NI-MPI přednáška 6

Analýza: integrály – příklady

Štěpán Starosta

23. 10. 2023

FIT ČVUT

Připomenutí: obdélníková oblast

Věta

Buď $f(x,y)$ integrabilní funkce na $D = [a,b] \times [c,d]$. Pokud existuje jeden z integrálů

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \quad \textit{nebo} \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

potom je roven dvojnému integrálu

$$\iint_D f(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Příklad 1: obdélníková oblast

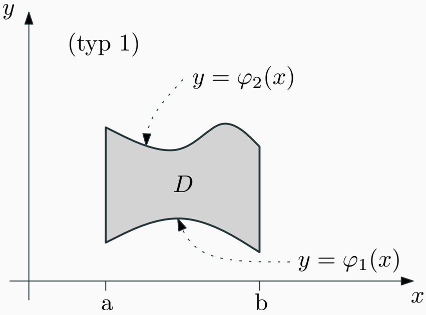
Základní cvičení 12.1

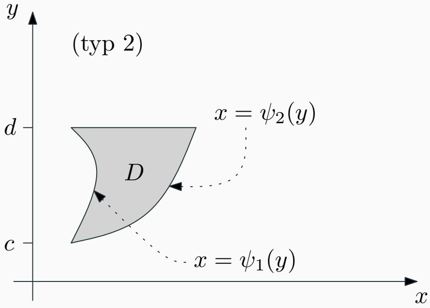
Buď $f(x,y) = \frac{x^2}{1+y^2}$ a $D = [2,3] \times [0,3]$. Spočítejte

$$\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Budeme uvažovat dva typy oblastí:

- (typ 1) x je z intervalu $[a, b]$ a y je omezené spoj. funkcemi $\varphi_1(x)$ a $\varphi_2(x)$ splňujícími $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ pro všechna $x \in [a, b]$,
- (typ 2) y je z intervalu $[c, d]$ a x je omezené spoj. funkcemi $\psi_1(y)$ a $\psi_2(y)$ splňujícími $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ pro všechna $y \in [c, d]$.





Připomenutí: téměř obecná oblast ii

A integrály přes takovéto oblasti budeme počítat dle následující věty.

Věta

Pokud integrály (ve vzorcích níže) existují, platí pro oblast D, že

- *je-li D typu 1, máme*

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

- *je-li D typu 2, máme*

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Příklad 2: obecnější oblast i

Základní cvičení 13.1

Buď $f(x,y) = xy$. Spočítejte

$$\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde D je omezená množina ohraničená křivkami $y^2 = x$ a $y = x - 2$.

Příklad 2: obecnější oblast ii

$\int_D xy = \int_{-1}^{2} \left(\int_{y^2}^{y+2} xy \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$

Připomenutí: substituce i

Mějme $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\Psi(\mathbf{v}) = (\Psi_1(\mathbf{v}), \ldots, \Psi_n(\mathbf{v}))$. **Jacobiho matice** funkce Ψ je následující zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n,n}$ (pro $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$)

$$J_\Psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi_1}{\partial v_1} & \cdots & \frac{\partial \Psi_1}{\partial v_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Psi_n}{\partial v_1} & \cdots & \frac{\partial \Psi_n}{\partial v_n} \end{pmatrix},$$

pokud všechny parciální derivace existují.

Věta (Věta o substituci)

Nechť D *je omezená uzavřená množina na* $\mathbb{R}^n$. *Nechť* $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *má spojité všechny parciální derivace (všech složek) na nějaké otevřené nadmnožině množiny* D *a* skoro všude *na* D *platí, že*

1. Ψ *je bijekce a*
2. $\det J_\Psi$ *je nenulový.*

Potom pro každou spojitou funkci $f : D \to \mathbb{R}$ *platí*

$$\int_{\psi(D)} f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_D f(\Psi(\mathbf{v})) \left|\det J_\Psi(\mathbf{v})\right| \mathrm{d}\mathbf{v}$$

kde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Základní cvičení 14.1

Buď $f(x,y) = 3x + 2y - 1$. Spočítejte

$$\int_{\widetilde{D}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kde $\widetilde{D} = \{(x,y)\colon 1 \le x^2 + y^2 \le 4 \text{ a } x \le y\}$.

$\widetilde{D}$

$$\Psi(D) = \widetilde{D}$$

$$\Psi : \begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$$

$$\Psi\left(\quad \right) = \left(\qquad \right)$$

$$J_\Psi\left(\quad \right) = \left(\qquad \right)$$

Příklad 3: obecnější oblast ii

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \Psi(\mathbf{v})$$

$$\Psi^{-1}(\widetilde{D}) = D = [1,2] \times \left[\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{5\pi}{4}\right]$$

$$J_\Psi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\det J_\Psi \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} =$$

$$\int_D (3x + 2y - 1) \mathrm{d}x \mathrm{d}y =$$

Příklad 3: obecnější oblast iii

$$\int_{\widetilde{D}} (3x + 2y - 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(\int_1^2 (3r\cos\varphi + 2r\sin\varphi - 1)|r|\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi =$$

Doplnění k větě o postupném integrování i

Mějme $D = [0,1] \times [0,1]$.

Uvažme funkci

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x = \frac{1}{2} \text{ a } y = \frac{\ell}{2^i} \text{ pro všechna kladná celá } \ell, i; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ existuje (a je roven 0), ale $\int_0^1 f\left(\frac{1}{2}, y\right) \mathrm{d}y$ neexistuje.

Doplnění k větě o postupném integrování ii

Mějme $D = [0,1] \times [0,1]$.

Mějme $\tau(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ 0 & \text{pro } t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$

a

$$g(x,y) = \begin{cases} \tau(x) & \text{pokud } y = \frac{\ell}{2^i} \text{ pro všechna kladná celá } \ell, i; \\ 1 - \tau(x) & \text{jinak.} \end{cases}$$

$\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ neexistuje, ale $\int_0^1 g(x,y)\mathrm{d}x$ existuje a navíc je roven $\frac{1}{2}$, a tedy $\int_0^1 \left(\int_0^1 g(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$ existuje.