posloupnost  $(\sigma_n)$  ekvidistantních rozdělení intervalu  $J$ .

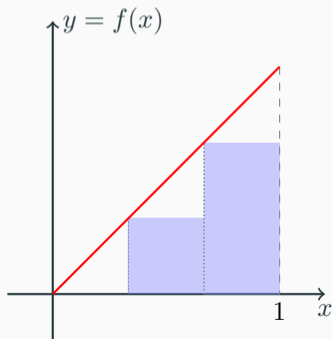
$$\sigma_n = \left\{ 0 = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)} = 1 \right\}, \quad x_i^{(n)} = i \cdot \frac{1}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Pro dolní součet při rozdělení  $\sigma_n$  dostáváme

$$s_f(\sigma_n) = \sum_{i=1}^n x_{i-1}^{(n)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

Protože  $f$  je spojitá, platí

$$\int_0^1 x \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_f(\sigma_n) = \frac{1}{2}.$$



### Příklad 8.5

Vypočtete integrál funkce  $f(x) = x$  na intervalu  $J = [0, 1]$ .

Zvolme normální posloupnost  $(\sigma_n)$  ekvidistantních rozdělení intervalu  $J$ .

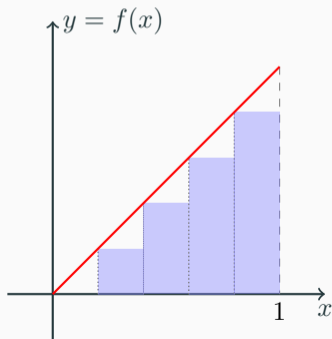
$$\sigma_n = \left\{ 0 = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)} = 1 \right\}, \quad x_i^{(n)} = i \cdot \frac{1}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Pro dolní součet při rozdělení  $\sigma_n$  dostáváme

$$s_f(\sigma_n) = \sum_{i=1}^n x_{i-1}^{(n)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

Protože  $f$  je spojitá, platí

$$\int_0^1 x \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_f(\sigma_n) = \frac{1}{2}.$$



### Příklad 8.5

Vypočtete integrál funkce  $f(x) = x$  na intervalu  $J = [0, 1]$ .

Zvolme normální posloupnost  $(\sigma_n)$  ekvidistantních rozdělení intervalu  $J$ .

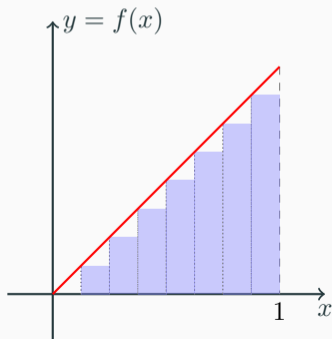
$$\sigma_n = \left\{ 0 = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)} = 1 \right\}, \quad x_i^{(n)} = i \cdot \frac{1}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Pro dolní součet při rozdělení  $\sigma_n$  dostáváme

$$s_f(\sigma_n) = \sum_{i=1}^n x_{i-1}^{(n)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

Protože  $f$  je spojitá, platí

$$\int_0^1 x \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_f(\sigma_n) = \frac{1}{2}.$$





### Příklad 8.5

Vypočtěte integrál funkce  $f(x) = x$  na intervalu  $J = [0, 1]$ .

Zvolme normální posloupnost  $(\sigma_n)$  ekvidistantních rozdělení intervalu  $J$ .

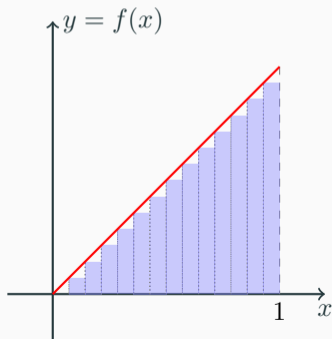
$$\sigma_n = \left\{ 0 = x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)} = 1 \right\}, \quad x_i^{(n)} = i \cdot \frac{1}{n}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Pro dolní součet při rozdělení  $\sigma_n$  dostáváme

$$s_f(\sigma_n) = \sum_{i=1}^n x_{i-1}^{(n)} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

Protože  $f$  je spojitá, platí

$$\int_0^1 x \, dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_f(\sigma_n) = \frac{1}{2}.$$



## Věta 8.6 (Aditivita integrálu)

*Nechť  $f$  a  $g$  jsou spojité funkce na intervalu  $[a, b]$ . Potom pro integrál funkce  $f + g$  (která je také automaticky spojitá na  $[a, b]$ ) platí*

$$\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

## Věta 8.7 (Multiplikativita integrálu)

*Nechť  $f$  je spojitá na intervalu  $[a, b]$  a  $c \in \mathbb{R}$  je konstanta. Potom pro integrál funkce  $cf$  platí*

$$\int_a^b (cf)(x)dx = c \int_a^b f(x)dx.$$

Primitivní funkce (resp. neurčitý integrál) k funkci  $f$  je taková funkce  $F$ , pro kterou platí že  $f = F'$ . Hledání primitivní funkce je tedy něco jako inverzní proces k derivování.

## Definice 8.8

Nechť funkce  $f$  je definována v intervalu  $(a, b)$ , kde  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ . Funkci  $F$  splňující podmínku

$$F'(x) = f(x) \text{ pro každé } x \in (a, b)$$

nazýváme **primitivní funkcí** k funkci  $f$  v intervalu  $(a, b)$ .

# Primitivní funkce elementárních funkcí

Ze znalosti derivací můžeme ihned sestavit tabulku primitivních funkcí:

vzorec	interval, parametry
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{Z}, n \leq -2$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$x \in (0, +\infty), \alpha \notin \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln  x  + C$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$x \in \mathbb{R}, a > 0$ a $a \neq 1$
$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$

vzorec	interval, parametry
$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \operatorname{tg}(x) + C$	$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\operatorname{cotg}(x) + C$	$x \in (k\pi, \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$	$x \in (-1, 1)$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg}(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$

# Newtonova formule

Následující věta odhaluje vztah mezi určitým a neurčitým integrálem. Umožňuje nám počítat integrál bez explicitního použití definice s limitou.

## Věta 8.9 (Newtonova formule)

*Nechť  $f$  je funkce spojitá na intervalu  $[a, b]$  s primitivní funkcí  $F$  na  $(a, b)$ . Pak platí rovnost*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x).$$

Rozdíl na pravé straně má zaběhlé značení:  $\left[ F(x) \right]_a^b$ .

## Věta 8.10

*Nechť  $f$  a  $g$  jsou funkce spojité na  $[a, b]$ ,  $f$  má spojitou derivaci na intervalu  $[a, b]$  a necht'  $G$  je primitivní funkce k funkci  $g$  na intervalu  $[a, b]$ . Potom*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)dx.$$

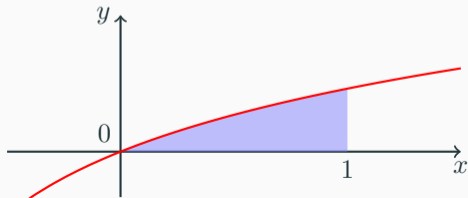
## Příklad 8.11

Vypočtěte

$$\int_0^1 \ln(1+x) dx.$$

Derivujeme  $\ln(1+x)$  a integrujeme 1,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(1+x) dx &= \left[ x \ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = \\ &= \ln(2) - \left[ x - \ln|1+x| \right]_0^1 = 2 \ln(2) - 1. \end{aligned}$$





# Substituce v určitém integrálu

Zavádíme následující značení

- $\int_a^a f = 0$ ,
- pro  $a > b$  klademe  $\int_a^b f = -\int_b^a f$ .

## Věta 8.12 (O substituci)

*Nechť pro funkce  $f$  a  $\varphi$  platí*

- 1  $\varphi$  a její derivace  $\varphi'$  jsou spojité na  $[\alpha, \beta]$ ,
- 2  $f$  je spojitá na  $\varphi([\alpha, \beta])$ .

*Potom*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx.$$

### Příklad 8.13

Vypočtěte integrál

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{2} + e^{-x}} dx.$$

Použijeme substituci  $y = \varphi(x) = \frac{1}{2} + e^{-x}$ . Potom

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{2} + e^{-x}} dx = - \int_{\frac{3}{2}}^1 \frac{1}{y} dy = \left[ \ln |y| \right]_1^{\frac{3}{2}} = \ln \frac{3}{2}.$$

## 8. Připomenutí: integrace funkce 1 proměnné

- Darbouxův/Riemannův integrál funkce jedné proměnné

## 9. Vícerozměrný integrál

### ■ Funkce 2 proměnných

- Obdélníková oblast
- Obecná oblast
- Aplikace

### ■ Funkce více proměnných

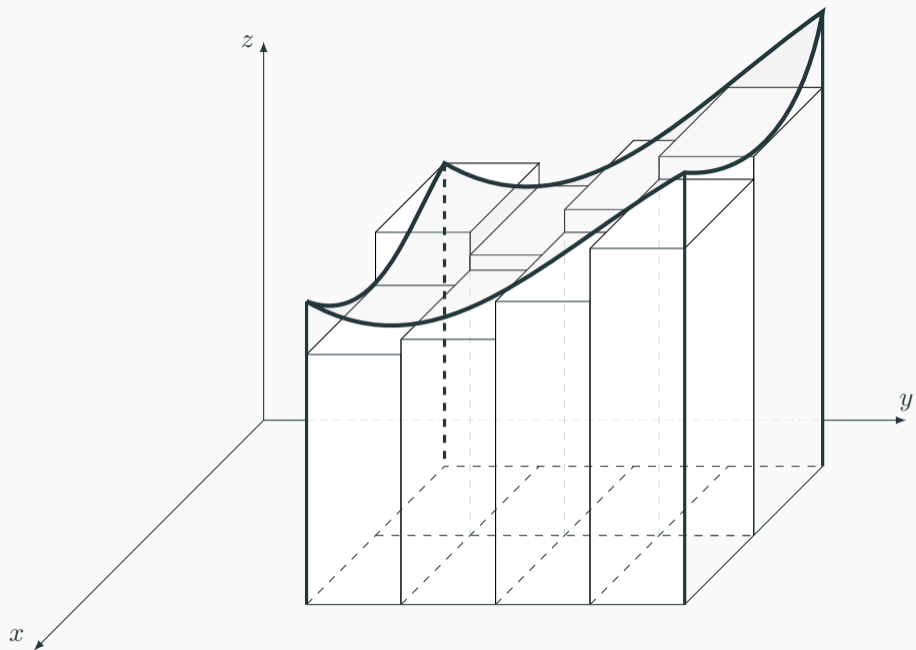
## Funkce 2 proměnných

---

Mějme  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $D = [a, b] \times [c, d]$ .

Graf této funkce si lze představit jako část povrchu nějakého předmětu.

Integrálem této funkce budeme počítat objem pod tímto grafem.



## Definice

Nechť  $\sigma_x = (x_i)_{i=0}^n$  je rozdělení  $[a, b]$  a  $\sigma_y = (y_j)_{j=0}^m$  rozdělení  $[c, d]$ .

$\sigma = \sigma_x \times \sigma_y$  je rozdělením  $D = [a, b] \times [c, d]$ .

## Definice

Nechť  $\sigma_x = (x_i)_{i=0}^n$  je rozdělení  $[a, b]$  a  $\sigma_y = (y_j)_{j=0}^m$  rozdělení  $[c, d]$ .

$\sigma = \sigma_x \times \sigma_y$  je rozdělením  $D = [a, b] \times [c, d]$ .

Označme  $M_{i,j} = \sup \left\{ f(x, y) : (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \right\}$  a

$m_{i,j} = \inf \left\{ f(x, y) : (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \right\}$ .

## Definice

Nechť  $\sigma_x = (x_i)_{i=0}^n$  je rozdělení  $[a, b]$  a  $\sigma_y = (y_j)_{j=0}^m$  rozdělení  $[c, d]$ .

$\sigma = \sigma_x \times \sigma_y$  je rozdělením  $D = [a, b] \times [c, d]$ .

Označme  $M_{i,j} = \sup \left\{ f(x, y) : (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \right\}$  a

$m_{i,j} = \inf \left\{ f(x, y) : (x, y) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \right\}$ .

**Horní Darbouxova suma  $f$  vzhledem k rozdělení  $\sigma$  je**

$$S_f(\sigma) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{i,j} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

**a dolní Darbouxova suma  $f$  vzhledem k rozdělení  $\sigma$  je**

$$s_f(\sigma) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{i,j} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$



**Horní Darbouxův integrál (funkce  $f$  na  $D$ ) je**

$$D_f = \inf \left\{ S_f(\sigma) : \sigma \text{ je rozdělení } D \right\}$$

**a dolní Darbouxův integrál (funkce  $f$  na  $D$ ) je**

$$d_f = \sup \left\{ s_f(\sigma) : \sigma \text{ je rozdělení } D \right\}.$$

## Definice ...

**Horní Darbouxův integrál (funkce  $f$  na  $D$ )** je

$$D_f = \inf \left\{ S_f(\sigma) : \sigma \text{ je rozdění } D \right\}$$

a **dolní Darbouxův integrál (funkce  $f$  na  $D$ )** je

$$d_f = \sup \left\{ s_f(\sigma) : \sigma \text{ je rozdění } D \right\}.$$

Pokud  $D_f = d_f$ , tak tuto hodnotu nazýváme **(dvojitým) Darbouxovým integrálem** funkce  $f$  na  $D$  a značíme ji

$$\iint_D f(x, y) dx dy = D_f = d_f.$$

Zkrácené značení:  $\iint_D f$ ,  $\int_D f$ ,  $\int_D f(x, y) dx dy$ .

Řekneme, že  $f$  je **(Darbouxovsky) integrabilní** na  $D$ .

### Poznámka

Definice je ekvivalentní s Riemannovou definicí.

Řekneme, že posloupnost rozdělení  $\sigma_n = \sigma_{x,n} \times \sigma_{y,n}$  množiny  $D$  je **normální**, jsou-li  $\sigma_{x,n}$  i  $\sigma_{y,n}$  normální.

Analogicky k jednorozměrnému případu:

je-li  $f$  spojitá na  $D$ , pak integrál  $\iint_D f$  existuje a je roven  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_f(\sigma_n)$  a  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_f(\sigma_n)$  pro libovolnou normální posloupnost rozdělení  $\sigma_n$  množiny  $D$ .

# Výpočet dvojného integrálu nad obdélíkovou oblastí

Následující věta nám říká, jak převést problém výpočtu dvojného integrálu na dva jednodimenzionální podproblémy.

## Věta 9.1

*Bud'  $f(x, y)$  integrovatelná funkce na  $D = [a, b] \times [c, d]$ . Pokud existuje jeden z integrálů*

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx \quad \text{nebo} \quad \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

*potom je roven dvojnému integrálu*

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

# Výpočet dvojného integrálu nad obdélíkovou oblastí

Následující věta nám říká, jak převést problém výpočtu dvojného integrálu na dva jednodimenzionální podproblémy.

## Věta 9.1

*Bud'  $f(x, y)$  integrabilní funkce na  $D = [a, b] \times [c, d]$ . Pokud existuje jeden z integrálů*

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx \quad \text{nebo} \quad \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

*potom je roven dvojnému integrálu*

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

Výpočet dvojného integrálu tedy můžeme provést tak, že funkci nejdříve zintegrujeme vzhledem k jedné proměnné a druhou považujeme za konstantu. Výsledek této integrace (získaný pomocí Newtonovy formule) potom již závisí pouze na jedné proměnné, vzhledem ke které provedeme druhou integraci.

## Obecná oblast

---

Je-li  $D$  omezená podmnožina  $\mathbb{R}^2$ , pak definujeme Darbouxův integrál na  $D$  následovně:

Je-li  $D$  omezená podmnožina  $\mathbb{R}^2$ , pak definujeme Darbouxův integrál na  $D$  následovně:

### Definice 9.2

Mějme  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $D \subset \tilde{D} = [a, b] \times [c, d]$ .

Je-li  $D$  omezená podmnožina  $\mathbb{R}^2$ , pak definujeme Darbouxův integrál na  $D$  následovně:

## Definice 9.2

Mějme  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $D \subset \tilde{D} = [a, b] \times [c, d]$ .

Definujeme *dvojitý Darbouxův integrál* funkce  $f$  na  $D$  jako hodnotu

$$\iint_D f := \iint_{\tilde{D}} \tilde{f},$$



# Obecná oblast

Je-li  $D$  omezená podmnožina  $\mathbb{R}^2$ , pak definujeme Darbouxův integrál na  $D$  následovně:

## Definice 9.2

Mějme  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $D \subset \tilde{D} = [a, b] \times [c, d]$ .

Definujeme *dvojitý Darbouxův integrál* funkce  $f$  na  $D$  jako hodnotu

$$\iint_D f := \iint_{\tilde{D}} \tilde{f},$$

kde

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in D \\ 0 & \text{pro } x \in \tilde{D} \setminus D, \end{cases}$$

pokud existuje.

# Obecná oblast

Je-li  $D$  omezená podmnožina  $\mathbb{R}^2$ , pak definujeme Darbouxův integrál na  $D$  následovně:

## Definice 9.2

Mějme  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $D \subset \tilde{D} = [a, b] \times [c, d]$ .

Definujeme *dvojitý Darbouxův integrál* funkce  $f$  na  $D$  jako hodnotu

$$\iint_D f := \iint_{\tilde{D}} \tilde{f},$$

kde

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in D \\ 0 & \text{pro } x \in \tilde{D} \setminus D, \end{cases}$$

pokud existuje.

Uvedená definice nezávisí na volbě obdélníka  $\tilde{D}$ .

## Definice 9.3

Řekneme, že množina  $Z \subset \mathbb{R}^2$  má *míru nula* pokud pro každé  $\varepsilon > 0$  existují obdélníky  $R_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$  pro  $i = 1, \dots, n$  tak, že

$$Z \subset \bigcup_{i=1}^n R_i$$

## Definice 9.3

Řekneme, že množina  $Z \subset \mathbb{R}^2$  má *míru nula* pokud pro každé  $\varepsilon > 0$  existují obdélníky  $R_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$  pro  $i = 1, \dots, n$  tak, že

$$Z \subset \bigcup_{i=1}^n R_i \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^n |b_i - a_i| |d_i - c_i| < \varepsilon.$$

## Poznámka

- Množiny míry nula mají tu vlastnost, že jsou pro hodnotu integrálu „zanedbatelné“.

## Poznámka

- Množiny míry nula mají tu vlastnost, že jsou pro hodnotu integrálu „zanedbatelné“.
- Graf spojitě funkce  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  má míru nula.

## Poznámka

- Množiny míry nula mají tu vlastnost, že jsou pro hodnotu integrálu „zanedbatelné“.
- Graf spojitě funkce  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  má míru nula.
- Mluvíme-li o nějaké vlastnosti bodů množiny  $M \subset \mathbb{R}^2$ , řekneme, že platí *skoro všude* (*almost everywhere*), pokud množina, kde neplatí, má míru nula.

## Poznámka

- Množiny míry nula mají tu vlastnost, že jsou pro hodnotu integrálu „zanedbatelné“.
- Graf spojitě funkce  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  má míru nula.
- Mluvíme-li o nějaké vlastnosti bodů množiny  $M \subset \mathbb{R}^2$ , řekneme, že platí *skoro všude* (*almost everywhere*), pokud množina, kde neplatí, má míru nula.



## Poznámka

- Množiny míry nula mají tu vlastnost, že jsou pro hodnotu integrálu „zanedbatelné“.
- Graf spojitě funkce  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  má míru nula.
- Mluvíme-li o nějaké vlastnosti bodů množiny  $M \subset \mathbb{R}^2$ , řekneme, že platí *skoro všude* (*almost everywhere*), pokud množina, kde neplatí, má míru nula. Říkáme tak např., že funkce  $f$  a  $g$  jsou rovny skoro všude, pokud množina  $\{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) \neq g(x)\}$  má míru nula.

## Poznámka

- Množiny míry nula mají tu vlastnost, že jsou pro hodnotu integrálu „zanedbatelné“.
- Graf spojitě funkce  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  má míru nula.
- Mluvíme-li o nějaké vlastnosti bodů množiny  $M \subset \mathbb{R}^2$ , řekneme, že platí *skoro všude* (*almost everywhere*), pokud množina, kde neplatí, má míru nula. Říkáme tak např., že funkce  $f$  a  $g$  jsou rovny skoro všude, pokud množina  $\{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) \neq g(x)\}$  má míru nula.
- V pravděpodobnosti (např. v předmětu NI-VSM) se v obdobném kontextu používá termín *skoro jistě*.

## Poznámka

- Množiny míry nula mají tu vlastnost, že jsou pro hodnotu integrálu „zanedbatelné“.
- Graf spojitě funkce  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  má míru nula.
- Mluvíme-li o nějaké vlastnosti bodů množiny  $M \subset \mathbb{R}^2$ , řekneme, že platí *skoro všude* (*almost everywhere*), pokud množina, kde neplatí, má míru nula. Říkáme tak např., že funkce  $f$  a  $g$  jsou rovny skoro všude, pokud množina  $\{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) \neq g(x)\}$  má míru nula.
- V pravděpodobnosti (např. v předmětu NI-VSM) se v obdobném kontextu používá termín *skoro jistě*.
- Množinu míry nula lze zavést analogicky i v obecném  $\mathbb{R}^n$ . Jak?

## Věta 9.4

Omezená funkce  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $D = [a, b] \times [c, d]$ , je integrabilní, pokud množina  $\{x \in D : f \text{ není spojitá v } x\}$  má míru nula.

## Věta 9.4

Omezená funkce  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $D = [a, b] \times [c, d]$ , je integrabilní, pokud množina  $\{x \in D : f \text{ není spojitá v } x\}$  má míru nula. (Jinými slovy, pokud  $f$  je spojitá skoro všude na  $D$ .)

## Věta 9.4

Omezená funkce  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $D = [a, b] \times [c, d]$ , je integrabilní, pokud množina  $\{x \in D : f \text{ není spojitá v } x\}$  má míru nula. (Jinými slovy, pokud  $f$  je spojitá skoro všude na  $D$ .)

Připomeňme, že *hranice* množiny  $D \subset \mathbb{R}^n$  je množina všech bodů  $x \in \mathbb{R}^n$  takových, že každé okolí  $H(x)$  má neprázdný průnik jak s  $D$  tak s  $\mathbb{R}^n \setminus D$ .

### Věta 9.4

Omezená funkce  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $D = [a, b] \times [c, d]$ , je integrabilní, pokud množina  $\{x \in D : f \text{ není spojitá v } x\}$  má míru nula. (Jinými slovy, pokud  $f$  je spojitá skoro všude na  $D$ .)

Připomeňme, že *hranice* množiny  $D \subset \mathbb{R}^n$  je množina všech bodů  $x \in \mathbb{R}^n$  takových, že každé okolí  $H(x)$  má neprázdný průnik jak s  $D$  tak s  $\mathbb{R}^n \setminus D$ .

### Důsledek 9.5

Omezená spojitá funkce  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  na omezené množině  $D$  mající hranici míry nula, je integrabilní.

- Pokud  $D = D_1 \cup D_2$ , kde  $D_1$  i  $D_2$  jsou uzavřené omezené množiny,  $D_1 \cap D_2$  má míru nula a  $f$  je integrabilní na  $D$ , pak platí

$$\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f.$$



# Vlastnosti dvojného integrálu

- Pokud  $D = D_1 \cup D_2$ , kde  $D_1$  i  $D_2$  jsou uzavřené omezené množiny,  $D_1 \cap D_2$  má míru nula a  $f$  je integrabilní na  $D$ , pak platí

$$\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f.$$

- Platí-li pro (skoro) všechna  $(x, y) \in D$  a pro integrabilní funkce  $f_1$  a  $f_2$ , že  $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$ , potom

$$\iint_D f_1 \leq \iint_D f_2.$$

# Vlastnosti dvojného integrálu

- Pokud  $D = D_1 \cup D_2$ , kde  $D_1$  i  $D_2$  jsou uzavřené omezené množiny,  $D_1 \cap D_2$  má míru nula a  $f$  je integrabilní na  $D$ , pak platí

$$\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f.$$

- Platí-li pro (skoro) všechna  $(x, y) \in D$  a pro integrabilní funkce  $f_1$  a  $f_2$ , že  $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$ , potom

$$\iint_D f_1 \leq \iint_D f_2.$$

- Pro  $c \in \mathbb{R}$  a integrabilní funkci  $f$  platí

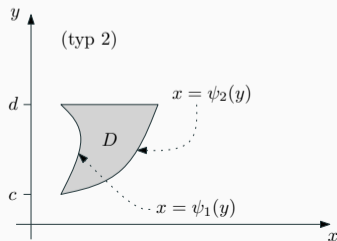
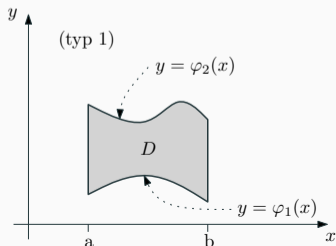
$$\iint_D c \cdot f(x, y) dx dy = c \cdot \iint_D f(x, y) dx dy.$$

# Oblasti s hranicí danou spojitými funkcemi

Jak integrál nad obecnou oblastí spočítat? (Jinak než z definice...)

Zatím jsme si ukázali, jak spočítat integrál funkce přes obdélníkovou oblast. Teď si ukážeme, jak integrovat i přes oblasti, které jsou vymezené spojitými funkcemi. Budeme uvažovat dva typy oblastí  $D$ :

- (typ 1)  $x$  je z intervalu  $[a, b]$  a  $y$  je omezené spoj. funkcemi  $\varphi_1(x)$  a  $\varphi_2(x)$  splňujícími  $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ ,
- (typ 2)  $y$  je z intervalu  $[c, d]$  a  $x$  je omezené spoj. funkcemi  $\psi_1(y)$  a  $\psi_2(y)$  splňujícími  $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ .



# Výpočet dvojného integrálu nad obecnou oblastí – myšlenka

## Myšlenka:

- Pro oblast typu 1 zafixujeme hodnotu  $x$  na  $x_0$ , nad vzniklým řezem oblasti  $D$  nám vznikne funkce  $f(x_0, y)$  jedné proměnné  $y$ .
- Plocha nad tímto řezem závisí na  $x_0$  a je rovna  $p(x_0) = \int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y) dy$ .
- Nyní „posčítáme“ takto získané jednorozměrné plochy přes všechna  $x$  od  $a$  do  $b$  a dostaneme

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \underbrace{\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy}_{=p(x)} \right) dx.$$

## Věta 9.6

Pokud integrály (ve vzorcích níže) existují, platí pro oblasť  $D$ , že

- *je-li  $D$  typu 1, máme*

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

- *je-li  $D$  typu 2, máme*

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

## Příklad 9.7

Vypočítejte integrál  $f(x, y) = xy$  nad oblastí  $D$  typu 1, kde  $x \in [0, 1]$  a  $y$  je sevřené funkcemi  $x^2$  a  $x^3$ :

# Výpočet dvojného integrálu nad obecnou oblastí příklad

## Příklad 9.7

Vypočítejte integrál  $f(x, y) = xy$  nad oblastí  $D$  typu 1, kde  $x \in [0, 1]$  a  $y$  je sevřené funkcemi  $x^2$  a  $x^3$ :

$$\begin{aligned} \iint_D xy \, dx dy &= \int_0^1 \left( \int_{x^3}^{x^2} xy \, dy \right) dx = \int_0^1 \left( \left[ \frac{xy^2}{2} \right]_{y=x^3}^{y=x^2} \right) dx = \\ &= \int_0^1 \frac{xx^4 - xx^6}{2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{x^6}{6} - \frac{x^8}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{12} - \frac{1}{16} = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

## Aplikace (dvojného) integrálu

Pomocí dvojného integrálu můžeme spočítat několik užitečných čísel charakterizujících daný objem pod grafem funkce  $f$  nad oblastí  $D$ :

- průměr (jako objem lomeno povrch oblasti  $D$ ):

$$\left( \iint_D f(x, y) dx dy \right) / \left( \iint_D 1 dx dy \right).$$



## Aplikace (dvojného) integrálu

Pomocí dvojného integrálu můžeme spočítat několik užitečných čísel charakterizujících daný objem pod grafem funkce  $f$  nad oblastí  $D$ :

- průměr (jako objem lomeno povrch oblasti  $D$ ):

$$\left( \iint_D f(x, y) dx dy \right) / \left( \iint_D 1 dx dy \right).$$

- těžiště desky  $D$  s proměnnou hustotou  $\rho(x, y)$  má souřadnice  $(\bar{x}, \bar{y})$ :

$$\bar{x} = \left( \iint_D x \rho(x, y) dx dy \right) / \left( \iint_D \rho(x, y) dx dy \right),$$

$$\bar{y} = \left( \iint_D y \rho(x, y) dx dy \right) / \left( \iint_D \rho(x, y) dx dy \right).$$

## Aplikace (dvojného) integrálu

Pomocí dvojného integrálu můžeme spočítat několik užitečných čísel charakterizujících daný objem pod grafem funkce  $f$  nad oblastí  $D$ :

- průměr (jako objem lomeno povrch oblasti  $D$ ):

$$\left( \iint_D f(x, y) dx dy \right) / \left( \iint_D 1 dx dy \right).$$

- těžiště desky  $D$  s proměnnou hustotou  $\rho(x, y)$  má souřadnice  $(\bar{x}, \bar{y})$ :

$$\bar{x} = \left( \iint_D x \rho(x, y) dx dy \right) / \left( \iint_D \rho(x, y) dx dy \right),$$

$$\bar{y} = \left( \iint_D y \rho(x, y) dx dy \right) / \left( \iint_D \rho(x, y) dx dy \right).$$

- Povrch grafu  $f(x, y)$  nad  $D$  je

$$\iint_D \sqrt{1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)^2} dx dy.$$

# Trojný integrál

Konstrukce trojného integrálu je naprosto analogická konstrukci integrálu dvojného, pouze obdélníčky  $\Delta_{ij}$  jsou nahrazeny „kvádříčky“  $\Delta_{ijk}$  a integrujeme funkci tří proměnných  $f(x, y, z)$ :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$$

Výpočet lze opět převést na tři výpočty jednorozměrného integrálu, např.

$$\int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz = \int_e^f \left( \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz .$$

Existuje ovšem 3! možných pořadí integrování.

Konstrukce pro obecné funkce nad  $\mathbb{R}^n$  probíhá zcela analogicky a platí analogická tvrzení. (Nicméně se pro definici v naprosté většině případů nepoužívá Darbouxova/Riemannova definice, ale jiná, např. Lebesgueova.)

## Definice 9.8

Mějme  $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Psi(\mathbf{v}) = (\Psi_1(\mathbf{v}), \dots, \Psi_n(\mathbf{v}))$ . **Jacobiho matice** zobrazení  $\Psi$  je následující zobrazení  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$  (pro  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ )

$$J_{\Psi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial v_1} & \cdots & \frac{\partial \Psi_1}{\partial v_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Psi_n}{\partial v_1} & \cdots & \frac{\partial \Psi_n}{\partial v_n} \end{pmatrix},$$

pokud všechny parciální derivace existují.

## Definice 9.8

Mějme  $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Psi(\mathbf{v}) = (\Psi_1(\mathbf{v}), \dots, \Psi_n(\mathbf{v}))$ . **Jacobiho matice** zobrazení  $\Psi$  je následující zobrazení  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$  (pro  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ )

$$J_{\Psi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial \Psi_1}{\partial v_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Psi_n}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial \Psi_n}{\partial v_n} \end{pmatrix},$$

pokud všechny parciální derivace existují.

Jacobiho matice zobrazení  $\Psi$  má na řádcích složky gradientů jednotlivých složek  $\Psi$ . Toto se (s drobným zneužitím značení) zapíše takto:

$$J_{\Psi} = \begin{pmatrix} \nabla \Psi_1 \\ \vdots \\ \nabla \Psi_n \end{pmatrix}.$$

## Věta 9.9 (Věta o substituci)

Nechť  $D$  je omezená uzavřená množina na  $\mathbb{R}^n$ . Nechť  $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  má spojité všechny parciální derivace (všech složek) na nějaké otevřené nadmnožině množiny  $D$  a skoro všude na  $D$  platí, že

- 1  $\Psi$  je bijekce a
- 2  $\det J_\Psi$  je nenulový.

Potom pro každou spojitou funkci  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  platí

$$\int_{\Psi(D)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_D f(\Psi(\mathbf{v})) |\det J_\Psi(\mathbf{v})| d\mathbf{v}$$

kde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .